

시간지연 및 파라미터 불확실성을 갖는 선형시스템의 혼합 H^2/H^∞ 제어기 설계

(Mixed H^2/H^∞ controller design for linear system with time delay and parameter uncertainty)

*이 잡 래, 정 은 태, 방 경 호, 박 흥 배

경북대학교 전자전기공학부(Tel: 950-5548; Fax: 950-5505; E-mail: lkr@palgong.kyungpook.ac.kr)

Abstract A mixed H^2/H^∞ controller design method for linear systems with time delay in all variables and parameter uncertainties in all system matrices is proposed. Robust H^∞ performance and H^2 performance condition that accounts for model-matching of closed loop system and disturbance rejection is also derived. With expressing uncertain system with linear fractional transformation form, we transform the robust stability and performance problem to the H^2/H^∞ optimization problem and design a mixed H^2/H^∞ controller. Using the proposed method, mixed H^2/H^∞ controller for underwater vehicle with time delay and parameter variations are designed. Simulations of a design example with hydrodynamic parameter variations and disturbance are presented to demonstrate the achievement of good robust performance.

Keywords time delay, parameter uncertainty, robust performance, mixed H^2/H^∞ controller

1. 서론

시간지연과 불확실성을 갖는 시스템의 폐루프 안정성과 성능을 보장하는 견실성능 제어이론이 최근에 많은 관심을 끌고 있다. 표준 H^∞ 제어기 설계방법으로 Glover 등^[1]은 두개의 리카디 방정식을 사용하여 H^∞ 제어기 설계에 대한 방법을 제안하였으며, Gahinet 등^[2]은 선형 행렬 부등식을 기초로 H^∞ 제어기가 존재할 필요충분조건은 세계의 선형행렬 부등식으로 주어 진다는 결과를 제시하였다.

Bernstein 등^[3]은 혼합 H^2/H^∞ 제어 문제에 대한 필요충분 조건식으로서 결합된 비선형 행렬식을 구하였으며 Khargonekar 등^[4]은 유한차원의 Convex 최적화 문제를 풀므로써 플랜트 차수와 같은 차수를 가지는 혼합 H^2/H^∞ 제어기를 설계하였다.

Nobuyama^[5]는 입력에 시간지연을 가지는 시스템의 견실안정성 문제를 예측제어기에 바탕을 두고 Bezout 분해를 이용하여 시간지연이 없는 모델정합문제로 변형하였다. 시간지연 시스템의 전달함수 접근법은 정확한 해석이 어렵고 계산이 복잡하기 때문에 Lyapunov 함수를 이용하여 Choi 등^[6]은 상태와 입력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 상태궤환 H^∞ 제어기를 설계하였으며, Mahmoud 등^[7]은 시간지연을 갖는 불확실성 시스템에 대하여 안정성을 만족하는 상태궤환 견실제어기를 설계하였다. 그러나 입력 및 상태변수에 시간지연이 존재하고 모든 시스템행렬에 파라미터 불확실성이 존재하는 시스템에 대하여 견실안정화문제와 견실성능문제를 동시에 만족하는 해를 구하지는 않았다.

본 논문에서는 상태공간모델에서 입력 및 상태변수에 시간지연이 존재하고 모든 시스템행렬에 적절한 구조를 갖는 파라미터 불확실성이 존재할 경우 선형분수변환 접근법을 이용한 견실안정성 조건식을 유도한다. 또한 2 자유도 제어기 구조에서 시간지연과 파라미터 불확실성이 존재할 시에도 모델추종 및 외란감쇠에 대해 견실 H^∞ 성능과 H^2 성능을 보장하는 혼합 H^2/H^∞ 제어기 설계 방법을 제시한다. 불확실성 시스템을 선형분수변환 형태로 바꾸어 일반화된 플랜트를 구하므로써 견실안정화 및 성능문제를 표준 H^2/H^∞ 최적화 문제로 변환하여 선형행렬 부등식을 이용한 제어기를 설계한다. 또한 시간지연 및 파라미터 불확실성을 갖는 수중운동체의 혼합 H^2/H^∞ 제어기를 설계하고 폐루프 시스템이 만족할만한 성능을 가짐을 보인다.

2. 문제설정

시간지연 및 파라미터 불확실성을 갖는 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A_1 + \Delta A_1]x + A_2 x(t-d_1) + [B_{u1} + \Delta B_{u1}]u \\ &\quad + B_{u2}u(t-d_2) + [B_{w1} + \Delta B_{w1}]w_1 + B_{w2}w_1(t-d_3) \\ y &= [C_1 + \Delta C_1]x + C_2x(t-d_4) + (D_{u1} + \Delta D_{u1})u \\ &\quad + D_{u2}u(t-d_5) + (D_{w1} + \Delta D_{w1})w_1 + D_{w2}w_1(t-d_6) \end{aligned} \quad (1)$$

을 고려한다. 여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 상태, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ 는 제어입력, $w_1(t) \in \mathbb{R}^p$ 는 외란, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ 는 출력신호를 나타낸다. $d_1 \sim d_6$ 는 양의 상수인 지연시간이며 \mathbb{R}^n 는 n 차원 실수공간을 의미하며 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 시간지연 모델링 및 파라미터 불확실성에 대한 불확실성 구조는 정합조건을 사용하여

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta A_1 & \Delta B_{u1} & \Delta B_{w1} \end{bmatrix} &= H_x \Delta_1 \begin{bmatrix} E_{x1} & E_{u1} & E_{w1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_2 e^{-sd_1} & B_{u2} e^{-sd_2} & B_{w2} e^{-sd_3} \end{bmatrix} &= H_d \Delta_2 \begin{bmatrix} E_{d1} & E_{d2} & E_{d3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta C_1 & \Delta D_{u1} & \Delta D_{w1} \end{bmatrix} &= H_y \Delta_3 \begin{bmatrix} E_{c1} & E_{c2} & E_{c3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_2 e^{-sd_4} & D_{u2} e^{-sd_5} & D_{w2} e^{-sd_6} \end{bmatrix} &= H_{y2} \Delta_4 \begin{bmatrix} E_{c4} & E_{c5} & E_{c6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

와 같이 표현한다. 여기서, H_{x1} , E_{x1} 는 시간지연 및 불확실성 구조를 나타내며 알고 있는 상수행렬이다. 본 연구에서의 시간지연 모델링은 시간지연항의 근사화 모델링 등으로 인한 시간지연의 오차를 식 (1)과 같이 나타내어 시간지연항을 불확실성으로 간주한다. Δ_2, Δ_4 는 크기가 1인 불확실성으로 고려할 수 있고, Δ_1, Δ_3 는 불확실성 크기를 H_{x1} , E_{x1} 에 고려하여 정규화한다. 따라서 불확실성을 나타내는 모르는 행렬함수 $\Delta_1 \sim \Delta_4$ 항은 $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1$ 을 만족하는 불확실성으로 고려하여 전체 불확실성 Δ 를

$$\Delta = \text{Diag} [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4] \quad (3)$$

로 정의한다. 여기서 $\bar{\sigma}(\Delta)$ 는 행렬 Δ 의 최대특이치를 나타낸다. 식 (2)와 같은 구조의 시간지연 및 파라미터 불확실성을 갖는 선형시스템의 입력 $[u, w_1]$ 와 출력 y 의 관계를

$$y = \bar{G}_{du}(s, \Delta_p) u + \bar{G}_{dw}(s, \Delta_p) w_1 \quad (4)$$

과 같이 표현한다. 여기서 \bar{G}_{du} 는 제어입력 u 에서 출력 y 로의 전달함수 행렬을 나타내고 \bar{G}_{dw} 는 외란 w_1 에서 출력 y 로의 전달함수 행렬을 나타낸다. 안정한 진유리함수를 나타내는

RH^∞ 에 속하는 $H(s)$ 의 H^∞ 노름은 $\|H\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}(H(jw))$ 로 나타낸다.

본 논문에서는 식 (2)와 같은 시간지연 및 파라미터 불확실성 구조를 가지는 시스템에 피드포워드 제어기 K_1 과 출력례환 제어기 K_2 를 사용하여

$$u = K_1 r_1 + K_2 y \quad (5)$$

와 같은 구조를 가지는 제어시스템에 대해 페루프 시스템의 안정성과 모델추종 및 외란감쇠에 대한 건설성능 문제를 고려한다. 추적오차(e_1) 및 제어입력(e_2)을 제어출력 z 로 선택하고, 기준명령(r_1) 및 외란(w_1)을 외부 입력신호 w 로 선택하여

$$z = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

w 에서 z 로의 전달함수 Φ 를

$$\begin{bmatrix} W_{e1}(I - \bar{G}_{du}K_2)^{-1}\bar{G}_{dw}W_d & W_{e1}[(I - \bar{G}_{du}K_2)^{-1}\bar{G}_{du}K_1 - M_0]W_r \\ W_{e2}K_2(I - \bar{G}_{du}K_2)^{-1}\bar{G}_{dw}W_d & W_{e2}(I - K_2\bar{G}_{du})^{-1}K_1W_r \end{bmatrix} \quad (7)$$

로 나타낸다. 주파수영역에 관한 설계지식을 반영하기 위해 주파수 특성을 나타내는 하중함수를 포함시켰으며, 시간영역 설계사양을 반영하기 위해 추종모델 M_0 를 고려했다. 여기서 하중함수 W_r, W_d, W_{e1}, W_{e2} 는 RH^∞ 에 속한다. 본 논문에서는 식 (1)과 같은 n 차수의 안정가능하고 탐지가능한 플랜트가 주어졌을 때 설계조건 (i),(ii),(iii)을 만족하는 제어기 K 를 찾는 문제를 설정한다.

조건 (i) 식 (1)의 시스템에 대해 모든 Δ 에 대해서 페루프 시스템은 점근적으로 안정하다.

조건 (ii) 식 (1)의 시스템에 대해 식 (6)으로 주어지는 신호 w 에서 z 로의 페루프 전달함수 Φ_∞ 는 조건식

$$\|\Phi_\infty(s, \Delta)\|_\infty < 1 \quad (8)$$

을 만족한다.

조건 (iii) 공칭시스템에 대해 신호 w 에서 z 로의 페루프 전달함수 Φ_2 의 H^2 노름

$$\min \|\Phi_2(s, \Delta)\|_2 \quad (9)$$

을 만족한다.

3. 건설안정화

본 절에서는 식 (2)와 같은 시간지연 및 파라미터 불확실성 구조를 갖는 시스템에 대하여 출력례환 제어기 K_2 를 사용하여 페루프 시스템의 안정성 문제를 고려한다. 실유리 전달함수 P 의 선형분수변환은 다음과 같이 정의한다 낮은 선형분수변환(LLFT: lower linear fractional transformation)은

$$F_l \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (10)$$

으로 나타내고 높은 선형분수변환(ULFT: upper linear fractional transformation)은

$$F_u \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) = P_{22} + P_{21}K(I - P_{11}K)^{-1}P_{12} \quad (11)$$

로 표현한다.

보조정리 1: 식 (2)와 같은 불확실성 구조를 갖는 식 (4) 시스템의 전달함수 $\bar{G}_{du}, \bar{G}_{dw}$ 는

$$\bar{G}_{du} = F_u(G_{du}, \Delta) = F_u \left(\begin{bmatrix} G_{11} & G_{u1} \\ G_{21} & G_{u2} \end{bmatrix}, \Delta \right) \quad (12)$$

$$\bar{G}_{dw} = F_u(G_{dw}, \Delta) = F_u \left(\begin{bmatrix} G_{11} & G_{w1} \\ G_{21} & G_{w2} \end{bmatrix}, \Delta \right) \quad (13)$$

의 ULFT의 형태로 표현된다. 여기서 $T(s) = [(sI - A)^{-1}]$ 로 두면

$$G_{11} = \begin{bmatrix} E_{x1}T(s)H_x & E_{x1}T(s)H_d & 0 & 0 \\ E_{d1}T(s)H_x & E_{d1}T(s)H_d & 0 & 0 \\ E_{z2}T(s)H_x & E_{z2}T(s)H_d & 0 & 0 \\ E_{d4}T(s)H_x & E_{d4}T(s)H_d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$G_{u1} = \begin{bmatrix} E_{x1}T(s)B_{u1} + E_{u1} \\ E_{d1}T(s)B_{u1} + E_{d2} \\ E_{z2}T(s)B_{u1} + E_{z2} \\ E_{d4}T(s)B_{u1} + E_{d5} \end{bmatrix}, \quad G_{w1} = \begin{bmatrix} E_{x1}T(s)B_{w1} + E_{w1} \\ E_{d1}T(s)B_{w1} + E_{d3} \\ E_{z2}T(s)B_{w1} + E_{z2} \\ E_{d4}T(s)B_{w1} + E_{d5} \end{bmatrix},$$

$$G_{u2} = [C_1T(s)B_{w1} + D_{w1}], \quad G_{u2} = [C_1T(s)B_{u1} + D_{u1}],$$

$$G_{21} = [C_1T(s)H_x \quad C_1T(s)H_d \quad H_{y1} \quad H_{y2}],$$

이다.

(증명)

$$\bar{G}_{du} = (D_{u1} + H_{y1}\Delta_3E_{z2} + H_{y2}\Delta_4E_{d5}) + [C_1 + H_{y1}\Delta_3E_{z2} + H_{y2}\Delta_4E_{d5}](sI - A_1 - H_x\Delta_1E_{x1} - H_d\Delta_2E_{d1})^{-1} \times (B_{u1} + H_x\Delta_1E_{u1} + H_d\Delta_2E_{d2})$$

이다. 여기서

$$(sI - A_1 - H_x\Delta_1E_{x1} - H_d\Delta_2E_{d1})^{-1}(B_{u1} + H_x\Delta_1E_{u1} + H_d\Delta_2E_{d2})$$

$$= (sI - A_1 - [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{d1} \end{bmatrix})^{-1}$$

$$\times (B_{u1} + [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d2} \end{bmatrix})$$

$$= (sI - A)^{-1} [I + (I - [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{d1} \end{bmatrix}) (sI - A)^{-1}]^{-1}$$

$$\times [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d2} \end{bmatrix}$$

$$\times (sI - A)^{-1} (B_{u1} + [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d2} \end{bmatrix})$$

$$= (sI - A)^{-1} B_w + (sI - A)^{-1} [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} [I - \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{d1} \end{bmatrix}]$$

$$\times (sI - A)^{-1} [H_x \quad H_d] \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{d1} \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} B_{u1} + \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d2} \end{bmatrix}]$$

이고, G_u, G_a, G_c, G_b 를

$$G_u = (sI - A)^{-1} B_{u1}, \quad G_a = (sI - A)^{-1} [H_x \quad H_d]$$

$$G_c = \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d1} \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [H_x \quad H_d]$$

$$G_b = \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d1} \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} B_{u1} + \begin{bmatrix} E_{u1} \\ E_{d2} \end{bmatrix}$$

로 정의하면

$$\bar{G}_{du} = [C_1 + H_{y1}\Delta_3E_{z2} + H_{y2}\Delta_4E_{d5}] [G_u + G_a\Delta_{12} \times (I - G_c\Delta_{12})^{-1}G_b] + [D_{u1} + H_{y1}\Delta_3E_{z2} + H_{y2}\Delta_4E_{d5}]$$

$$= [C_1G_u + D_{u1}] + [C_1G_a \quad H_{y1} \quad H_{y2}] \begin{bmatrix} \Delta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_4 \end{bmatrix}$$

$$\times \left(I - \begin{bmatrix} G_c & 0 & 0 \\ E_{z2}G_a & 0 & 0 \\ E_{d1}G_a & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G_b \\ E_{z2}G_u + E_{u2} \\ E_{d1}G_u + E_{d2} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 정의된 G_u, G_a, G_c, G_b 를 대입하면

$$\bar{G}_{du} = F_u \left(\begin{bmatrix} G_{11} & G_{u1} \\ G_{21} & G_{u2} \end{bmatrix}, \Delta \right) \text{ 임을 알 수 있다. 같은 방법으로}$$

$$\bar{G}_{du} = F_u \left(\begin{bmatrix} G_{11} & G_{u1} \\ G_{21} & G_{u2} \end{bmatrix}, \Delta \right) \text{ 임을 알 수 있다.} \quad \blacksquare$$

불확실성 시스템 \bar{G}_{du} 와 공칭플랜트 G_{du} 는 같은 수의 우반평면 극점을 가진다고 가정할 경우 보조정리 1의 결과에 출력제한 제어를 포함하는 페루프를 고려하면 $\|\Delta\|_\infty < 1$ 을 만족하는 모든 Δ 에 대해 식 (1)의 시스템이 안정하기 위한 필요충분조건은 제어기 K_2 가 공칭플랜트를 안정화시키면서

$$\|F_l(G_{du}, K_2)\|_\infty < 1 \quad (15)$$

을 만족하는 것이다.

4. H^2/H^∞ 성능

본 절에서는 식 (2)와 같은 시간지연 및 파라미터 불확실성 구조를 가지는 시스템에 피드포워드 제어기 K_1 과 출력제한 제어기 K_2 를 사용하여 $u = K_1 r_1 + K_2 y$ 와 같은 구조를 가지는 제어시스템에 대해 페루프 시스템의 모델추종 및 외란감쇠에 대한 건실성능 문제를 고려한다.

4.1 H^∞ 건실성능

보조정리 1의 결과로부터 식 (7)의 전달함수 Φ 를 선형분수 변환 형태로 나타내면

$$\Phi = F_l \left(\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \tilde{P}_{23} \\ \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} & \tilde{P}_{33} \end{bmatrix}, \Delta \right) \quad (16)$$

로 표현된다. 여기서

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11} &= G_{11} + G_{u1}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \\ \tilde{P}_{12} &= G_{u1}(I - K_2G_{u2})^{-1}K_1W_r \\ \tilde{P}_{13} &= [G_{w1} + G_{u1}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}]W_d \\ \tilde{P}_{21} &= W_{e1}(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \\ \tilde{P}_{22} &= W_{e1}[(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}K_1 - M_0]W_r \\ \tilde{P}_{23} &= W_{e1}(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}W_d \\ \tilde{P}_{31} &= W_{e2}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \\ \tilde{P}_{32} &= W_{e2}(I - K_2G_{u2})^{-1}K_1W_r \\ \tilde{P}_{33} &= W_{e2}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}W_d \end{aligned} \quad (17)$$

이다. 식 (16)으로부터 $\tilde{P}_{11} = F_l(G_{du}, K_2)$ 이므로 $\|\tilde{P}\|_\infty < 1$ 을 만족하면 건실안정성 조건 식 (15)도 만족됨을 알 수 있다.

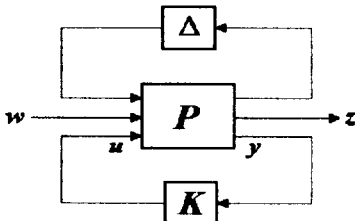


그림 1. 일반화된 플랜트 구조
Fig. 1. Generalized plant configuration.

식 (16)의 \tilde{P} 를 K 에 대한 그림 1의 선형분수변환 형태로 나

타내면 일반화된 플랜트 P 는

$$P = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{w1}W_d & 0 & G_{u1} \\ W_{e1}G_{21} & W_{e1}G_{u2}W_d & W_{e1}M_0W_r & W_{e1}G_{u2} \\ 0 & 0 & 0 & W_{e2} \\ 0 & 0 & W_r & 0 \\ G_{21} & G_{u2}W_d & 0 & G_{u2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

이며 H^∞ 건실성능문제에 대한 제어기 설계문제는

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < 1 \quad (19)$$

을 만족하는 것이다.

4.2 H^2 성능

시간지연 불확실성 및 파라미터 불확실성이 없는 공칭시스템에 대하여 피드포워드 제어기 K_1 과 출력제한 제어기 K_2 를 사용하여 $u = K_1 r_1 + K_2 y$ 와 같은 구조를 가지는 제어시스템에 대해 페루프 시스템의 안정성과 모델추종 및 외란감쇠에 대한 성능 문제를 고려한다. 불확실성이 없는 시스템에 대한 w 에서 z 로의 전달함수 Φ 는

$$\begin{bmatrix} W_{e1}(I - \bar{G}_u K_2)^{-1} \bar{G}_u W_d & W_{e1}[(I - \bar{G}_u K_2)^{-1} \bar{G}_u K_1 - M_0]W_r \\ W_{e2}K_2(I - \bar{G}_u K_2)^{-1} \bar{G}_u W_d & W_{e2}(I - K_2 \bar{G}_u)^{-1} K_1 W_r \end{bmatrix} \quad (20)$$

로 표현된다. 여기서

$$\begin{aligned} \bar{G}_u &= C_1(sI - A_1)^{-1}B_{u1} + D_{u1} \\ \bar{G}_w &= C_1(sI - A_1)^{-1}B_{w1} + D_{w1} \end{aligned}$$

이다. Φ 를 제어기 K 에 대한 선형분수변환 형태로 나타내면 일반화된 플랜트 P 는

$$P = \begin{bmatrix} W_{e1}G_wW_d & W_{e1}M_0W_r & W_{e1}G_u \\ 0 & 0 & W_{e2} \\ 0 & W_r & 0 \\ G_wW_d & 0 & G_u \end{bmatrix} \quad (21)$$

이며 제어기 설계문제는

$$\min_K \|F_l(P, K)\|_2 \quad (22)$$

이다.

4.3 혼합 H^2/H^∞ 성능

하중함수 W_i 및 추종모델 M_0 의 상태공간 표현식을

$$\begin{aligned} W_r &= \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix}, & W_d &= \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix}, \\ W_{e2} &= \begin{bmatrix} A_{e2} & B_{e2} \\ C_{e2} & D_{e2} \end{bmatrix}, & M_0 &= \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

로 나타낸다. H^∞ 건실성능을 나타내는 조건식과에서 일반화된 플랜트 P 를 상태공간으로 나타내면 상태공간표현은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_{\infty 1} w + B_2 u \\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty 1} u + D_{\infty 2} w \\ y &= C_y x + D_{y1} w \end{aligned} \quad (24)$$

이며 H^2 성능을 나타내는 조건식에서 일반화된 플랜트 P 는

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_{21} w + B_2 u \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} u \\ y &= C_y x + D_{y1} w \end{aligned} \quad (25)$$

로 표현된다. 여기서

$$A = \begin{bmatrix} A & B_{w1}C_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_m & B_m C_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{e2} \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} B_{w1}D_d & 0 \\ B_d & 0 \\ 0 & B_m D_r \\ 0 & B_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{\infty 1} = \begin{bmatrix} H_x & H_d & 0 & 0 & B_{w1}D_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_m D_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{\infty} = \begin{bmatrix} E_{x1} & E_{w1}C_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{d1} & E_{d3}C_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{z2} & E_{z2}C_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{d4} & E_{d5}C_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho C_1 & \rho D_{w1}C_d & \rho C_m & \rho D_m C_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{z2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_r & 0 \\ C_1 & D_{w1}C_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{y1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_r \\ 0 & 0 & H_{y1} & H_{y2} & D_{w1}D_d & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & E_{w1}D_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{d3}D_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{z2}D_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{d5}D_d & 0 \\ 0 & 0 & \rho H_{y1} & \rho H_{y2} & \rho D_{w1}D_d & \rho D_m D_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{\infty 2} = [E_{u1} \ E_{d2} \ E_{z2} \ E_{d5} \ \rho D_{u1} \ D_{d2}]$$

$$B_2^T = [B_{u1} \ 0 \ 0 \ 0 \ B_{d2}]$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \rho C_1 & \rho D_{w1}C_d & \rho C_m & \rho D_m C_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{z2} \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} \rho D_{w1}D_d & \rho D_m D_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{22} = [\rho D_{u1} \ D_{d2}]$$

이다.

정리 1

식 (2)와 같은 불확실성 구조를 갖는 식 (1) 시스템에 대해 조건 (i),(ii),(iii)을 만족하기 위한 충분조건은 보조시스템

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + [B_{\infty 1} \ B_{21}] w + B_2 u \\ z_{\infty} &= C_{\infty} x + D_{\infty 1} u + D_{\infty 2} w \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y &= C_y x + D_{y1} w \end{aligned} \quad (27)$$

에 대해 $u = Ky$ 의 폐환시스템으로 구성되는 w 에서 z_{∞} 로의 전달함수 T_{∞} 와 z_2 로의 전달함수 T_2 가

$$\begin{aligned} \|T_{\infty}\|_{\infty} &< 1 \\ \min \|T_2\|_2 & \end{aligned} \quad (28)$$

을 만족하는 것이다.
(증명) 생략

정리 1를 만족하는 제어기 설계과정은 표준 H^2/H^{∞} 을 이용하여 구할 수 있다.

5. 예제

입력부와 측정출력부에 200ms 정도의 시간지연을 가지면서 파라미터 불확실성을 갖는 수중운동체를 고려한다. Pade 근사화를 이용하여 시간지연항 e^{-sT_d} 을

$$P_1(s) = \frac{2 - T_d s}{2 + T_d s} \quad (29)$$

으로 근사화한다. 시간지연을 가지는 시스템

$$G_T(s) \cong P_1(s)G(s) \quad (30)$$

에 시간지연 불확실성 및 파라미터 불확실성을 포함한 모델링 식은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A_1]x + [B_{u1} + \Delta B_{u1}]u + B_{d2}u(t-d_2) + B_{w1}w_1 \\ y &= [C_1 + \Delta C_1]x + C_2x(t-d_4) \end{aligned} \quad (31)$$

로 표현되며 입출력 변수 및 각 행렬은

$$y = [p \ r \ \phi \ \phi], \quad u = [\delta_r \ \delta_p]$$

$$A = \begin{bmatrix} -7.4490 & -0.2039 & -9.3600 & 2.1050 & 0 & -765.4 & 40.54 \\ -7.5140 & -11.300 & 20.910 & -8.4110 & 0 & -772.2 & -2806 \\ -4.3800 & -0.4370 & -18.160 & 1.1390 & 0 & 1780 & 22.46 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 34.443 & -1.8243 \\ 34.749 & 126.27 \\ -80.10 & -1.017 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B_{w1} = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

이다. 여기서 p, r 은 각속도 $\phi, \dot{\phi}$ 는 오일러각(요오,롤)을 나타낸다. 설계사양으로는 요오명령시 요오응답은 상승시간이 5초 이내이며 롤은 5도 이내로 유지하는 것이다. 시간지연은 제어입력 변수와 출력변수에 모두 존재하며, 계수 불확실성은 횡동요 계수값으로 식 (32)의 A 행렬 2행 4열과 B 행렬 2행 2열이다. 따라서 시간지연 및 불확실성은

$$\begin{aligned} [\Delta A_1 \ \Delta B_{u1}] &= H_x \Delta_1 [E_{x1} \ E_{u1}] \\ [B_{d2} e^{-s d_2}] &= H_d \Delta_2 [E_{d2}] \\ [\Delta C_1] &= H_{y1} \Delta_3 E_{z2} \\ C_2 e^{-s d_4} &= H_{y2} \Delta_4 E_{d4} \end{aligned} \quad (33)$$

의 구조로 표시되며, 각각의 행렬구조 및 크기는

$$\begin{aligned} H_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ E_{x1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1.1 & 2.0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{u1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 3.8 & 14 \end{bmatrix}, \\ H_d &= \begin{bmatrix} -1.8135 & -1.861 & 4.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1127 & -7.030 & 0.063 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ E_{d2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ H_{y1} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T, \\ E_{z2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_{y2} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}^T, \\ E_{d4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

의 값을 갖는다.

5.1 제어기 설계

식 (7)의 하중함수 W 및 추종모델 M_0 는

$$\begin{aligned} W_r &= \text{Diag} [0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ 1.2], & W_d &= 0.6, \\ M_0 &= \text{Diag} \left[\frac{1}{s+1} \ \frac{1}{s+1} \ \frac{1}{s+1} \ \frac{1.35}{s+1} \right], & (35) \\ W_{e1} &= \text{Diag} [0.2 \ 0.2 \ 0.7 \ 1.8], \end{aligned}$$

$$W_2 = \text{Diag}[0.5 \ 0.5]$$

로 두었다. 정리 1의 혼합 H^2/H^∞ 방법을 이용하여 구한 준최적화 값은 표 1과 같다.

표. 1 제어기에 대한 성능여유
Table. 1 Performance margin for controller.

| 제어기 | 성능여유 |
|----------------|-------------------------------------|
| H_2 | $\gamma_2 = 1.64$ |
| H_∞ | $\gamma_\infty = 0.885$ |
| H_2/H_∞ | $\gamma_2 = 2.2, \gamma_\infty < 1$ |

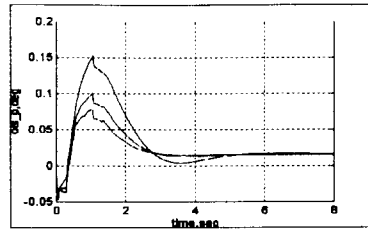


그림 5. 롤 제어입력 시간응답
Fig. 5. Time response of roll control input.

6. 결론

5.2 컴퓨터 시뮬레이션

컴퓨터 시뮬레이션을 위해 제어입력의 시간지연은 0.2초, 측정출력의 지연시간은 0.05초로 두었으며 샘플링 시간은 0.01초로 정하였다. 공칭플랜트(비행조건 1)뿐만 아니라, +50%의 횡동요 계수 불확실성을 가지는 모델(비행조건 2)과 -50%의 횡동요 계수 불확실성을 가지는 모델(비행조건 3)에 대해서 시뮬레이션을 각각 수행하였다. 외란으로 구형파 외란을 인가하였으며 초기에 10 deg/sec 크기로 1초동안 존재하는 것으로 시뮬레이션하였다. 각각의 비행조건에 대한 침로 단위계단 입력을 인가할 경우 응답은 그림 4.9~4.12와 같다. 시뮬레이션 결과에서 보는 바와 같이 공칭시스템뿐만 아니라 파라미터 불확실성을 갖는 시스템에 대해서도 외란제거와 명령추종 성능이 우수함을 알 수 있다.

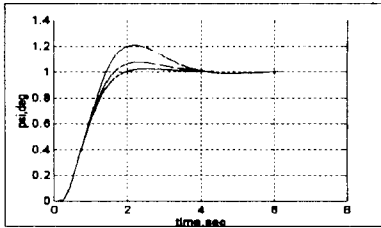


그림 2. 요오제어기 시간응답
Fig. 2. Time response of yaw controller.

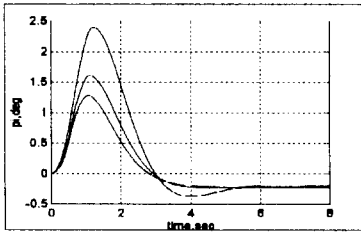


그림 3. 롤제어기 시간응답
Fig. 3. Time response of roll controller.

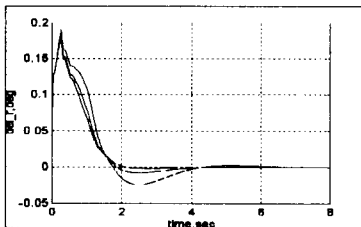


그림 4. 방향타 제어입력 시간응답
Fig. 4. Time response of rudder control input.

본 논문에서는 입력력 및 상태변수에 시간지연이 존재하고 상태공간모델에서 모든 시스템행렬에 정합조건을 만족하는 적절한 구조의 파라미터 불확실성이 존재할 경우 선형분수변환 접근법을 이용한 견실안정성과 모델추종 및 외란감쇠에 대해 견실 H^∞ 성능과 H^2 성능을 보장하는 조건식을 유도하였다. 시간지연 및 불확실성을 포함하는 견실성능을 나타내는 전달함수 행렬을 선형분수변환 형태로 바꾸어 시간지연과 불확실성을 포함하지 않는 일반화된 플랜트를 유도하여 H^2/H^∞ 제어기를 설계하였다. 또한 시간지연 및 파라미터 불확실성을 갖는 수중운동체에 대해 견실성능을 보장하는 H^2/H^∞ 제어기를 설계하고, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 페루프 시스템이 만족할만한 성능을 가짐을 보였다.

참고문헌

- [1] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae stabilizing controllers that satisfy an H^∞ -norm bound and relations to risk sensitivity," *System & Control Letters*, vol. 1, pp. 167-172, 1988.
- [2] P. Gahinet, and P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to H^∞ control," *SInt. J. Robust and Nonlinear Contr.*, pp. 421-448, 1994.
- [3] Bernstein, D. S. and W. M. Haddad, "LQG control with an H^∞ performance bound: A Riccati equation approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 3, pp. 293-305, May 1989.
- [4] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed H^2/H^∞ control: A convex optimization approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, pp. 824-837, May 1991.
- [5] E. Nobuyama, "Robust stabilization of time-delay systems via reduction to delay-free model matching problems," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 357-358, Dec. 1992.
- [6] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H^∞ Controller design method for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 13, no. 6, pp. 917-919, 1995.
- [7] M. S. Mahmoud and N. F. Al-Muthairi, "Design of robust controllers for time-delay systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, no. 5, pp. 995-999, May 1994.
- [8] L. Xie, and C. E. de Souza, "Robust H^∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 8, pp. 1188-1191, 1992.