Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

불확실한 선형 시스템의 지역 안정 제한 조건을 가진 강인한 H_∞ 제어기의 설계

Design of a Robust H_∞ Controller with Regional Stability Constraints for Uncertain Linear Systems

°이 문 노, 문 정 호, 정 명 진

한국과학기술원 전기 및 전자과
Tel: 042-869-5429; FAX: 042-869-3410; E-mail: lmn@donghae.kaist.ac.kr

Abstract This paper considers the problem of robust H_∞ control with regional stability constraints via output feedback to assure robust performance for uncertain linear systems. A robust H_∞ control problem and the generalized Lyapunov theory are introduced for dealing with the problem. The output feedback H_∞ controller makes the controlled outputs settle within a given bound and the control input not to be saturated. The regional stability constraints problem for uncertain systems can be reduced to the problem for the nominal systems by finding sufficient bounds of variations of the closed-loop poles due to modeling uncertainties. A controller design procedure is established using the Lagrange multiplier method. The controller design technique was illustrated on the track-following system of a optical disk drive.

Keywords Robust H_∞ control, Regional stability constraints, Generalized Lyapunov theory

1. 서 론

생산 비용을 줄이기 위해 낮은 품질의 부품을 사용한다든지 시스템의 노화 등으로 인해 시스템 파라미터에 불확실성이 존재한다. 이러한 시스템의 불확실성과 노이즈, 측정 오차 등의 외란은 시스템의 안정도와 성능을 저하시키는데, 시스템에 대한 외란과 불확실성의 영향의 성능 지수로 폐루프 시스템의 H_∞ norm이 많이 사용되고 있다. H_∞ 제어 문제는 시스템의 불확실성에 대해 폐루프 시스템의 안정성을 보장하고 외란의 영향을 줄여주는 제어기를 설계하는 문제를 다루지만 시스템의 과도 응답 특성을 고려할 수 없다. 그러나, 실제로 적용 가능한 제어기를 설계하기 위해서는 과도 응답 특성 등의 만족할 만한 성능을 보장하여야 한다.

일반적으로 제어 시스템은 오버 슈트, 정착 시간, 상승 시간(rise time) 등의 과도 응답 특성을 나타내는 성능 지수를 고려하여 설계하여야 한다. 이러한 성능 지수로 시스템의 극점이 존재해야 하는 영역을 알 수 있는데, Gutman[1] 등은 어떤 특정 영역에 시스템의 극점이 존재하기 위한 조건을 제시하였다. 즉, 특정 영역에 대해 정의된 일반화된 Lyapunov 방정식을 만족하는 해가 존재하도록 제어기를 설계하면 된다. 최근에 Yedavalli[2] 등은 모델링 불확실성이 없는 경우에 상태 궤환(state feedback)을 이용하여 특정 영역에 시스템의 극점이 존재하는 외란에 강인한 H_∞ 제어기를 설계하는 방법을 제시하였는데, 모델링 불확실성이 존재한 경우에 제시한 설계 방법을 확대하기가 어렵다. 제어 시스템에 모델링 불확실성이 존재하는 경우에는 일반화된 Lyapunov 방정식에 모델링 불확실성이 포함되기 때문에 시스템의 성능 지수를 만족하는 제어기를 설계하는 것은 쉽지 않다. Garcia[3] 등은 상태 궤환(state feedback)을 이용하여 특정 영역이 원인 경우에 대하여 일반화된 Lyapunov 방정식을 만족하는 제어기를 설계하였고, Bakker[4] 등은 원, 타원, 포물선 등 2차 영역에 대해서 구조적, 비구조적 불확실성의 제한 범위(bound)를 구하였지만 제어기 설계 과정에 적용하기는 어렵다.

본 논문에서는 norm bounded 시변 불확실성이 존재하는 선형 시스템에 대해서 지역 안정 제한 조건을 만족하는 H_∞ 제어기를 설계하는 문제를 다룬다. 이런 문제를 풀기 위해 강인 H_∞ 제어 이론과 일반화된 Lyapunov 이론을 도입한다. 강인 H_∞ 제어 이론에서는 좀 더 합리적인 결과를 얻기 위해 외란의 주파수 특성과 제어 입력의 범위 등을 고려하여 가중 함수를 도입한다. 그리고, 모델링 불확실성으로 인한 극점의 변화 범위를 구하여서 모델링 불확실성이 없을 때의 극점이 존재해야 하는 영역을 구함으로써 불확실한 시스템의 지역 안정 제한 문제는 공칭(nominal) 시스템에 대한 지역 안정 제한 문제로 바뀔 수 있다는 것을 보인다. 지역 안정 제한 조건을 만족하는 H_∞ 제어기는 Lagrange multiplier 방법을 이용하여 구할 수 있고 제안된 제어기의 성능을 검증하기 위해 광 디스크 드라이브의 트랙킹 서보 시스템에 적용한다.

2. 문제 설정

불확실한 선형 시스템은 구조적인 불확실성과 비구조적인 불확실성으로 구분되어 모델링되어진다. 구조적인 불확실성은 시스템 파라미터의 변화를 모델링에서 고려하고, 비구조적인 불확실성은 공칭 모델을 간단하게 모델링함으로 인해 모델링 되지 못한 시스템의 2차 공진 등의 고주파 특성을 모델링에서 고려한다. 그래서, 불확실한 선형 시스템은 구조적인 불확실성과 비구조적인 불확실성을 모두 가지는 형태로 모델링되어져야 한다. 비구조적인 불확실성은 시스템의 안정도를 저하시키고 구조적인 불확실성은 시스템의 저주파 특성을 나쁘게 함으로 성능을 저하시킨다. 본 논문에서는 과도 응답 특성의 영향을 고려하기 위해 시스템을 구조적인 불확실성만 가지는 형태로 모델링한다. 일반적으로 선형 시스템의 주파수 특성은 dynamic structural analyzer 등을 이용하여 측정될 수 있고, 선형 시스템은 모델링 불확실성 고려하여 다음의 구간(interval) 플랜트로 모델링될 수 있다. 이

때, 모델링 불확실성은 전달 함수의 계수에만 존재한다.

$$P(s) = \frac{\hat{b}_1 s^{n-1} + \cdots\cdots + \hat{b}_n}{s^n + \hat{a}_1 s^{n-1} + \cdots\cdots + \hat{a}_n} \tag{1}$$

여기서, $\hat{a}_i = [a_i^-, a_i^+]$, $\hat{b}_i = [b_i^-, b_i^+]$, $i = 1, \cdots, n$ 이다. (1)을 상태 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= (A_p + \triangle A_p(t))\, x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= -(C_p + \triangle C_p(t))\, x_p(t) + w(t) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, $w(t)$는 측정 오차나 시스템에 내부적으로 존재하는 외란 등이 포함된다. 모델링 불확실성은 다음과 같이 norm bounded된 것으로 가정한다.

$$\begin{aligned} \triangle A_p(t) = H_1 F(t) E_1, \ \ \triangle C_p(t) &= H_2 F(t) E_1, \\ F(t)^T F(t) &\leq I. \end{aligned} \tag{3}$$

플랜트의 상태 변수를 제어기에서 모두 사용할 수 있다는 가정하에 제어기를 출력 궤환 형태로 구성한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) \end{aligned} \tag{4}$$

(4)의 제어기를 (2)의 플랜트에 적용하면, 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_F + \triangle A_F(t))\, x(t) + B_F w(t) \\ y(t) &= (C_F + \triangle C_F(t))\, x(t) + w(t) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서, $x(t)$는 폐루프 시스템의 상태 변수를 나타내고 시스템을 나타내는 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix},$$

$$A_F = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix} = A_1 + B_1 K C_1,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\triangle A_F(t) = \begin{bmatrix} H_1 F(t) E_1 & 0 \\ B_c H_2 F(t) E_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_F = [\, -C_p \quad 0\,], \quad \triangle C_F(t) = [\, H_2 F(t) E_1 \quad 0\,]$$

(5)의 폐루프 시스템이 외란에 강인하고 만족할 만한 성능을 얻기 위해 본 논문에서는 강인 H_∞ 제어 이론과 일반화된 Lyapunov 이론을 도입한다. 3장과 4장을 통해 강인 성능을 보장하는 제어기 설계 방법을 제시한다.

3. 강인한 H_∞ 제어기의 설계

이 장에서는 강인한 H_∞ 제어 문제를 만족하는 제어기를 설계한다. H_∞ 제어 문제는 모델링 불확실성에 대해 폐루프 시스템의 안정성을 보장하고 에너지 차원에서 외란의 영향을 줄여주는 제어기를 설계하는 문제를 다룬다. 본 논문에서는 좀 덜 conservative한 결과를 얻기 위해 출력과 제어 입력에 다음과 같이 가중 함수를 도입한다.

$$z(t) = \begin{bmatrix} W_1(s)\, y(t) \\ W_2(s)\, u(t) \end{bmatrix},$$

$$W_1(s) \sim \begin{bmatrix} A_{w1} & B_{w1} \\ C_{w1} & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2(s) \sim \begin{bmatrix} A_{w2} & B_{w2} \\ C_{w2} & D_{w2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

여기서, $z(t)$는 제어되어야 하는(controlled) 출력을 나타내고, $W_1(s)$와 $W_2(s)$는 출력과 제어 입력에 대한 가중 함수이다. 가중 함수들은 외란의 주파수 특성, 허용되는 출력의 범위, 제어 입력의 범위, 폐루프 시스템의 대역폭(bandwidth) 등을 고려하여 설정되어야 한다. 가중 함수를 고려한 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= (A_p + H_1 F(t) E_1)\, x_p(t) + B_p u(t) \\ \dot{x}_{w1}(t) &= B_{w1}(-C_p + H_2 F(t) E_1) x_p(t) \\ &\quad + A_{w1} x_{w1}(t) + B_{w1} w(t) \\ \dot{x}_{w2}(t) &= A_{w2} x_{w2}(t) + B_{w2} u(t) \\ y(t) &= (-C_p + H_2 F(t) E_1) x_p(t) + w(t) \\ z_1(t) &= C_{w1} x_{w1}(t) \\ z_2(t) &= C_{w2} x_{w2}(t) + D_{w2} u(t) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, $R_1 = D_{w2}{}^T D_{w2}$은 특이(nonsingular) 행렬이다. 본 논문에서는 시스템 (7)을 안정하게 하고 $\| T_{zw}(s) \|_\infty$ 가 1보다 작게 되는 H_∞ 제어기를 설계한다. 다음의 보조 정리들은 강인한 H_∞ 제어 문제를 풀기 위한 필요 충분 조건을 제시한다.

보조 정리 3.1 ([5],[6]): 불확실성이 없는 다음의 시스템 (8)이 안정하고 $\| T_{\tilde{z}\tilde{w}}(s) \|_\infty$가 1보다 작도록 하는 양의 정수 λ와 제어기가 존재하면 시스템 (7)은 (4)의 제어기에 의해 안정하고 $\| T_{zw}(s) \|_\infty$가 1보다 작게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) + \lambda H_1 \hat{w}(t) \\ \dot{x}_{w1}(t) &= -B_{w1} C_p x_p(t) + A_{w1} x_{w1}(t) \\ &\quad + B_{w1} w(t) + \lambda B_{w1} H_2 \hat{w}(t) \\ \dot{x}_{w2}(t) &= A_{w2} x_{w2}(t) + B_{w2} u(t) \\ y(t) &= (-C_p + H_2 F(t) E_1) x_p(t) + w(t) \\ z_1(t) &= C_{w1} x_{w1}(t) \\ z_2(t) &= C_{w2} x_{w2}(t) + D_{w2} u(t) \\ \hat{z}(t) &= \frac{E_1}{\lambda} x_p(t) \end{aligned} \tag{8}$$

여기서, $\tilde{w}(t) = (w(t)^T \ \ \hat{w}(t)^T)^T$, $\tilde{z}(t) = (z(t)^T \ \ \hat{z}(t)^T)^T$ 이다. □

$\tilde{x}(t) = (\, x_p{}^T \ x_c{}^T \ x_{w1}{}^T \ x_{w2}{}^T)^T$를 정의하고 (4)의 제어기를 시스템 (8)에 적용하면 시스템 (9)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \overline{A}\, \tilde{x}(t) + \overline{B}\, \tilde{w}(t) \\ \tilde{z}(t) &= \overline{C}\, \tilde{x}(t) \end{aligned} \tag{9}$$

여기서, 시스템을 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_c & 0 & 0 \\ -B_c C_p & A_c & 0 & 0 \\ -B_{w1} C_p & 0 & A_{w1} & 0 \\ 0 & B_{w2} C_c & 0 & A_{w2} \end{bmatrix} = A_2 + B_2 K C_2,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{w1} C_p & 0 & A_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{w2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ B_{w2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda H_1 \\ B_c & \lambda B_c H_2 \\ B_{w1} & \lambda B_{w1} H_2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{w1} & 0 \\ 0 & D_{w2} C_c & 0 & C_{w2} \\ E_1/\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L_2 + M_2 K N_2.$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{w1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{w2} \\ E_1/\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{w2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

보조 정리 3.2 ([5]): 다음의 Riccati 방정식을 만족하는 $\lambda > 0$, $P = P^T > 0$와 출력 궤환 제어기 K가 존재하면 시스템 (9)는 안정하고 $\| T_{\bar{z}\bar{w}}(s) \|_\infty$는 1보다 작게 된다.

$$\begin{aligned}(A_2 + B_2KC_2)^T P + P(A_2 + B_2KC_2) + P\bar{B}\bar{B}^T P \\ + (L_2 + M_2KN_2)^T(L_2 + M_2KN_2) + I = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

□

(10)을 만족하는 제어기는 다음의 최소화(minimization) 문제를 다룸으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\min_K \ tr(RP + S^T K^T K S) \\ &\text{s.t. } (A_2 + B_2KC_2)^T P + P(A_2 + B_2KC_2) + P\bar{B}\bar{B}^T P \\ &\quad + (L_2 + M_2KN_2)^T(L_2 + M_2KN_2) + I = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 행렬 R과 S는 양의 한정(positive definite) 행렬이다. (11)의 최소화 문제를 풀기 위해서 다음의 Lagrangian을 정의한다.

$$\begin{aligned} L(K, R, S, P, \Lambda) &= tr[RP + S^T K^T K S \\ &+ \Lambda \{ (A_2 + B_2KC_2)^T P + P(A_2 + B_2KC_2) + P\bar{B}\bar{B}^T P \\ &+ (L_2 + M_2KN_2)^T(L_2 + M_2KN_2) + I \}] \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, Λ는 Lagrange multiplier이고 Lagrangian이 최소가 되기 위한 필요 조건은 다음과 같다.

$$\text{(i) } \frac{\partial L}{\partial K} = K\bar{S} + B_2^T P \Lambda C_2^T + M_2^T(L_2 + M_2KN_2)\Lambda N_2^T = 0$$

$$\text{(ii) } \frac{\partial L}{\partial P} = (A_2 + B_2KC_2)^T \Lambda + \Lambda(A_2 + B_2KC_2) + 2\bar{B}\bar{B}^T P + R = 0$$

$$\begin{aligned}\text{(iii) } \frac{\partial L}{\partial \Lambda} &= (A_2 + B_2KC_2)^T P + P(A_2 + B_2KC_2) + P\bar{B}\bar{B}^T P \\ &+ (L_2 + M_2KN_2)^T(L_2 + M_2KN_2) + I = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, $\bar{S} = SS^T$이다. $\Lambda_{N2} = N_2 \Lambda N_2^T$, $\bar{S} = \Lambda_{N2}$로 정의하면, 제어기는 (13)-(i)로부터 다음과 같은 형태로 구할 수 있다.

$$K = -(I + M_2^T M_2)^{-1}(B_2 P \Lambda C_2^T + M_2^T L_2 \Lambda N_2^T)\Lambda_{N2}^{-1}. \quad (14)$$

(14)를 (13)-(ii)와 (13)-(iii)에 대입하면, 미지의 행렬 P, Λ로 구성된 두개의 행렬 방정식을 구할 수 있고, 두 방정식을 동시에 만족하는 P, Λ를 구함으로써 H_∞ 제어기를 구할 수 있다.

4. 지역 제한 조건을 가진 강인한 H_∞ 제어

다음과 같이 정의된 복소 평면의 2차 영역을 고려하자.

$$\Omega = \{ (x, y) : \gamma_{00} + \gamma_{10}x + \gamma_{20}x^2 + \gamma_{02}y^2 < 0 \} \quad (15)$$

이 영역은 x축에 대칭이고, 원, 타원, 포물선 등을 포함한다. 여기서, γ_{ij}는 실수이고 $\gamma_{20} + \gamma_{02} \ge 0$ 이다. 먼저, $c_{00} = \gamma_{00}$, $c_{10} = 0.5\gamma_{10}$, $c_{11} = 0.5(\gamma_{20} + \gamma_{02})$, $c_{20} = 0.25(\gamma_{20} - \gamma_{02})$를 정의하자.

보조 정리 4.1 ([1],[4]): (15)와 같이 정의된 영역 Ω을 고려할 때, 다음의 일반화된 Lyapunov 방정식을 만족하는 $Q = Q^T > 0$가 있으면, 폐루프 시스템 (5)의 모든 극점들이 영역 Ω에 존재하게 된다.

$$\begin{aligned} &c_{00}Q + c_{10}((A_F + \triangle A_F(t))^T Q + Q(A_F + \triangle A_F(t))) \\ &+ c_{20}(((A_F + \triangle A_F(t))^T)^2 Q + Q(A_F + \triangle A_F(t))^2) \\ &+ c_{11}(A_F + \triangle A_F(t))^T Q(A_F + \triangle A_F(t)) + I = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(16)은 모델링 불확실성을 포함하고 있기 때문에, 특정 영역이 원이 아닌 경우에 (16)을 만족하는 제어기를 설계하는 것은 어렵다. 그래서, 본 논문에서는 (16)을 만족하는 제어기를 구하는 하나의 충분 조건을 제시한다. 먼저, 행렬 A의 norm과 lower bound를 다음과 같이 정의한다.

$$\| A \| = \max |\lambda_j|, \quad l(A) = \min |\lambda_j|, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad (17)$$

여기서, 다음과 같이 상수 ρ와 영역 Ω에 포함되는 영역 Ω'을 정의한다. 영역 Ω'는 영역 Ω와 같은 형태이고 두 영역 경계의 최소 거리가 ρ보다 크게 결정된다.

$$\begin{aligned} &\rho = \| \triangle A_F(t) \| = \| H_1 F(t) E_1 \| \\ &\Omega' = \{ (x, y) : \gamma_{00}' + \gamma_{10}' x + \gamma_{20}' x^2 + \gamma_{02}' y^2 < 0 \}. \end{aligned} \quad (18)$$

주 4.1: 영역 Ω가 중심이 $-\alpha$이고 반지름이 r인 원인 경우에, 영역 Ω'은 중심이 $-\alpha$이고 반지름이 $r-\rho$인 원으로 선택할 수 있다. 이럴 경우에, 영역 Ω'의 파라미터는 $\gamma_{00}' = \alpha^2 - (r-\rho)^2$, $\gamma_{10}' = 2\alpha$, $\gamma_{20}' = \gamma_{02}' = 1$이다.

본 논문에서는 보조 정리 4.1에서 정의된 불확실한 선형 시스템의 지역 안정 제한 문제가 정리 4.1에 의해 공칭 시스템의 지역 안정 문제로 바뀔 수 있다는 것을 보인다.

정리 4.1: 영역 Ω'에 대한 일반화된 Lyapunov 방정식 (19)를 만족하는 양의 한정 행렬 Q와 제어기 K가 존재하면, 폐루프 시스템 (5)의 극점들은 모두 영역 Ω에 존재하게 된다.

$$\begin{aligned} &c_{00}' Q + c_{10}'(A_F^T Q + QA_F) + c_{11}' A_F^T Q A_F \\ &+ c_{20}'((A_F^T)^2 Q + QA_F^2) + I = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, $c_{00}' = \gamma_{00}'$, $c_{10}' = 0.5\gamma_{10}'$, $c_{11}' = 0.5(\gamma_{20}' + \gamma_{02}')$, $c_{20}' = 0.25(\gamma_{20}' - \gamma_{02}')$ 이다.

증명: 행렬 A_F의 고유치를 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 라고 하고 행렬 $A_F + \triangle A_F(t)$의 고유치를 η라고 하자. $diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$를 행렬 D로 정의할 때, $A_F = LDL^{-1}$인 특이(nonsingular) 행렬 L이 존재한다. 그리고, η가 행렬 $A_F + \triangle A_F(t)$의 고유치이므로 $(A_F + \triangle A_F(t))\vec{y} = \eta\vec{y}$인 벡터 $\vec{y}$가 존재한다. 행렬 D와 $A_F = LDL^{-1}$로 부터 위의 식은 $(D + L^{-1}\triangle A_F(t)L)\vec{x} = \eta\vec{x}$, $\vec{x} = L^{-1}\vec{y} \neq 0$, 이 되고 행렬 $\eta I - D$의 lower bound를 구함으로써 $A_F + \triangle A_F(t)$의 고유치가 존재하는 범위를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &(\eta I - D)\vec{x} = L^{-1}\triangle A_F(t)L\vec{x} \\ &l(\eta I - D) \le \frac{\| (\eta I - D)x \|_v}{\| x \|_v} = \frac{\| L^{-1}\triangle A_F(t)Lx \|_v}{\| x \|_v} \\ &\le \| \triangle A_F(t) \| = \rho \end{aligned} \quad (20)$$

(17)로 부터 $\min|\eta-\lambda_j| \le \rho,\ j=1,2,\cdots,n$,을 알 수 있다. 따라서, 행렬 $A_F+\triangle A_F(t)$의 모든 고유치는 행렬 A_F의 고유치를 중심으로 반경이 ρ인 원안에 존재한다. 그러므로, 행렬 A_F의 고유치가 모두 영역 Ω 에 포함되면 행렬 $A_F+\triangle A_F(t)$의 고유치, 즉 폐루프 시스템 (5)의 극점들은 모두 영역 Ω에 포함된다는 것을 알 수 있다. □

Norm bounded 시변 불확실성을 가진 선형 시스템의 지역 안정 제한 조건을 가진 H_∞ 제어 문제는 다음과 같이 정의될 수 있다.

보조 정리 4.2: Riccati 방정식 (10)과 일반화된 Lyapunov 방정식 (19)를 만족하는 양의 한정 행렬 P, Q와 출력 궤환 제어기 K가 존재하면, 폐루프 시스템은 외란에 강인하고 극점들은 모두 영역 Ω에 존재하게 된다.

위의 정리는 보조 정리 3.2와 정리 4.1을 이용하여 쉽게 증명될 수 있다. □

보조 정리 4.2를 만족하는 제어기는 3장의 최소화 문제 (11)를 확장함으로써 구할 수 있다. 행렬 $\bar{S}$를 $\varepsilon \Lambda_{N2}$, $\varepsilon > 0$,로 정의함으로써 (14)의 제어기는 다음과 같이 구해진다.

$$K=-(\varepsilon I+M_2^TM_2)^{-1}(B_2P\Lambda\ C_2^T+M_2^TL_2\Lambda\ N_2^T)\Lambda_{N2}^{-1}. \tag{21}$$

(21)을 (19)에 대입한 뒤, ε값을 바꾸면서 양의 한정 행렬 Q가 존재하는 지를 확인함으로써 보조 정리 4.2를 만족하는 제어기를 구할 수 있다.

5. 예 제

4장에서 설계한 제어기의 성능을 검증하기 위해서 본 논문에서는 광 디스크 드라이브의 트랙킹 서보에 적용한다. 광 디스크는 디스크와 픽업의 마모가 없고 휴대하기 편하며 광을 이용함으로 인해 기록 밀도가 증가하기 때문에 기록 매체로 우수한 특성을 가지고 있다. 광 디스크 드라이브의 트랙킹 서보는 디스크 상의 트랙에 기록되어 있는 데이다를 정확하게 재생하기 위해 필요한 서보 시스템이다. 본 논문에서는 최근에 개발 중에 있는 DVDR의 트랙킹 서보에 제안한 제어기 설계 과정을 적용한다. DVDR은 영상 및 음성 신호를 디지탈 방식으로 실시간에 기록 및 재생하는 광 디스크 기기이다. 예제로 사용한 DVDR는 트랙 피치가 1 ㎛, 디스크의 데이터 용량이 2.2 GB 이상, 기록 밀도가 2.02 Gb/in 이상이다. DVDR 시스템의 트래킹 액츄에이터의 주파수 특성은 HP3563A dynamic structural analyzer를 사용하여 구할 수 있고, 액츄에이터의 고주파 특성과 디스크의 반사율의 차이를 고려하여 트랙킹 액츄에이터를 (22)와 같이 구간 플랜트로 모델링한다.

$$P(s)=\frac{[65,95]}{s^2+[19,28]s+[50000,64000]}\quad [M/A]. \tag{22}$$

광 디스크 드라이브의 트랙킹 시스템에는 디스크의 고속 회전으로 인해 발생되는 진동과 편심 등의 외란이 존재한다. DVDR 시스템의 외란은 대략 100 ㎛ 정도이고 외란이 존재하는 주파수 대역은 대략 1 KHz 이하이다. 실험에 사용한 DVDR의 트랙 피치는 1 ㎛임으로 트랙킹 오차의 허용 범위는 ±0.05 ㎛이다. 따라서, 디스크에 기록된 데이타를 정확히 재생하기 위해 트랙킹 제어기는 트랙킹 오차가 ±0.05 ㎛ 안에 있게 하고 오버 슈트가 15% 보다 작게, 정착 시간(settling time)이 4 msec 이도록 설계되어야 한다. 그리고, 폐루프 시스템의 대역폭이 1.5~2 KHz 이고 제어 입력은 ±500 ㎃ 보다 작도록 제어기를 설계하여야 한다. 외란의 주파수 대역과 제어 입력 제한 등을 고려하여 다음의 가중 함수를 도입한다.

$$W_1(s)=\frac{3000(60\pi)^2(1+s/1000\pi)}{(s^2+60\pi s+(60\pi)^2)(1+s/40\pi)}$$
$$W_2(s)=\frac{1.6\times10^{-7}(1+s/8000\pi)}{(1+s/1000\pi)}. \tag{23}$$

다음의 오버 슈트와 정착 시간에 대한 식으로부터 감쇠 상수(ξ)와 고유 진동수(W_n)의 범위를 구하면 $\xi\ge0.5$, $W_n\ge1500$ 이다.

$$\frac{3}{\xi W_n}\le0.004\ ,\quad \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\le0.15 \tag{24}$$

감쇠 상수와 고유 진동수의 범위를 이용하여 트래킹 서보 시스템의 극점이 존재하여야 하는 영역을 구할 수 있는데, (25)와 같이 포물선으로 영역을 근사화할 수 있다. 그리고, ρ값이 4.5이므로 Ω' 영역을 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega=\{(x,y):\ 4.5e7+3e4x+y^2<0\}$$
$$\Omega'=\{(x,y):\ 4.575e7+3e4x+y^2<0\} \tag{25}$$

보조 정리 4.2를 만족하는 트랙킹 제어기는 다음과 같이 구해진다.

$$K(s)=\frac{0.15(1+s/1885)(1+s/4084)}{(1+s/113)(1+s/18850)(1+s/25133)}\times\frac{(1+s/11310)^2}{(1+s/31416)(1+94250)}\quad[A/V]. \tag{26}$$

6. 결 론

본 논문에서는 norm bounded 시변 불확실성을 가지는 선형 시스템에 대하여 외란에 강인하고 과도 응답 특성 등의 성능을 보장하는 강인한 제어기 설계 방법을 제시하였다. 그리고, 제안한 제어기 설계 방법을 검증하기 위해 광 디스크 드라이브의 트랙킹 서보에 적용하였다.

참고 문헌

[1] S. Gutman and E. I. Jury, "A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 4, pp. 853-862, 1981.

[2] R. K. Yedavalli and Yong Liu, " H_∞ Control with regional stability constraints", *Automatica*, vol. 31, no. 4, pp. 611-615, 1995.

[3] G. Garcia and J. Bernussou, "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 1, pp. 184-190, 1995.

[4] W. Bakker, J. S. Luo, and A. Johnson, "Pertubation bound for root-clustering of linear systems in a specified second order subregions", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 3, pp. 473-478, 1995

[5] L. Xi, M. Fu, and C. E. de Souza, " H_∞ Control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 8, pp. 1253-1256, 1992.

[6] Keqin Gu, " H_∞ Control of systems under norm bounded uncertainties in all system matrices", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1320-1322, 1994.