

2차의 리아프노프 함수에 의한 유연 조인트 로봇의 비선형 건설제어기 설계

Nonlinear Robust Control Design with Quadratic Lyapunov Function for Robots with Joint Elasticity

°김 동환*, 이 교일**

* 서울대학교 공학연구소 (Tel:880-7143; Fax:883-1513; E-mail:donghkim@plaza.snu.ac.kr)

** 서울대학교 기계설계학과 (Tel:880-7135; Fax:883-1513; E-mail:lki@alliant.snu.ac.kr)

Abstract: We propose robust control scheme for flexible joint manipulator in the presence of nonlinearity and *mismatched* uncertainty. The control is designed based on Lyapunov approach. The robust control which is based on the computed torque scheme and state transformation via *implanted* control is introduced. The design procedure starts with the construction of linearized subsystems via the computed torque method and then uses state transformation. With this approach we do not impose an upper-bound constraint on the inertia matrix in case it is known. Thus, this control can be applied to arbitrary manipulators. The resulting robust control guarantees practical stability for both the transformed system and the original system. The transformation is only based on the possible bound of uncertainty.

Keywords : Robust control, Lyapunov approach, Flexible joint manipulators, Practical stability

1 서론

비선형성과 불확실변수를 가지는 유연조인트 로봇에 적용할 수 있는 제어기를 설계한다. 비선형 시스템에서는 우수한 제어성능을 가지기 위하여 피이드백 보상이 필요하다. 유연조인트의 영향이 강성 조인트 로봇보다 크다는 사실은 실험적으로 밝혀졌다 [29]. 그리하여 유연조인트 로봇에 대한 연구가 진행되어왔다. 이러한 연구내용은 Spong [26]에 의해 잘 정리되어있다. 정확한 모델에 기초한 방법, 적응제어방법, 슬라이딩제어 그리고 건설제어방법등이 발표되었다. 정확한 모델기초방법은 극점천이법(singular perturbation) [10], 피이드백선형화방법 [2][25], 그리고 불변 매니폴드법 (invariant manifold scheme) [18]등이다. 이 방안들은 로봇의 정확한 변수를 필요하므로 불확실변수가있는 시스템에서는 적용에 한계가있다. 적응제어방법은 시스템내에 존재하는 불확실변수를 극복할 수 있다. 극점천이법 및 선형변위화 (linear parameterization)를 이용한 적응제어도 발표되었다 [11][6][1]. 그러나 적응제어기는 변수가 추정되는동안 과도한 과도상태가 문제가될 수 있으며 시불변 또는 완속시스템으로 제한된다. 본 연구는 리아프노프 방법에 의한 건설제어방법에 근간을 둔다. 이 방법은 비선형 시변시스템에 적용되는 수학적 증명이 가능한 유일한 방법이다. 유연조인트 시스템에 적용한 건설제어방법이 소개되었다 [21][30]. 그러나 이방법은 가속도및 가가속도의 정보를 필요로한다. Qu가 제안한 방안 [20]은 국부적 안정성을 보장하는 제어기이다. 건설제어기를 설계하기위하여 적분매니폴드 (integral manifold)방법이 소개되었으나 [12][13] 이는 조인트 강성이 충분히 커야한다는 가정이 요구된다. 적응건설제어기가 유연조인트 로봇에 적용되었다 [9]. 그러나 이 방안은 변환된 시스템에대해서만 안정성이 증명되었고 원래의 시스템에 대한 안정성은 판별되지 못했다. 건설제어이론에서는 불확실변수에 대한 구조적조건 즉 일치성 조건 (matching condition)[7]에 기반을 둔 여러 기법이 소개되었다 [19]. 그러나 유연조인트 로봇과같은 시스템 - 모든 모드에 입력이 없는-에서는 적용될 수 없다. 따라서 많은 연구가 일치성이없는 시스템에 적용될 수 있는 건설제어에 관하여 진행되었다.

본 연구에서는 상태변수변환법을 이용한 삽입제어기 (implanted

control)를 이용하여[14] 비선형성이 강하고 불확실성을 가지는 유연 조인트 로봇에 건설제어기를 설계하고자한다. Kim과 Chen [14]이 제안한 방안에서는 관성행렬이 절대양 (positive definite)이고 상위 한경(upper-boundedness)되어야 하는 가정이 필요하다. 일반적으로 레볼류트조인트 로봇에서는 위의 가정은 성립되지만 프리즈매틱 로봇에서는 가정이 성립하지않는다. 이 한계를 극복하기위하여 2차의 리아프노프함수를 이용하여 제어기를 설계하는 방안이 효과적일것이다. 2차의 리아프노프함수를 가지기위하여 연산토크법(computed torque method) 또는 피이드백 선형화방법이 가능하다. 연산토크법이 비선형시스템에서는 다른 선형기법에의한 방법보다는 우수하나 변수의 정확함값이 필요하므로 건설성의 문제가 대두된다. 피이드백 선형화법은 비선형시스템을 선형시스템으로 변환시켜 선형시스템에서 적절한 제어기를 설계한다. 이 방법은 상태변수 가승법 (state factorization) [27], 리아프노프방법[3]등이 포함된다. 그러나 이방법은 시불변 시스템에만 적용 가능하다.

본 연구는 연산 토크법에 의한 건설제어기 설계를 소개한다. 이 방안으로 실용적 안정성이 보장되며 시변 시스템에 효과적으로 적용된다. 만약 관성행렬이 알려진값이면 관성행렬이 양한정되어야하는 일반적인 가정을 극복할 수 있으므로 일반적 형태의 로봇에도 적용될 수 있다. 본 제어 알고리즘을 토대로 2개의 링크를 가지는 유연조인트 로봇에 적용하여 제어성능을 고찰하고자한다.

2 유연조인트로봇

n 개의 링크를 가지는 로봇을 대상으로하며 링크는 강성체이고 조인트는 유연한 로봇을 고려한다. 모든 조인트는 DC 전기모터로 구동되며 레볼류트나 프리즈매틱의 기하학적 형태를 가진다. 유연조인트 로봇에서 위치벡터를 다음과같이 표시한다. $q_1 = [q^2 \ q^4 \ \dots \ q^{2n-2} \ q^{2n}]^T$ 그리고 $q_2 = [q^1 \ q^3 \ \dots \ q^{2n-3} \ q^{2n-1}]^T$, 여기서 $q^2, q^4 \dots$ 는 링크각도이며 $q^1, q^3 \dots$ 는 조인트 각도이다. 그리고

$$q = [q_1 \ q_2]^T, \quad (1)$$

는 $2n$ 차의 일반좌표이다. 유연조인트로봇의 운동방정식은 다음의 형태를 취한다 [25].

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} D(q_1) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K(q_1 - q_2) \\ -K(q_1 - q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $D(q_1)$ 는 링크의 관성행렬이고 $C(q_1, \dot{q}_1)$ 는 코리올리스힘과 중력이고 K 는 조인트강성행렬이며 $J(q_2)$ 는 구동기의 관성행렬이다.

3 불확실시스템과 실용적안정성

다음과같은 불확실한 동적시스템을 고려하자.

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), \sigma(t), t) + B(\xi(t), \sigma(t), t)u(t), \quad (3)$$

여기서 $t \in R$ 는 시간이며 $\xi(t) \in R^n$ 는 상태변수이고 $u(t) \in R^m$ 는 제어입력이고 $\sigma(t) \in R^o$ 는 불확실변수이다. 또한 $f(\xi(t), \sigma(t), t)$ 는 시스템벡터이며 $B(\xi(t), \sigma(t), t)$ 는 입력행렬이다. 이 논문에서 사용되는 노름은 유클리디언이다.

Definition 피이드백제어기 $u(t) = p(\xi(t), t)$ 는 다음의 4가지 성질을 만족시키면 동적시스템(3)을 실용적안정화(practical stabilizable)시킨다. 상세한 내용은 참고문헌을 참조할수있다 [7].

- i) 해의 존재와 연속성
- ii) 유일한계성 (Uniform boundedness)
- iii) 유일 궁극적한계 (Uniform ultimate boundedness)
- iv) 유일안정성 (Uniform stability)

4 시스템 서술

일반적으로 로봇제어에서는 링크관성행렬이 일정양한정(uniformly positive boundedness)이라는 가정하에 제어알고리즘이 구성된다 [?] [14]. 그러나 로봇시스템이 일부는 레플루트형태이고 일부는 프리즈매틱 형태일경우 링크의 관성행렬은 일정양한정의 조건을 충족시키지 못한다. 이는 관성행렬을 이용한 리아프노프함수는 일정한계(uniform boundness)를 만족하지않으므로 합법적인 리아프노프함수가 될수없다. 따라서 리아프노프함수에 의한 제어시스템의 안정성해석은 어렵게된다. 따라서 본 연구에서는 관성행렬에 의존하지않는 2차식의 리아프노프함수를 정의하여 안정성 해석을 하고자한다. 우선 이 절에서는 시스템을 기지의 부분과 미지의 부분으로 나누어 행렬형태로 표시한다.

$$D(q_1)\ddot{q}_1 + N(q_1, \dot{q}_1) + G(q_1) + Kq_1 = Kq_2, \quad (4)$$

$$J\ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) = u. \quad (5)$$

여기서 $X_1 = q_1$, $X_2 = \dot{q}_1$, $X_3 = q_2$ 그리고 $X_4 = \dot{q}_2$ 로 설정하고 $x_1 = [X_1^T X_2^T]^T$, $x_2 = [X_3^T X_4^T]^T$, 그리고 $x = [x_1^T x_2^T]^T$ 로 한다. 식(4)의 첫부분을 위에서 정의된 상태변수를 사용하여 재기술하면

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= \dot{q}_1 = -D^{-1}(q_1)N(q_1, \dot{q}_1) - D^{-1}(q_1)G(q_1) \\ &\quad - D^{-1}(q_1)Kq_1 + D^{-1}(q_1)Kq_2 \\ &= -L_{11}q_1 - L_{21}\dot{q}_1 + L_{11}q_1 + L_{21}\dot{q}_1 - D^{-1}(q_1)N(q_1, \dot{q}_1) \\ &\quad - D^{-1}(q_1)G(q_1) - D^{-1}(q_1)Kq_1 + D^{-1}(q_1)Kq_2, \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 L_{11} , $L_{21} \in R^{n \times n}$ 이다. 지금부터 각 변수에 사용되는 "over-bar"는 변수의 알려진값을 표시하며 Δ 는 불확실부분을 표시한다. 식(6)을 행렬형태로 표시하면

$$\begin{aligned} N_1 : \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + f_{1x}(x_1(t), \sigma_1(t)) + B_1(x_1(t), \sigma_1(t))q_2(t) \\ &= A_1 x_1(t) + f_{1x}(x_1(t), \sigma_1(t)) \end{aligned}$$

$$+ \bar{B}_1(x_1(t))q_2(t) + \Delta B_1(x_1(t), \sigma_1(t))q_2(t), \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_1 &:= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L_{11} & -L_{21} \end{bmatrix}, \\ f_{1x}(x_1, \sigma_1) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ f_{21x}(x_1, \sigma_1) \end{bmatrix}, \\ f_{21x}(x_1, \sigma_1) &= L_{11}q_1 + L_{21}\dot{q}_1 - D^{-1}(q_1, \sigma_1)N(q_1, \dot{q}_1, \sigma_1) \\ &\quad - D^{-1}(q_1, \sigma_1)G(q_1, \sigma_1) - D^{-1}(q_1, \sigma_1)K(q_1, \sigma_1), \\ \bar{B}_1(x_1) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ [D^{-1}(q_1)K]_n \end{bmatrix}, \\ \Delta B_1(x_1, \sigma_1) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(D^{-1}(q_1, \sigma_1)K(\sigma_1)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

그리고 $\sigma_1(t)$ 는 부분시스템 N_1 에서 불확실변수이고 $[D^{-1}K]_n$ 는 해당 행렬의 알려진부분을 나타낸다. (5)에서 둘째항은 다음과같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= X_4, \\ \dot{X}_4 &= \dot{q}_2 = -J^{-1}Kq_2 + J^{-1}Kq_1 + J^{-1}u \\ &= -L_{12}q_2 - L_{22}\dot{q}_2 + L_{12}q_2 + L_{22}\dot{q}_2 \\ &\quad - J^{-1}Kq_2 + J^{-1}Kq_1 + J^{-1}u, \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 L_{12} , $L_{22} \in R^{n \times n}$ 이다. 상기식은 행렬형태로 다음과같이 기술된다.

$$\begin{aligned} N_2 : \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + f_{2x}(x_2(t), \sigma_2(t)) \\ &\quad + B_2(\sigma_2(t))u(t) \\ &= A_2 x_2(t) + f_{2x}(x_2(t), \sigma_2(t)) \\ &\quad + \bar{B}_2 u(t) + \Delta B_2(\sigma_2(t))u(t), \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L_{12} & -L_{22} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f_{2x}(x_2, \sigma_2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ L_{12}q_2 + L_{22}\dot{q}_2 - J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)q_2 \\ \quad + J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)q_1 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta B_2(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(J^{-1}(\sigma_2)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 $\sigma_2(t)$ 는 부분시스템에서의 불확실벡터를 나타낸다.

가정 1. 각각의 부분시스템에서 함수 $\sigma_1(\cdot) : R \rightarrow \Sigma_1 \subset R^{o_1}$, $\sigma_2(\cdot) : R \rightarrow \Sigma_2 \subset R^{o_2}$ Lebesgue 측정가능 (measurable) Σ_1, Σ_2 는 규정되어 있고 충만한 (prescribed and compact) 집합이다.

5 제어기 설계

식 (7)을 다음과같이 기술할수있다.

$$\begin{aligned} N_1 : \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + f_{1x}(x_1, \sigma_1) + \bar{B}_1(x_1)q_2 + \Delta B_1(x_1, \sigma_1)q_2 \\ &= A_1 x_1 + f_{1x}(x_1, \sigma_1) + \left(\bar{B}_1(x_1) + \Delta B_1(x_1, \sigma_1) \right) u_1 \\ &\quad + \left(\bar{B}_1(x_1) + \Delta B_1(x_1, \sigma_1) \right) (q_2 - u_1). \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 삽입제어기 (implanted control) u_1 을 도입한다. 이는 부분시스템 N_1 의 동적시스템을 변화 변화시키지않는다. 식 (13)의 우편에 있는 $q_2(t) - u_1(t)$ 는 다른 상태변수를 도입하여 다음과같이 표현한다. $z_1 = [Z_1^T Z_2^T]^T$, $z_2 = [Z_3^T Z_4^T]^T$, 그리고 $z = [z_1^T z_2^T]^T$ 로 지정하고

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1, \\ Z_2 &= X_2, \end{aligned}$$

6 원시스템의 성능해석

변환된 시스템의 안정성을 기초로하여 원시스템의 안정성 역시 해석이 필요하다. z 가 상수 δ 로 한계된다고 가정하자.

$$\|z\| \leq \delta. \quad (39)$$

그러면

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 \\ &\leq \delta^2. \end{aligned} \quad (40)$$

이것은 (14)에 의해 다음조건을 암시한다.

$$\|x_1\| \leq \delta, \|x_2 - [u_1 \dot{u}_1]^T\| \leq \delta. \quad (41)$$

그러므로 x 는 한계된다 (상세한 내용은 생략함).

$$\begin{aligned} \|x\| &= (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\delta^2 + (\theta_8\delta + \theta_9(\delta) + \theta_5)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \omega(\delta). \end{aligned} \quad (42)$$

다음으로 $z(t)$ 의 성능에 의해 $x(t)$ 의 일정관계성을 규명한다. δ 가 $d_z(r_z)$ 로 대치함으로써 (42)은 다음과같이 기술된다.

$$\|x(t)\| \leq \omega(d_z(r_z)). \quad (43)$$

주어진 $r_z > 0$ 에 대해 $\|z_0\| \leq r_z$ 함에 따라 $r_x = d_x^{-1}(\omega(\delta))$ 이 $\|x_0\| \leq r_x$ 로부터 주어진다.

$$d_x(r_x) = \begin{cases} R_x \sqrt{\frac{22}{\gamma_1}} & \text{if } r_x \leq R_x \\ r_x \sqrt{\frac{22}{\gamma_1}} & \text{if } r_x > R_x, \end{cases} \quad (44)$$

여기서 $R_x = \omega(R_z)$. 식(44)에 의해 $\|z(t)\| \leq d_z(r_z)$ 는 $\|x(t)\| \leq d_x(r_x)$ 을 의미한다. $\bar{d}_x = R_x \sqrt{\frac{22}{\gamma_1}}$ 로 정하자. 일정강극적인계는 $\bar{d}_x > d_x$ 에 따라 다음으로 기술된다

$$T_x(\bar{d}_x, r_x) = \begin{cases} 0 & \text{if } r_x \leq \bar{d}_x \sqrt{\frac{22}{\gamma_1}} \\ \frac{\gamma_2 r_x^2 - \gamma_1^2 \gamma_2^{-1} \bar{d}_x^2}{\gamma_1 \gamma_2^{-1} \gamma_3 \bar{d}_x^2 - \bar{d}_x^2} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (45)$$

일정한계성에 대해서는 $\delta_x(\bar{d}_x) = R_x$ 로 지정하면 $\|x_0\| \leq \delta(\bar{d}_x)$ 는 $\|x(t)\| \leq \bar{d}_x$ 를 의미한다.

이론 3. 가정 1-4이 만족되면 식 (36)에서 주어진 제어기 u 는 원시스템을 실용적 안정화 시킨다.

증명. 실용적 안정성은 위에서 기술되었다. Q.E.D.

7 실예제 시뮬레이션

2개의 링크를 가지는 레볼류트형태의 유연조인트 로봇을 대상으로 한다. 링크 각도를 $q_1 = [q^2 \ q^4]^T$ 그리고 조인트 각도를 $q_2 = [q^1 \ q^3]^T$ 로 한다. 그러면 $D(q_1), C(q_1, \dot{q}_1), G(q_1), J, K$, 각 행렬 및 벡터는 정확히 알려져 있지 않다.

제어목표는 링크들이 위로 곧바로 설수있게 하고자한다. 제어기의 형태는 다음과같이 기술된다. 우선 삽입제어기를 구성한다.

$$\begin{aligned} u_1 &= [u_{11} \ u_{12}]^T, \\ u_{11} &= \begin{cases} -\frac{\mu_{11}}{\|\mu_{11}\|} \rho_1, & \text{if } \|\mu_{11}\| > \epsilon_1 \\ -\sin\left(\frac{\pi \mu_{11}}{2\epsilon_1}\right) \rho_1, & \text{if } \|\mu_{11}\| \leq \epsilon_1 \end{cases}, \\ u_{12} &= \begin{cases} -\frac{\mu_{12}}{\|\mu_{12}\|} \rho_1, & \text{if } \|\mu_{12}\| > \epsilon_1 \\ -\sin\left(\frac{\pi \mu_{12}}{2\epsilon_1}\right) \rho_1, & \text{if } \|\mu_{12}\| \leq \epsilon_1 \end{cases}, \\ \mu_1 &= [\mu_{11} \ \mu_{12}]^T = \bar{B}_1^T P_1 [\tilde{q}_1 \ \tilde{\dot{q}}_1]^T \rho_1, \\ \tilde{q}_1 &= [q^2 - q_d^2 \ q^4 - q_d^4]^T, \tilde{\dot{q}}_1 = [q^2 \dot{q}^4]^T, \end{aligned} \quad (46)$$

여기서 q_d^2, q_d^4 는 첫째, 둘째링크의 목표각도이다.

모터에 부가할 건설제어기 u 는 다음과같이 설계한다.

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} -\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} \rho_2 & \text{if } \|\mu_2\| > \epsilon_2 \\ -\frac{\mu_2}{\epsilon_2} \rho_2 & \text{if } \|\mu_2\| \leq \epsilon_2 \end{cases}, \\ \mu_2 &= \bar{B}_2^T P_2 [q_2 - u_1 \dot{q}_2 - \dot{u}_1]^T \rho_2, \\ \|h_2\| &\leq \bar{\rho}_2 \leq (1 + \lambda_{E_2}) \rho_2, \\ \lambda_{E_2} &= \min\left\{\frac{\Delta J_1}{J_1}, \frac{\Delta J_2}{J_2}\right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

시뮬레이션에서 각각의 변수를 다음과같이 설정한다. $m_1 = m_2 = 1, l_1 = 1, l_{c2} = 0.5, K_1 = K_2 = 1.5, \bar{K}_1 = \bar{K}_2 = 0.5, I_1 = I_2 = 1, J_1 = J_2 = 0.5, \bar{J}_1 = \bar{J}_2 = 0.25, g = 1, \epsilon_1 = 150, \epsilon_2 = 150$. Choose $Q_1 = Q_2 = I_{4 \times 4}$, 여기서 $I_{4 \times 4}$ 는 4×4 의 단위행렬을 표시한다. 또한 $L_{111} = L_{112} = 1, L_{211} = L_{212} = 2$, and $L_{121} = L_{122} = 1, L_{221} = L_{222} = 2$ 로 선택한다. 시뮬레이션 결과는 그림 1-2에서 나타나있다. 그림 1은 P.D. 제어를 수행할 경우이고 그림 2는 건설제어기를 사용한 결과이다. P.D. 제어시 시스템의 제어성능은 큰 정상상태 오차를 야기하는 결과를 가지며 본 논문에서 제안한 제어기에서의 한 제어성능은 오차가 크게 감소하고 안정된 결과를 보여주고있다.

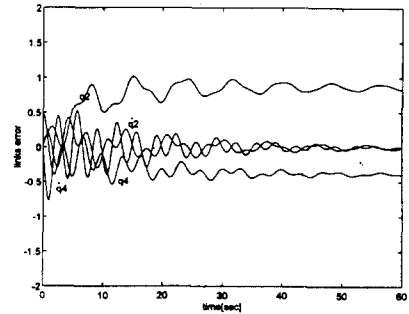


그림 1. P.D. 제어에 의한 링크의 각도와 각속도오차

Fig. 1. History of link angles and velocities with P.D. control

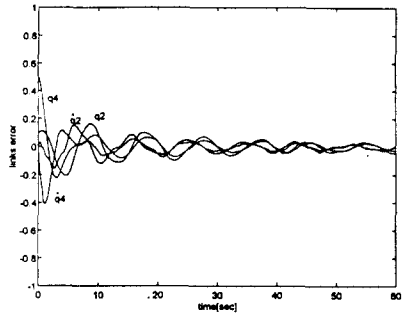


그림 2. 건설제어에 의한 링크의 각도와 각속도오차

Fig. 2. History of link angles and velocities with robust control

8 결론

비선형성과 불확실성을 가지는 유연조인트 로봇에서 건설제어기를 제안하였다. 본 시스템은 불확실성이 일치성조건을 만족하지 않는 시스템으로써 본 연구에서는 연산 토크법과 변수변환법을 사용하여 제어기를 제안하였다. 이 방법에 의하여 링크의 관성행렬에 의존하지 않는 리아프노프함수를 구성함으로써 일반적인 로봇에도 직접 적용할수있는 강점을 가지고있다. 이 제어기는 변수가 시불변이나 시변에 상관없이 적용될수있다. 제어기는 시스템이 본 제어기를 통하여 실용적안정성을 보장하며 적절한 변수의 한계값에 대한 정보를 통하여 불확실한 시스템을 제어할수있게된다.

참고문헌

지면의 제한으로 생략하며 참고문헌은 저자에게 요청가능함.

$$\begin{aligned} Z_3 &= q_2 - u_1 = X_3 - u_1, \\ Z_4 &= \dot{q}_2 - \dot{u}_1 = X_4 - \dot{u}_1. \end{aligned} \quad (14)$$

이는 $z_1 = x_1$, 그리고 $z_2 = x_2 - [u_1^T \dot{u}_1^T]^T$ 를 암시한다. 이와같은 상태 변수변환에 의해 변환된 부분시스템을 다음과같이 기술한다.

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 : \dot{z}_1 &= A_1 z_1 + B_1 u_1 + f_{1z}(z_1, \sigma_1) + B_1(q_2 - u_1) \\ &= A_1 z_1 + \bar{B}_1(z_1)u_1 + \Delta B_1(\sigma_1)u_1 \\ &\quad + f_{1z}(z_1, \sigma_1) + B_1(q_2 - u_1), \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $f_{1z}(\cdot)$ 는 $f_{1x}(\cdot)$ 과 같다. 위의 상태변수변환에 의해 f_{1z} 와 ΔB_1 의 불확실변수는 $h_1 \in R^{n \times n}$, $E_1 \in R^{n \times n}$ 에 대해 일치성조건(matching condition)을 만족한다.

$$\begin{aligned} f_{1z}(z_1, \sigma_1) &= \bar{B}_1(z_1)h_1(z_1, \sigma_1), \\ \Delta B_1(z_1, \sigma_1) &= \bar{B}_1(z_1)E_1(z_1, \sigma_1). \end{aligned} \quad (16)$$

상기의 일치성조건으로부터 (15)을 다음과같이 표시할수있다.

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 : \dot{z}_1 &= A_1 z_1 + \bar{B}_1(z_1)u_1 + \bar{B}_1(z_1)h_1(z_1, \sigma_1) \\ &\quad + \bar{B}_1(z_1)E_1(z_1, \sigma_1)u_1 + B_1(z_1, \sigma_1)(q_2 - u_1). \end{aligned} \quad (17)$$

(16)로부터 $h_1(\cdot)$ 와 $E_1(\cdot)$ 가 구해진다.

$$\begin{aligned} h_1 &= [D^{-1}K]_n^{-1}(L_{11}Z_1 + L_{21}\dot{Z}_1 - D^{-1}N - D^{-1}G - D^{-1}KZ_1), \\ E_1 &= [D^{-1}K]_n^{-1}\Delta(D^{-1}K), \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $[D^{-1}K]_n^{-1}$ 은 기저의 부분을 표시한다. $h_1(\cdot)$ 이 연속이고 $\sigma_1(t)$ 가 충만한 집합이므로 다음을 만족하는 한계함수 $\bar{\rho}_1(\cdot) : R^n \rightarrow R_+$ 가 존재한다.

$$\|h_1(z_1, \sigma_1)\| \leq \bar{\rho}_1(z_1). \quad (19)$$

가정 2. 다음식이 성립하는 상수 ρ_{E_1} 이 존재한다.

$$\begin{aligned} \rho_{E_1} &:= \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \|E_1(z_1, \sigma_1)\| \\ &= \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \|[D^{-1}(z_1, \sigma_1)K(\sigma_1)]_n^{-1}\Delta(D^{-1}(z_1, \sigma_1)K(\sigma_1))\| \\ &< \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 n 는 링크의 수이다.

$\rho_1(\cdot) : R^{2n} \rightarrow R_+$ 는 C^2 이고 다음의 조건이 성립되도록 선정한다.

$$\rho_1(z_1) \geq (1 - \sqrt{n}\rho_{E_1})^{-1}\bar{\rho}_1(z_1). \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \bar{B}_1^T P_1 z_1 \rho_1(z_1), \\ \mu_1 &= [\mu_{11} \mu_{21} \cdots \mu_{n1}]^T, \\ u_1 &= [u_{11} u_{21} \cdots u_{n1}]^T. \end{aligned} \quad (22)$$

로 정의한다.

주어진 스칼라 $\epsilon_1 > 0$ 에 대하여 u_{1i} 를 다음과같이 결정한다.

$$u_{1i} = \begin{cases} -\frac{\mu_{1i}}{\|\mu_{1i}\|} \rho_1(z_1), & \text{if } \|\mu_{1i}\| > \epsilon_1 \\ -\sin\left(\frac{\pi\mu_{1i}}{2\epsilon_1}\right) \rho_1(z_1), & \text{if } \|\mu_{1i}\| \leq \epsilon_1 \end{cases}, \quad (23)$$

여기서 $i = 1, 2, \dots, n$ 이다. 그리고 $P_1 > 0$ 는 다음식의 해이다.

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1, \quad Q_1 > 0, \quad (24)$$

여기서 A_1 의 L_{11} 와 L_{21} 는 A_1 이 Hurwitz되도록 선정한다.

식 (9)와 (14)로부터 둘째 부분시스템으로부터

$$\begin{aligned} \dot{Z}_3 &= Z_4 \\ \dot{Z}_4 &= -J^{-1}KZ_3 - \dot{u}_1 - J^{-1}Ku_1 + J^{-1}KZ_1 + J^{-1}u \\ &= -L_{12}Z_3 - L_{22}\dot{Z}_3 + L_{12}Z_3 + L_{22}\dot{Z}_3 - J^{-1}KZ_3 - \dot{u}_1 \\ &\quad - J^{-1}Ku_1 + J^{-1}KZ_1 + J^{-1}u. \end{aligned} \quad (25)$$

위와같이 기술한다. 위식을 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\dot{N}_2 : \dot{z}_2 = A_2 z_2 + B_2(\sigma_2)u + f_{2z}(z, \sigma_1, \sigma_2),$$

$$= A_2 z_2 + (\bar{B}_2 + \Delta B_2)u + f_{2z}(z, \sigma_1, \sigma_2), \quad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned} f_{2z}(z, \sigma_1, \sigma_2) &:= L_{12}Z_3 + L_{22}\dot{Z}_3 - J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)Z_3 - \dot{u}_1(z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2) \\ &\quad - J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)u_1(z_1) + J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)Z_1. \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 변환된부분시스템 \dot{N}_2 은 다음과같은 일치성 조건을 만족함을 알수있다.

$$\begin{aligned} f_{2z}(z, \sigma_1, \sigma_2) &= \bar{B}_2 h_2(z, \sigma_1, \sigma_2), \\ \Delta B_2(\sigma_2) &= \bar{B}_2 E_2(\sigma_2). \end{aligned} \quad (28)$$

위의 일치성조건으로부터 변환된 변환된 둘째 부분시스템을 다음과 같이 구성할수있다.

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 : \dot{z}_2 &= A_2 z_2 + \bar{B}_2(\sigma_2)u \\ &\quad + \bar{B}_2 E_2(\sigma_2)u + \bar{B}_2 h_2(z, \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (29)$$

식(28)으로부터

$$\begin{aligned} h_2(z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2) &= \bar{J}(L_{12}Z_3 + L_{22}\dot{Z}_3 - \dot{u}_1(z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2) \\ &\quad + \bar{J}(-J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)Z_3 + J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)Z_1 \\ &\quad - J^{-1}(\sigma_2)K(\sigma_2)u_1(z_1)), \end{aligned} \quad (30)$$

$$E_2(\sigma_2) = \bar{J}^{-1}\Delta J(\sigma_2). \quad (31)$$

$h_2(\cdot)$ 가 연속이고 $\sigma_1(t)$ 와 $\sigma_2(t)$ 는 충만한 집합내에 있으므로 다음과 같은 한계함수 $\bar{\rho}_2(\cdot) : R^{2n} \times R^{2n} \rightarrow R_+$ 가 존재한다.

$$\|h_2(z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2)\| \leq \bar{\rho}_2(z_1, z_2). \quad (32)$$

가정 3. 다음의 조건을 만족하는 상수 λ_{E_2} 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \lambda_{E_2} &:= \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \{\lambda_{\min}(E_2(\sigma_2))\} \\ &= \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \{\lambda_{\min}(\bar{J}^{-1}\Delta J(\sigma_2))\} > -1. \end{aligned} \quad (33)$$

$\rho_2(\cdot) : R^{2n} \times R^{2n} \rightarrow R_+$ 는 다음과같이 선정한다.

$$\rho_2(z_1, z_2) \geq (1 + \lambda_{E_2})^{-1}\bar{\rho}_2(z_1, z_2). \quad (34)$$

μ_2 는 다음으로 정의한다.

$$\mu_2 := \bar{B}_2^T P_2 z_2 \rho_2. \quad (35)$$

마지막으로 주어진 상수 $\epsilon_2 > 0$ 에 대하여 제어입력 u 를 다음과같이 설계한다.

$$u(z_1, z_2) = \begin{cases} -\frac{\mu_2(z_2)}{\|\mu_2(z_2)\|} \rho_2(z_1, z_2) & \text{if } \|\mu_2(z_2)\| > \epsilon_2 \\ -\frac{\mu_2(z_2)}{\epsilon_2} \rho_2(z_1, z_2) & \text{if } \|\mu_2(z_2)\| \leq \epsilon_2. \end{cases} \quad (36)$$

P_2 는 다음식의 해이다.

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2, \quad Q_2 > 0. \quad (37)$$

그리고 A_2 의 L_{12} 와 L_{22} 는 A_2 가 Hurwitz가 되도록 선정한다.

가정 4. 다음의 조건이 만족되는 상수 $\underline{\sigma} > 0$ 가 존재한다.

$$D(q_1, \sigma_1) \geq \underline{\sigma}I, \quad \forall q_1 \in R^n, \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1. \quad (38)$$

이론 1. 상기의 가정 1-4를 만족하고, 제어기 (36)에 의해 시스템은 실용적안정화된다. 또한 일정극궁극한계영역은 적절한 ϵ_1 과 ϵ_2 에 의해 조절될수있다.

증명. 지면의 제한으로 증명은 생략하며 상세내용은 저자에게 문의 바람.