**Proceedings of the 11th
KACC, October 1996**

분리최적화 기법을 이용한 강인제어기 설계

Robust Compensator Design for Parametric Uncertain Systems by Separated Optimizations

°김경수*, 박영진**

* 한국과학기술원 기계공학과 (Tel: 042-869-3076; Fax: 042-869-3095; E-mail: s_kks@cais.kaist.ac.kr)

** 한국과학기술원 기계공학과 (Tel: 042-869-3036; Fax: 042-861-1694; E-mail: yjpark@sorak.kaist.ac.kr)

Abstracts It is well known that robust compensators designed by the block-diagonal Lyapunov function approaches are conservative while they are popular in practice because of their computational easiness. In this note, we develop a systematized version of conventional block-diagonal Lyapunov function approaches by deriving two separated optimizations based on the guaranteed cost control method. The proposed method generates reasonable robust compensators in practice.

Keywords Robust compensator, Parametric uncertainty, Separated optimization

1. 서론

상태 공간에서 묘사되는 불확실한 계에 대하여, 지금까지 많은 연구가들에 의해 연구가 이루어져 왔다[1]-[5]. 특히, 전상태 궤환에 의한 계의 안정화에 대한 연구가 지배적 이었다(문헌[1]과 [2]및 그 안의 참고문헌 참조). 이는 시간 영역에서 이루어져 왔던 이차 안정화 기법 (Quadratic stabilization)이 최근의 H^∞ 제어 이론과 일치하는 등 전상태 궤환의 경우에는 매우 성공적이었던 데에 기인한 것으로 여겨진다. 반면에, 관측기를 기저로 하는 일반적인 보상기(Dynamic compensator)의 설계에 대해서는 그 복잡성으로 인하여 극히 제한적이고 보수적인 결과를 초래하였다(문헌[3]과 [4]및 그 안의 참고문헌 참조). 따라서, 대부분의 연구가들은 강인 보상기를 설계하기 위해서 이차 안정화 기법보다는 최근의 H^∞ 제어 이론에 의존하고 있다. 그러나, H^∞ 제어 이론의 복잡성, 특히 가중값 함수 (Weighting function)의 선정의 어려움 등을 감안한다면 강인 보상기의 설계는 결코 쉬운 문제가 아니다.

변수 불확실성 (Parametric uncertainty)이 존재하는 계에 대한 안정화 기법 중의 하나로써 다음과 같은 블럭 대각형의 Lyapunov 함수에 근거한 안정화 기법이 종종 사용되었다[4].

$$V(x_e) = x_e^T \cdot blockdiag[P_c,\ P_o] \cdot x_e\ ,\ P_c > 0,\ P_e > 0 \qquad (1)$$

여기서, x_e는 0으로 수렴해야 하는 확장된 상태 변수이고, P_c와 P_o는 $\dot{V}(x_e) < 0$ 을 보장하는 Lyapunov 방정식 또는 Riccati 방정식의 해이다. 식(1)의 장점은 0으로 가정한 비대각항 (off-diagonal term)으로 인해 결과식의 계산이 매우 간단히 된다는 점이다. 반면에, 그러한 불필요한 가정과 $\dot{V}(x_e) < 0$ 을 보장하도록 임의로 선정해야 되는 많은 설계 변수로 인하여 얻어진 결과가 경우에 따라서는 매우 보수적이라는 큰 단점을 가지고 있다. 또한, LQG 같이 잡음이 존재하는 환경을 고려한 설계가 불가능하다는 단점도 있다.

관측기에 기반한 강인 보상기를 설계하는 또 다른 방법은 문헌[3]에 제한된 Riccati 기법 (Riccati approach by guaranteed cost control method)이다. 이 기법의 장점은 LQG의 이차 비용 함수

를 정의한 후 그의 상한값을 최적화함으로써 체계적으로 강인 성능을 일정 한도내로 보장할 수 있다는 점이다. 따라서, 모든 절차가 LQG 기법의 측면에서 기술될 수 있으므로 물리적으로 이해하기 쉬운 장점을 지니고 있다. 그러나, 대부분의 H^2 제어 이론이 갖는 계산상의 복잡성으로 인해 실제적으로 응용하기에는 어렵다는 단점을 지니고 있다.

본 연구의 동기는 위에서 언급한 두 기법의 장점, 즉 블럭 대각형 Lyapunov 함수 기법의 계산상 용이성과 Riccati 기법의 체계성을 갖는 기법을 개발하는 것이다. 2 절에서는 본 연구의 주요 결과인 분리 최적화 기법을 제안한다. 분리 최적화 기법은 제어기 설계와 관측기 설계를 위한 각각의 최적화 문제로 구성되어 있다. 3 절에서 본 연구에 대한 결론 및 고찰을 서술하기로 한다.

2. 분리 최적화 기법

본 절에서, [3]에서 제안된 Riccati 기법을 토대로 기존의 블럭 대각형 Lyapunov 함수 기법을 유도하기로 한다. 본 논문에서 대상으로 하는 불확실계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A+\Delta A)x + Bu + Fw \\ y &= Cx + v \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^l$, $E\left[w(t)w(\tau)^T\right] = W\delta(t-\tau)$, $W \geq 0$, $E\left[v(t)v(\tau)^T\right] = V\delta(t-\tau)$, $V > 0$. 기준계에 대한 모든 기본적인 가정들은 LQG 이론을 따르기로 한다. (2)에서 나타난 변수 불확실성은 다음과 같은 입출력분해 (I/O decomposition)로 주어진다.

$$\Delta A = MF(t)N \quad , F(t)F(t)^T \leq I \tag{3}$$

일반적으로, 관측기에 근거한 보상기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_f\left(y - C\hat{x}\right) \\ u &= -K_c\hat{x} \end{aligned} \tag{4}$$

식 (2)와 (4) 로 부터, 다음과 같은 확장된 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}_e = \left(A_e + \Delta A_e\right)x_e + F_e w_e \tag{5}$$

여기서, $x_e^T = \left[x^T, (x-\hat{x})^T\right]$, $w_e^T = \left[w^T, v^T\right]$, $F_e = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F & -K_f \end{bmatrix}$

$W_e = \begin{bmatrix} W & \\ & V \end{bmatrix}$, $\Delta A_e = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ \Delta A & 0 \end{bmatrix}$, $A_e = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_fC \end{bmatrix}$.

Bernstein 과 Haddad[3]는 식(5)의 계를 안정화하면서, 다음의 LQG 비용함수

$$J_{LQG} = \lim_{t_f \to \infty} E\left\{\frac{1}{t_f}\int_0^{t_f}\left(x^TQx + u^TRu\right)\right\} \tag{6}$$

의 상한값이 다음과 같이 한정됨을 보였다.

$$J_{LQG} \leq tr\left[F_eW_eF_e^TP\right] \tag{7}$$

여기서, P 는 다음의 Riccati 방정식을 만족한다.

$$A_e^TP + PA_e + Q_e + \Psi\left(\Delta A_e, P\right) = 0 \tag{8}$$

여기서, $\Delta A_e^TP + P\Delta A_e \leq \Psi\left(\Delta A_e, P\right)$ 이다. 일반적으로, 식(7)의 상한값을 최적화하는 제어기를 찾는 문제는 'Auxiliary minimization' 또는, 'Guaranteed cost control method' 라고 불리워 진다. 이상의 기법이 갖는 중요성은 (i) 제어기 설계의 절차가 LQG 선상에서 이해되고, (ii) 강인 성능이 한계 내에 보장된다는 점이다. 반면에, 복잡하게 얽혀있는 Riccati 방정식들을 풀어야 한다는 큰 단점을 지니고 있다. 이러한, 실용성 측면의 문제를 해결하기 위해, 다음의 가정과 사실의 도입이 필수적이다.

가정: 식(8)을 만족하는 양한정의 블럭 대각 행렬 $P = blockdiag\left[P_c, P_o\right]$ 가 존재한다.

사실:

(i) 위의 가정하에서, 임의의 상수 $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 에 대하여,

$$\Delta A_e^TP + P\Delta A_e \leq \begin{bmatrix} \beta_1P_cMM^TP_c + \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)N^TN & \\ & \beta_2P_oMM^TP_o \end{bmatrix} \tag{9}$$

이 성립한다.

(ii) 임의의 쌍 $(x,y) \in S_x \times S_y$ 에 대하여, 함수 $f(x)$ 와 $g(x,y)$ 가 정의되고, 주어진 정의 구역에서 최소값이 존재한다고 가정하자. 그러면,

$$\min_{(x,y)\in S_x\times S_y}\left\{f(x)+g(x,y)\right\}\le f(x^*)+\min_{y\in S_y} g(x^*,y) \quad (10)$$

여기서, $x^*\in S_x$에서, 임의의 $x\in S_x$에 대하여, $f(x^*)\le f(x)$ 를 만족한다.

(증명) 임의의 $x\in S_x$에 대하여, 다음은 항부등식이다.

$$\min_{(x,y)\in S_x\times S_y}\left\{f(x)+g(x,y)\right\}\le f(x)+\min_{y\in S_y} g(x,y) \quad (F1)$$

또한, 함수 $f(x)$는 임의의 $x\in S_x$에서 정의가 되므로, 모든 $x\in S_x$에 대하여, $f(x^*)\le f(x)$ 을 만족하는 x^*가 반드시 존재한다. 따라서, 식(F1)에서, $x=x^*$로 선정하면 사실(ii)가 증명된다. (증명끝)

사실(i)은 [1]에서 제시된 한정기법에 의해 쉽게 증명될 수 있다. 식(9)의 우변은 두 양의 상수에 의존하게 된다. 사실(ii)는 보수성을 감수하면서 분리 최적화 기법을 가능하게 해주고 있다. 사실(i)을 이용하면, 식(8)은 다음 세개의 제한 조건으로 분해될 수 있다.

$$\begin{aligned}(A-BK_c)^T P_c + P_c(A-BK_c)+Q+K_c^T RK_c \\ +\beta_1 P_c MM^T P_c+\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)N^T N=0\end{aligned} \quad (11)$$

$$(A-K_fC)^T P_o + P_o(A-K_fC)+K_c^T RK_c+\beta_2 P_o MM^T P_o=0 \quad (12)$$

$$P_cBK_c-K_c^T RK_c=0 \quad (13)$$

식(11)과 식(12)에서, $P_c=P_c(K_c)$, $P_o=P_o(K_c,K_f)$ 임을 주목할 필요가 있다. 일반적으로, 전상태 궤환 제어기와 관측기의 설계를 분리할 수 있으면 제어기의 설계가 매우 용이하게 된다. 이는 사실(ii)의 적용으로 다음과 같이 가능하게 된다.

$$\begin{aligned}\min_{K_c,K_f} tr\left[F_eW_eF_e^TP\right]\le \min_{K_c} tr\left[FWF^TP_c\right] \\ +\min_{K_f} tr\left[\left(FWF^T+K_fVK_f^T\right)P_o\right]\Big|_{K_c=K_c^*}\end{aligned} \quad (14)$$

여기서, K_c^*는 $tr\left[FWF^TP_c\right]$ 를 최적화하는 해이다. LQG 이론에서는 식(14)는 방정식이라는 점은 잘 알려진 사실이다. 이상의 논의에서 다음과 같은 분리 최적화 기법을 정의할 수 있다.

정의(분리 최적화 기법):

분리 최적화 기법은 주어진 양의 상수 $\beta_2>0$에 대하여, 다음의 두 최적화 기법으로 구성되어 진다.

(i) ***전상태 궤환 제어기 설계***

제한 조건(11)하에서,

$$\min_{K_c,\beta_1>0} tr\left[FWF^TP_c\right]$$

(ii) ***관측기 설계***

제한 조건(12)하에서,

$$\min_{K_f} tr\left[\left(FWF^T+K_fVK_f^T\right)P_o\right]\Big|_{K_c=K_c^*}$$

제한 조건 (13)은 문제 정의에서 사용되지 않았는데, 이는 전상태 궤환 제어기의 설계에 의해 자동으로 만족되는 조건임을 밝혀 둔다[6]. 위에서 정의된 분리 최적화 기법의 장점은 계산상의 용이성이다. 다시 말하면, 제어기 설계및 관측기의 설계가 모두 LMI와 같은 선형 최적화 기법에 의해 쉽게 해결될 수 있다[7]. 기존의 설계기법[3]이 비록 LQG 비용함수의 상한값을 최적화할 수는 있으나 계산이 매우 복잡하여 실용성이 없었던 점에 반하여, 제안된 방법은 어느 정도의 보수성은 감안하지만 계산이 매우 단순하다는 점은 주목할 만 하다. 편의상, 다음과 같은 비용함수 지표를 정의하기로 한다.

$$J_{state}(\beta_2)=\min_{K_c,\beta_1>0} tr\left[FWF^TP_c\right] \quad (15)$$

$$J_{obsv}(\beta_2)=\min_{K_f} tr\left[\left(FWF^T+K_fVK_f^T\right)P_o\right]\Big|_{K_c=K_c^*} \quad (16)$$

분리 최적화 기법에서, 양의 상수 β_2는 주어졌다고 가정하였는데 이는 제한 조건 (11)과 (12)를 분리하기 위함이다. 따라서, β_2에 대해서 다음과 같은 최종적인 최적화가 반드시 필요하다.

$$\min_{\beta_2>0}\left\{J_{state}(\beta_2)+J_{obsv}(\beta_2)\right\} \quad (17)$$

이상에서 언급된 분리 최적화 기법과 문헌[3]의 기법은 다음의 관계에 의해 설명된다.

$$\min_{K_c,K_f,\Psi} tr\left[F_eW_eF_e^TP\right]\le \min_{\beta_2>0}\left\{J_{state}(\beta_2)+J_{obsv}(\beta_2)\right\} \quad (18)$$

식(18)에서 알 수 있듯이, 최종에 얻어진 제어기의 보수성에 대해서는 앞으로 연구가 진행되어야 할 것이다.

3. 결론

본 논문에서, 상태 공간에서 묘사되는 한정된 놈(Norm)을 갖는 불확실성이 존재할 경우의 강인 제어기를 설계하는 기법을 제안하였다. 제안된 강인 제어기는 관측기를 기반으로 하는 동적 보상기로써, 기존의 LQG 선상에서 이해될 수 있도록 설계되었다. LQG 비용함수의 상한값을 최적화하던 기존의 방법에 분리 최적화의 개념을 도입함으로써, 계산상으로 매우 용이한 설계 기법을 얻을 수 있었다. 제안된 기법은 기존의 블럭 대각형의 Lyapunov 함수를 사용하던 보수적인 기법을 체계화한 기법으로써, 실용적인 측면에서, 강인한 동적 보상기를 얻는 매우 체계적인 방법으로 기대된다.

참고문헌

[1] I.R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems", *Syst. & Contr. Letters*, Vol.8, pp.351-357, 1987.

[2] J. Douglas and M.Athans, " Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.39, No.1, pp.107-111, 1994.

[3] D.S. Bernstein and W.M. Haddad, "LQG Control with H^{∞} Performance Bound: A Riccati Equation Approach", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.34, No.3, pp.293-305, March 1989.

[4] F. Jabbari and W.E. Schmitendorf, "Effects of Using Observers on Stabilization of Uncertain Linear Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.38, No.2, pp.266-271, 1993.

[5] K.S. Kim, *On the Robust LQR and LQG Control Based On Lyapunov's Second Method*, M.S. Thesis, KAIST(in English), 1995.

[6] K.S. Kim and Y.J. Park, "Designing Observer-Based Robust Compensators for Parametric Uncertain Systems by Block-Diagonal Approach", in preparation.

[7] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15, 1995.