

LQ-servo를 이용한 강인한 PI 제어기 설계

Robust PI Controller Design using LQ-servo

이 동 영, 윤 성 오*, 임 동 균*, 서 병 실*

*한양대학교 전자통신공학과 (Tel: 290-0364; Fax: 281-9912; E-mail: bssuh@apollo.hanyang.ac.kr

Abstract : LQ-servo is a stability-robustness guaranteed multivariable controller design method based on the LQR structure to improve command following performance with output feedback. In this paper , a new type of PI controller based on LQ-servo is introduced. Then, Command following performance is improved using the limiting behavior of the control gain and weighting factors on the low frequency part of design parameter Q that is the state weighting matrix in the cost function.

Keywords : PI controller, LQ-servo, robustness, limiting behavior, weighting factor

1. 서론

최근에 이론적으로 정교한 제어기 시스템 설계이론이 많이 개발되었지만, 실용화의 문제점과 설계의 간편성 때문에 아직도 산업계에서는 PI 제어기가 각광을 받고 있다. 가장 널리 알려진 Ziehler-Nichols 동조규칙[5]은 적절한 이론적 근거가 없고 강인성(robustness)을 보장할 수 있는 방법이 아니기 때문에 제어환경 및 파라미터 변화에 민감하다는 문제점이 있다.

본 논문에서는 최적제어기 설계방법의 근원적 역할을 하는 LQR(Linear Quadratic Regulator) 방법에서 안정도-강인성은 그대로 이어받고 결여된 성능-강인성을 향상시킬 수 있도록 수정 보완된 방법인 LQ-servo 구조가 부분상태(partial state)가 추가된 PI 구조가 될 수 있음에 착안하여 안정도-강인성과 성능-강인성을 동시에 보장받을 수 있는 새로운 PI 동조방법을 제시하고자 한다. LQ-servo에 대한 기존의 연구로써 MIT의 Athans[1]은 플랜트 입력부분에서 절단한 루프전달함수 $G_{LQ}(s)$ 를 이용한 설계절차를 제시하였지만, 명명추종 설계사양을 설계시 직접 고려할 수 없다는 문제점이 있다. 이를 해결하기 위해, 본 논문에서는 제어이득행렬의 극한가동[3][4]을 이용하여 플랜트 출력부분을 절단하여 얻어진 루프전달함수 $T(s)$ 의 특이값을 저주파와 고주파 영역에서 일치시키고 저주파 영역에 가중치를 줌으로써 보다 나은 성능 향상을 이룰수 있음을 보였다.

2. LQ-servo 구조를 갖는 PI 제어기

자유적분요소가 포함된 LQ-servo의 구조는 그림 2.1과 같다.

LQ-servo는 플랜트 입력부분에 오차의 비례이득 부분, 적분이득 부분, 부분상태배환(partial state feedback gain) 부분이 있다. 즉, LQ-servo의 구조는 PI 제어기에 부분상태배환 부분이 추가되어 있음을 알 수 있다. 부분상태배환이 없는 경우 시스템의 극점 위치를 임의로 옮길 수 있는 상태(state)의 개수는 출력의 개수이지만, 부분상태배환을 추가함으로써 전 극점의 위치를 임의로 옮길 수 있다. 따라서, 이 부분상태배환이 기존의 PI 제어기에서 고려할 수 없었던 시스템의 안정도-강인성을 이루는 역할

을 함을 알 수 있다.

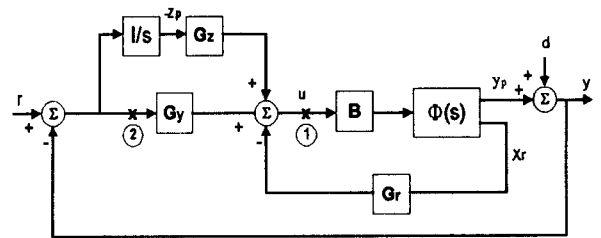


그림 1. LQ-servo 구조
Fig. 1. Structure of LQ-servo

3. LQ-servo 유형의 PI 제어기 설계

그림 1.의 상태공간 모델식은 다음과 같다.

$$x(t) = [z_p(t) \ y_p(t) \ x_r(t)]^T, \quad x(t) \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \\ z_p(t) &= Iy_p(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$C_p = [I_{m \times m} \ 0_{m \times (n-m)}], D_p = [0_{(n-m) \times m} \ I_{(n-m) \times (n-m)}] \quad (4)$$

PI 제어기의 매개변수 G 는 식(2)를 구축조건식으로 하여 다음의 가격함수를 최소화하는 값이다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (5)$$

$$Q = N^T N, \quad N = [N_z \ N_y \ N_r], \quad R = \rho I \quad (6)$$

3.1 설계 파라미터 Q의 결정

Athans 방법[1]은 그림 1.의 플랜트 입력측에서 절단한 점 ①에서의 루프전달함수 $G_{LQ}(s)$ 의 특이값을 저주파와 고주파 영역에서 일치시킬 수 있도록 설계 파라미터를 결정한다는 것이다. 하

지만, 본 논문에서는 $T(s)$ 의 특이값 형상으로 실제하여 성능-강인성 향상을 이루고자 한다. 그림 1.의 플랜트 출력측에서 절단한 ②점에서의 루프전달함수 $T(s)$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$T(s) = C_p (sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p (G_y + \frac{1}{s} G_z) \quad (7)$$

저주파와 고주파 영역에서 $T(s)$ 의 특이값을 일치시키기 위해서 제어이득행렬 G 의 극한거동에 관한 [정리. 1]을 이용한다.

정리. 1 : $N\theta(s)B$ 가 최소위상 플랜트이면 제어이득행렬 G 의 극한거동은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = UN \quad (8)$$

여기서 U 는 일원행렬(unitary matrix)로 $U^T U = I$ 이다. (증명) 참고문헌 [3] 참조

저주파 영역에서는 $s \rightarrow 0$ 이므로 $T(s)$ 는 아래 (9)와 같이 근사화되고 (10)과 같이 변형된다.

$$T(s) \approx C_p (-A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p \frac{1}{s} G_z \quad (9)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p (-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \sqrt{\rho} G_r D_p)^{-1} B_p \sqrt{\rho} G_z \quad (10)$$

여기서 플랜트가 최소위상일 때, $\rho \rightarrow 0$ 에서 (8)이 성립하므로 이를 이용하면 (10)은 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p (-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p UN_r D_p)^{-1} B_p UN_z \quad (11)$$

한편, 플랜트 식 A_p 와 B_p 를 다음과 같이 분해하자.

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

n 을 플랜트의 상태차원(state dimension), m 을 입력 및 출력의 차원이라 하면, A_{11} 은 $[m \times m]$, A_{12} 는 $[m \times (n-m)]$, A_{21} 은 $[(n-m) \times m]$, A_{22} 는 $[(n-m) \times (n-m)]$ 행렬이며, B_1 은 $[m \times m]$, B_2 는 $[(n-m) \times m]$ 행렬이다. 그러면 $T(s)$ 의 역행렬부분은 (4)에 의해 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} & (-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p UN_r D_p)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_1 UN_r \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_2 UN_r \end{bmatrix} [0 \ I] \\ &= \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_1 UN_r \\ -A_{21} & -A_{22} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_2 UN_r \end{bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

만약 다음 식(14)가 성립한다면, (13)식의 역행렬은 다음과 같이 된다.[2]

$$-A_{12} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_1 UN_r = 0 \quad (14)$$

$$(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p UN_r D_p)^{-1} = \begin{bmatrix} -A_{11} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} + B_2 B_1^{-1} A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \quad (15)$$

여기서 $-A_{22} + B_2 B_1^{-1} A_{12} = L$ 이라 하면, (15)는 역행렬 공식에 의해 (16)으로 변형된다.

$$(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p UN_r D_p)^{-1} = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & 0 \\ -L^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & L^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

그러므로, (11)은 (4)와 (16)을 이용하면 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} T(s) &\approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} [I \ 0] \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & 0 \\ -L^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} UN_z \\ &= -\frac{1}{s\sqrt{\rho}} A_{11}^{-1} B_1 UN_z \quad (17) \end{aligned}$$

최종적으로 저주파 영역에서 $T(s)$ 의 특이값을 일치시키기 위해서는 (18)을 만족해야 하므로 이로부터 UN_z 는 (19)와 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \sigma_i[T(s)] &= \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_i[-A_{11}^{-1} B_1 UN_z] \\ &= -A_{11}^{-1} B_1 UN_z = I \quad (18) \end{aligned}$$

$$\therefore UN_z = -B_1^{-1} A_{11} \quad (19)$$

또한 앞에서 언급한 전제조건 (14)를 만족하기 위해서 UN_r 은 (20)과 같이 결정되어야 한다.

$$UN_r = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12} \quad (20)$$

고주파 영역에서는 $s \rightarrow \infty$ 이므로 $T(s)$ 는 아래 (21)과 같이 근사화되어 (22)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} T(s) &\approx \frac{1}{s} C_p B_p G_y \\ &= \frac{1}{s} [I \ 0] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} G_y = \frac{1}{s} B_1 G_y \quad (21) \end{aligned}$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \sqrt{\rho} G_y \quad (22)$$

또한, $\rho \rightarrow 0$ 이고 최소위상 플랜트라는 가정하에서 (8)이 성립하므로 (22)를 (23)으로 근사시킬 수 있다,

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 UN_y \quad (23)$$

특이값을 일치시키기 위해서 (24)를 만족해야 하므로 이로부터 UN_y 는 (25)와 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \sigma_i[T(s)] &= \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_i[B_1 UN_y] \\ B_1 UN_y &= I \quad (24) \end{aligned}$$

$$\therefore UN_y = B_1^{-1} \quad (25)$$

위에서 구한 세 식 (19), (20), (25)를 종합해 보면 아래식 (26)이 되고 이를 가지고 (27)을 이용해 설계 파라미터 Q 를 구할 수 있다.

$$UN = [B_1^{-1} A_{11} : B_1^{-1} : \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12}] \quad (26)$$

$$Q = N^T N = N^T U^T U N = (UN)^T (UN) \quad (27)$$

3.2 설계 파라미터 ρ 의 결정

ρ 의 결정은 Athans의 방법[1]과 마찬가지로 $T(s)$ 의 특이값 형상에서 명령추종 및 외란의 장벽을 고려하여 선정한다. 이때 저주파 영역의 특이값이 일치된 $T(s)$ 이 이득은 근사적으로 (28)과 같이 되며 교차 주파수 ω_c 는 (29)와 같이 구해진다.

$$\sigma_i[T(j\omega)] \approx \frac{1}{\omega\sqrt{\rho}} \quad (28)$$

$$\frac{1}{\omega_c\sqrt{\rho}} = 1 \quad \therefore \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (29)$$

실제사양으로 주어지는 명령추종 및 외란장벽의 경계값 Ω_r 과 Ω_n 사이 교차주파수 ω_c 가 존재하도록 (30)과 같이 결정한다.

$$\Omega_r < \omega_c < \Omega_n$$

$$\Omega_r < \frac{1}{\sqrt{\rho}} < \Omega_n$$

$$\therefore \frac{1}{\Omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\Omega_r^2} \quad (30)$$

3.3 성능 향상을 위한 가중치 α , β 의 도입

저주파 영역에서 T(s)의 근사식 (11)에서, A_p , B_p , C_p 는 플랜트, ρ 는 ω_c 에 의해 결정되므로 N_z 와 N_r 만이 영향을 준다는 사실을 알 수 있다. 그래서 αN_z 와 βN_r 의 영향을 분리시켜 T(s)의 특이값의 변화를 조사하고 이들이 T(s)의 특이값에 독립적으로 영향을 주는지 알아보자.

3.3.1 설계 파라미터 N_z 의 영향

저주파 영역의 특이값 일치율을 위한 식 (18)을 아래식 (31) 변형할 수 있다.

$$A_{11}^{-1} B_1 U N_z = aI \quad \therefore U N_z = \alpha B_1^{-1} A_{11} \quad (31)$$

따라서, α 를 1보다 큰 값으로 설계하면 저주파 영역의 특이값이 커지고 루프전달함수 행렬과 반비례 관계인 감도함수 행렬의 특이값이 1보다 작은 저주파 영역을 넓게하여 명령추종 및 외란 제거의 성능을 향상시킬 수 있다.

3.3.2 설계 파라미터 N_r 의 영향

N_r 에 가중치를 도입하면 (32)과 같다.

$$\beta U N_r = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12} \quad (32)$$

식 (32)을 살펴보면, N_r 은 N_z 와는 달리 ρ 에 비례하기 때문에 가중치 β 에 의한 N_r 의 변화를 ρ 의 변화로 간주할 수 있다. 즉 아래 식 (33)을 만족시키도록 ρ 값을 조정할 수 있다.

$$-A_{12} + \sqrt{\rho} B_1 U \beta N_r = 0 \quad (33)$$

$\beta > 1$ 일 때는 ρ 가 증가한다고 볼 수 있고, 이는 $\rho \rightarrow 0$ 일 때 T(s)의 특이값을 일치시킨다는 가정을 악화시키므로 저주파 영역에서 T(s)의 특이값이 더 벌어지게 될 것이다. 반면, $0 < \beta < 1$ 일 때는 매우 작은 ρ 값이 더 작아진다고 볼 수 있기 때문에 $\rho \rightarrow 0$ 라는 가정에 더욱 충실할 수 있어 특이값 일치가 더 잘 이루어지게 됨을 알 수 있다.

3.3.3 설계 파라미터 N_z , N_y , N_r 의 상호 독립성

설계 파라미터 N_z , N_y , N_r 각각에 가중치를 줌으로써 서로에게 영향을 끼친다면 설계시 혼란을 가져올 수 있다. 하지만, 위에서 보았듯이 저주파 영역에서는 N_z 와 N_r 이 T(s)에 영향을 미치나, N_z 는 특이값을 증가 또는 감소시키는 역할을 하고, N_r 은 T(s)의 최대특이값과 최소특이값의 일치정도에 영향을 주게 되므로 상호 독립적이다. 또한, N_y 는 고주파 영역에서만 T(s)의 특이값에 영향을 준다. 따라서, N_z , N_y , N_r 각각이 상호 독립적이기 때문에 칼만필터(Kalman filter) 설계시 분리정리(separation theorem)와 같이 설계를 용이하게 한다.

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

이 예제(F404 엔진)는 Athans의 연구에서 보인 것으로, 본 논문에서 제안하는 방법과의 비교를 쉽게 하기 위해 선택하였다.

(상태공간 모델식)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4.600 & 0.0000 & 2.4276 \\ 0.1643 & -0.4000 & -0.3788 \\ 0.3107 & 0.0000 & -2.2300 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4182 & 5.5.26 \\ 0.3921 & -0.1254 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

설계 파라미터 값을 $\rho=0.001$, $\alpha=2$, $\beta=0.1$ 로 선정하였다.

Athans의 방법은 그림 2(a)와 그림 2(b)에서 보는 바와 같이 T(s)와 S(s)의 특이값이 저주파 영역에서 큰 값으로 벌어져 있기 때문에, 설계사양이 바뀌거나 상태방정식이 달라지면 명령추종 및 외란제거 장벽을 침해할 수 있다. 그에 반해 본 논문에서 제안된 방법은 그림 2(a)와 그림 2(b)에서 볼 때, 특이값이 일치되어 거의 일직선에 가까운 모양을 보이고 있어 입력방향에 대한 성능변화가 작고, 설계사양이 바뀌거나 임의의 플랜트에 대하여도 그에 따른 ρ 값과 가중치를 조절함으로써 명령추종 및 외란 제거의 성능-강인성을 만족시켜 줄 수 있다.

그림 2(c)와 그림 3(c)를 보면, 센서잡음에 대한 저감도 성능을 대체로 비슷함을 알 수 있다.

그림 2(d)와 그림 3(d)에서 볼 때, 시간응답에 있어서는 모두 기준입력을 잘 추적하고 있으나 본 논문에서 제안된 방법의 안정시간(settling time)이 상대적으로 짧음을 알 수 있다.

5. 결론

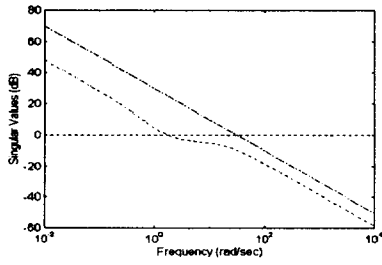
LQ-servo의 구조가 부분상대궤환이 추가된 PI 구조가 될 수 있음에 착안하여 PI 제어기를 설계함에 있어, 계수 파라미터들을 LQ-servo 방법으로 결정함으로써 LQ-servo 방법이 가지는 안정도-강인성의 보장에 성능-강인성을 향상시킬 수 있는 새로운 PI 동조 방법을 제시하였다.

본 논문은 플랜트 출력측에서 절단한 루우프 이득의 특이값을 저주파와 고주파 영역에서 일치시키는 설계 방법이므로, Athans의 방법보다 명령추종 및 응답속도면에서 우수할 것으로 생각된다. 그러나, 저주파 영역의 특이값은 설계 파라미터의 가중치를 크게함으로써 명령추종과 외란제거 성능을 향상시킬 수 있으나, 고주파 영역의 특이값의 크기는 감소시킬 수 없었다. 따라서, 앞으로 센서잡음에 대한 성능 향상을 위한 연구가 더욱 진행되어야 할 것인데, 최근 부각되고 있는 볼록 최적화 기법(convex optimization method)에 의한 접근 방법이 고려될 수 있다.

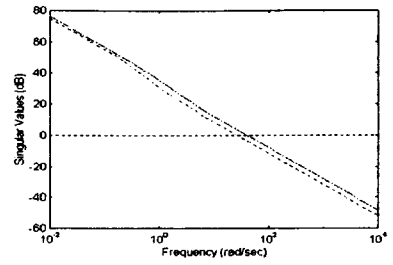
※ 본 논문은 한국과학재단 핵심전문 연구비(941-0100-001-2)지원으로 수행되었으며 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

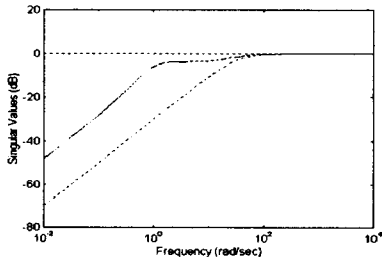
- [1] M. Athans, *Lecture Notes on Multivariable Control Systems II*, MIT, 1992
- [2] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980
- [3] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-17, pp.79-86, 1972.
- [4] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1972
- [5] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers", *Trans. ASME*, vol. 64, pp. 759-768, 1942.



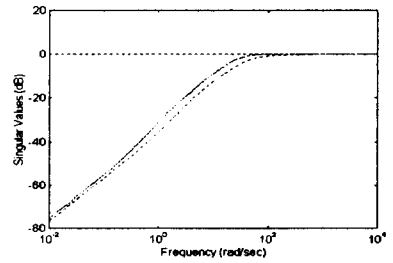
(a) 루프 전달 함수 행렬 $T(s)$ 의 특이값 선도
(a) Singular value plot of loop TFM $T(s)$



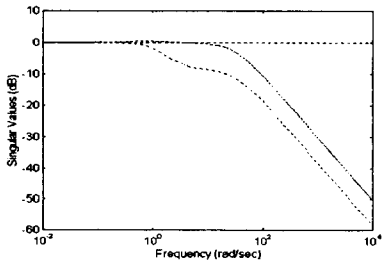
(a) 루프 전달 함수 행렬 $T(s)$ 의 특이값 선도
(a) Singular value plot of loop TFM $T(s)$



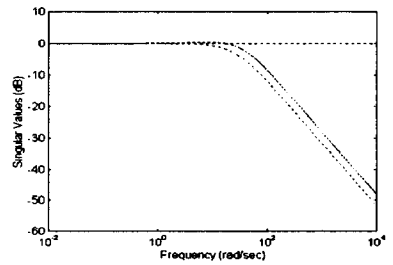
(b) 감도 함수 $S(s)$ 의 특이값 선도
(b) Singular value plot of sensitivity TFM $S(s)$



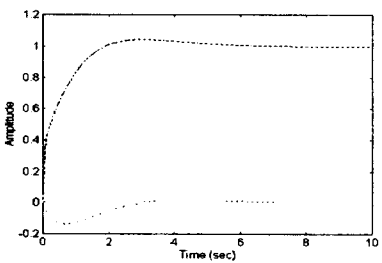
(b) 감도 함수 $S(s)$ 의 특이값 선도
(b) Singular value plot of sensitivity TFM $S(s)$



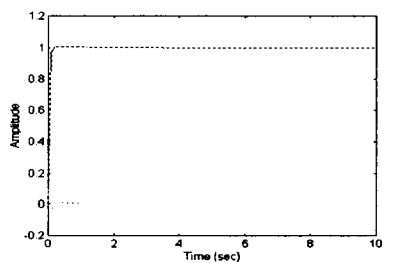
(c) 폐루프 전달 함수 $C(s)$ 의 특이값 선도
(c) Singular value plot of closed loop TFM $T(s)$



(c) 폐루프 전달 함수 $C(s)$ 의 특이값 선도
(c) Singular value plot of closed loop TFM $T(s)$



(d) 기준입력 $r(t)=[0 \ 1]$ 에 대한 시간응답
(d) Time response of reference input $r(t)=[0 \ 1]$



(d) 기준입력 $r(t)=[0 \ 1]$ 에 대한 시간응답
(d) Time response of reference input $r(t)=[0 \ 1]$

그림 2. Athans의 방법
Fig. 2. Athans' method

그림 3. 본 논문의 방법
Fig. 3. The method of this paper