Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

Linear Matrix Inequalities (LMIs) 를 이용한 강인한 LQR/LQG 제어기의 설계

Design of Robust LQR/LQG controllers by LMIs

°유 지환*, 박 영진**

*한국과학기술원 기계공학과 (Tel : 042-869-3076; Fax : 042-869-3095; E-mail : s_ryuu@cais.kaist.ac.kr)
**한국과학기술원 기계공학과 (Tel : 042-869-3036; Fax : 042-869-8220; E-mail : yjpark@sorak.kaist.ac.kr)

Abstracts The purpose of this thesis is to develop methods of designing robust LQR/LQG controllers for time-varying systems with real parametric uncertainties. Controller design that meet desired performance and robust specifications is one of the most important unsolved problems in control engineering. We propose a new framework to solve these problems using Linear Matrix Inequalities (LMIs) which have gained much attention in recent years, for their computational tractability and usefulness in control engineering. In Robust LQR case, the formulation of LMI based problem is straightforward and we can say that the obtained solution is the global optimum because the transformed problem is convex. In Robust LQG case, the formulation is difficult because the objective function and constraint are all nonlinear, therefore these are not treatable directly by LMI. We propose a sequential solving method which consist of a block-diagonal approach and a full-block approach. Block-diagonal approach gives a conservative solution and it is used as a initial guess for a full-block approach. In full-block approach two LMIs are solved sequentially in iterative manner. Because this algorithm must be solved iteratively, the obtained solution may not be globally optimal.

Keywords Linear matrix Inequalities, Robust LQR/LQG, Convex

1. 서론

시스템의 모델링 오차에 의한 영향을 줄이기 위해서 많은 연구들이 지금까지 선행되어 왔다. 특히 [7]에서는 scaling 행렬을 최적화 함으로서 설계의 보수성을 줄일 수 있는 강인한 LQR/LQG 제어기에 관한 연구가 행하여 졌다. 위 논문에서는 문제의 해를 구하기 위하여 반복적인 계산방법을 제시하였다, 하지만 이 방법은 초기조건을 필요로 하는데 문제의 크기가 커지고 파라메터의 불확실성이 증가할수록 그 초기조건을 가정하기란 매우 어렵다. 더군다나 해를 구한다고 하더라도 그 해가 전구간 최적해라는 보장을 할 수 없다. 강건 LQG 제어기 설계의 경우에는 아직까지 확실한 해법이 제시 되지 않았고 매우 어려운 문제로 알려져 있다.

이런 복잡하고 다루기 힘든 문제의 수치해석적인 해법을 위하여 요즘 Linear Matrix Inequalities (LMIs) 가 그 편의성과 유용성 때문에 제어 이론 분야에서 많은 관심을 모으고있다[8], [1], [3], [2]. H_∞ [4], [5], H_2 [9], H_2/H_∞ [6], 을 포함한 많은 상태되먹임제어문제들이 LMI 문제로 변환되어 convex 프로그래밍을 사용하여 쉽게 풀어질 수 있다.

이 논문의 목적은 LMI 를 이용하여 시스템에 시변하는 파라메터의 불확실성이 존재할 때에도 강인한 LQR/LQG 제어기를 설계하는 방법을 제시하는 것을 목적으로 한다. 이 문제를 풀기 위해 많은 알고리즘들이 제안되었다. 하지만 이들 대부분은 직접 지정해 주어야 하는 파라메터가 많고 그 구한 해가 전구간 최적해임을 보장할 수가 없다. 특히 강건 LQG 제어기 설계의 경우에는 지금까지 나와 있는 알고리즘들은 매우 복잡하고 지정해 주어야 할 값들도 많다. 이 논문에서는 강건 LQR/LQG 제어기 설계의 실용적이면서 체계적인 알고리즘을 이용하여 LQR 경우에는 전구간 최적임을 보장할 수 있는 제어기를 보다 쉽게 구할 수 있는 방법을 소개 하겠다.

2. 강건 LQR 제어기의 설계

이 절에서는 실수의 시변하는 파라메터의 불확실성을 가지는 시스템에 대하여 강인한 LQR 제어기 설계문제를 LMI 를 조건식으로 가지는 문제 즉, 반한정 프로그래밍 문제[10]로의 변환에 대하여 언급하겠다.

다음과 같이 시변하는 파라메터의 불확실성을 가지는 선형 시스템에 대하여 생각해보자.

$$\dot{x} = \left(A + \Delta A(t)\right)x + Bu \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^m$ 이고 $\Delta A(\cdot)$ 는 다음과 같은 구조를 가지는 파라메터의 불확실성이다[7].

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i(t) E_i = \tilde{M}\Delta(t)\tilde{N} \tag{2}$$

비용함수는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$J = E\left[\int_0^\infty z^T z \, dt\right] \tag{3}$$

여기서 $z = Cx + Du$ 이고 $C^T D = 0$ 이라고 가정한다.

보조정리 1 : (비용함수의 상한가)
다음과 같은 Lyapunov 함수 $V(x) = x^T P x$ 가 존재한다면

$$\frac{dV(x)}{dt} + z^T z \le 0 \tag{4}$$

비용함수의 상한가는 다음과 같이 정해진다.

$$tr[PX(0)] \tag{5}$$

여기서 $X(0) = E\left[x(0)x(0)^T\right]$ 이다.

증명 : 문헌 [2]을 참고하기로 한다.

이제 이 문제는 (4)의 조건하에서 (5)를 최소화하는 문제로 목적이 분명해 졌다. 목적함수 (5)는 변수 P 에 대해서 선형이지만 조건식 (4)는 LMI 형태가 아니다. 조건식 (4)를 LMI 형태로 변환하기 위하여 식을 전개하면 다음과 같다.

$$A^T P + PA - K_c^T B^T P - PBK_c + C^T C + K_c^T D^T D K_c + \Delta A^T P + P\Delta A \le 0 \tag{6}$$

식 (6)의 불확실한 항들은 다음과 같이 상한가를 줄 수가 있다 [7].

$$\Delta A^T P + P\Delta A \le PMXM^T P + N^T X^{-1} N \tag{7}$$

식 (6)는 결국 다음과 같이 상한가가 정해진다.

$$A^T P + PA - K_c^T B^T P - PBK_c + C^T C + K_c^T D^T DK + PMXM^T P + N^T X^{-1} N \le 0 \tag{8}$$

위식 (8) 또한 변수 P, K_c, X 에 대해서 비선형이다. 위식을 LMI 형태로 표현하기 위하여 $Q(P^{-1})$ 를 양변에 곱하고 변수치환을 하여 Schur complement[2]로 식을 변환하면 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^T B^T \\ - BY + MXM^T \end{pmatrix} & (CQ + DY)^T & QN^T \\ CQ + DY & -I & 0 \\ NQ & 0 & -X \end{bmatrix} \le 0 \tag{9}$$

이제 위와 같이 변환된 LMI 형태를 이용하여 반한정 프로그래밍 문제를 다음과 같이 구성할 수 있다.

반한정 프로그래밍 문제

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^T B^T \\ - BY + MXM^T \end{pmatrix} & (CQ + DY)^T & QN^T \\ CQ + DY & -I & 0 \\ NQ & 0 & -X \end{bmatrix} \le 0$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \ge 0$$

조건을 만족하면서

$tr[PX(0)]$ 을 최소화한다.

위 문제에서 두번째 조건식은 $Q = P^{-1}$ 의 convex 한 부등의 조건식이다. 반한정 프로그래밍 문제를 풀어서 구한 해는 전구간 최적해 임을 보장할 수 있다. 그러므로 전구간 최적인 제어기의 이득값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_c = YP \tag{10}$$

3. 강건 LQG 제어기의 설계

이 절에서는 실수의 시변하는 파라메터의 불확실성이 존재하는 시스템에 대해서 강인한 LQG 제어기의 설계에 대해여 소개하겠다. 이 경우에 있어서는 반한정 프로그래밍 문제로의 변환이 매우 어렵다.

다음과 같이 시변하는 파라메터의 불확실성을 가지는 선형 시스템에 대하여 생각해보자.

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bu + Fw \tag{11}$$

$$y = C_m x + v \tag{12}$$

여기서 $E\{ww^T\} = W \ge 0,\ \ E\{vv^T\} = V > 0$ 이다.

보상기는 다음과 같다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \tag{13}$$

$$u = -K_c \hat{x} \tag{14}$$

증가된 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}_a = (A_a + \Delta A_a(t))x_a + F_a w_a \tag{15}$$

여기서 $x_a = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix},\ A_a = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_f C_m \end{bmatrix}$

$$\Delta A_a(t) = \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ \Delta A(t) & 0 \end{bmatrix}, F_a = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F & -K_f \end{bmatrix}, w_a = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

다음과 같이 주어지는 비용함수는

$$J = \lim_{T \to \infty} E\left[\frac{1}{T}\int_0^T z^T z\, dt\right] \tag{16}$$

아래와 같이 상한가를 정할 수 있다.

$$J \le tr\left[F_a W_a F_a^T P\right] \tag{17}$$

여기서 P 가 아래식을 만족할 경우에

$$A_a^T P + PA_a + \Psi + f(\Delta A_a, P) = 0 \tag{18}$$

여기서 $z = Cx + Du$ 이고 $C^T D = 0$ 이라 가정하자.

$$F_a W_a F_a^T = \begin{bmatrix} FWF^T & FWF^T \\ FWF^T & FWF^T + K_f VK_f^T \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} C^T C + K_c^T D^T DK_c & -K_c^T D^T DK_c \\ -K_c^T D^T DK_c & K_c^T D^T DK_c \end{bmatrix}$$

2 절에서 사용한 상한가를 정하는 기법을 사용하여 식 (18)을 전개하면 최종의 목적으로 하는 문제는 다음과 같이 된다.

$$A_a^T P + PA_a + \Psi + P\hat{M}X\hat{M}^T P + \hat{N}^T X^{-1}\hat{N} = 0 \tag{19}$$

조건을 만족하면서

$tr\left[F_a W_a F_a^T P\right]$ 을 최소화한다. (20)

이 논문에서는 다음과 같은 반한정 프로그래밍 문제를 완전블럭 접근법이라고 하겠다. '완전블럭'의 의미는 $P \in R^{2n \times 2n}$ 인 행렬이 네개의 $n \times n$ 행렬로 구성되어있고 구속조건은 대칭이라는 것 이외에는 없는 경우를 말한다. 이 문제의 해법은 전통적으로 어렵고 복잡하다. 목적함수와 조건식이 모두 비선형성이 강하고 특히 조건식의 경우에는 세개의 복잡하게 얽혀있는 Riccati 방정식으로 구성되어있다. 또한 불행히도 위의 식 (19)와 (20)은 직접적으로 LMI 형태로 변환하기가 현재로서는 불가능한 식들이다.

이제부터 위 문제의 해를 구하기 위하여 대각블럭 접근법과 반복적인 완전블럭 접근법의 두 단계로 구성된 해법을 제시하겠다. 대각블럭 접근법의 해는 완전블럭 접근법을 풀기 위한 초기조건으로 사용될 것이다.

3.1 대각블럭 접근법

이 단계에서는 일반적인 LQG 경우와 같이 문제를 제어기 설계부분과 관측기 설계부분으로 분리시키기 위해서 행렬 P 을 다음과 같은 구조를 갖는다고 가정하였다.

$$P = blockdiag[P_c, P_o],\quad P_c > 0,\quad P_o > 0$$

위 가정에 의해 문제는 한 방향으로의 풀이가 가능한 두개의 문제로 다음과 같이 분리된다[11].

$$A^T P_c + P_c A - K_c^T B^T P_c - P_c BK_c + C^T C + K_c^T D^T DK_c + P_c MX_I M^T P_c + N^T X_I^{-1} N + N^T X_2^{-1} N = 0 \quad (21)$$

조건을 만족하면서

$tr\left[FWF^T P_c\right]$ 을 최소화한다.

$$A^T P_o + P_o A - C_m^T K_f^T P_o - P_o K_f C_m + K_c^T D^T DK_c + P_o MX_2 M^T P_o = 0 \quad (22)$$

조건을 만족하면서

$tr\left[FWF^T P_o + K_f VK_f^T P_o\right]$ 을 최소화한다.

변수 치환과 nonconvex 한 항을 convex 하게 나타내는 기법을 이용하고 해는 항상 경계에 존재한다는 성질[10]을 이용하여 위의 문제를 다음과 같이 두개의 반한정 프로그래밍 문제로 변환할 수 있다.

반한정 프로그래밍 문제 I *: (제어기 설계)*

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_c A^T + AQ_c - Y^T B^T \\ -BY + MX_I M^T \end{pmatrix} & (CQ_c + DY)^T & Q_c N^T & Q_c N^T \\ (CQ_c + DY) & -I & 0 & 0 \\ NQ_c & 0 & -X_I & 0 \\ NQ_c & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} \le 0$$

$$\begin{bmatrix} P_c & I \\ I & Q_c \end{bmatrix} \ge 0$$

조건을 만족하면서

$tr\left[FWF^T P_c\right]$ 을 최소화한다.

반한정 프로그래밍 문제 II *: (관측기 설계)*

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^T P_o + P_o A - Z^T C^T - CZ \\ + K_c^T D^T DK_c \end{pmatrix} & P_o M \\ M^T P_o & -X_2^{-1} \end{bmatrix} \le 0$$

$$\begin{bmatrix} L & Z^T \\ Z & P_o \end{bmatrix} \ge 0$$

조건을 만족하면서

$tr\left[FWF^T P_o\right] + tr\left[VL\right]$ 을 최소화한다.

이제 지금까지 전개한 풀이기법을 정리하면 다음과 같다.

대각블럭 접근법

1. 적절히 X_2 을 가정한다.
2. 반한정 프로그래밍 문제 I 의 풀이 ⇒ K_c (제어기의 이득값)을 구한다.
3. 반한정 프로그래밍 문제 II 의 풀이(2 에서 구한 K_c 을 사용하여) ⇒ K_f (관측기의 이득값)을 구한다.

초기값의 가정의 편의성을 위해 $X_2 = \alpha I$ 로 가정하였다.

3.2 완전블럭 접근법

앞의 대각블럭 접근법에서는 문제의 분리를 위하여 P 을 대각블럭을 가지는 행렬로 가정하고 또한 행렬 X 을 서로 다른 행렬 X_I 과 X_2 로 분리시켰다. 이러한 과정을 거쳤으므로 대각블럭 접근법은 보수적일 수 밖에 없다. 이 절에서는 이러한 보수성을 없앤 완전블럭 접근법의 풀이 기법을 소개하겠다.

만약 제어기와 관측기의 이득값이 결정된다면 앞에서 언급한 완전블럭 접근법은 반한정 프로그래밍 문제의 형태로 다음과 같이 변환될 수 있다.

반한정 프로그래밍 문제 *: (완전블럭 접근법)*

$$\begin{bmatrix} A_a^T P + PA_a + \Psi + \hat{N}^T X^{-1} \hat{N} & P\hat{M} \\ \hat{M}^T P & -X \end{bmatrix} \le 0$$

조건을 만족하면서

$tr\left[F_a W_a F_a^T P\right]$ 을 최소화한다.

위의 문제는 보상기가 결정되었을 때 변수 P 와 X 에 대하여 최적화 하는 문제이다. 즉, 주어진 보상기가 어느 정도의 불확실성까지 안정화 시킬 수 있는지를 알아내는 문제이다. 하지만 여기서 주어진 보상기가 최적의 보상기라고 할 수가 없다. 그러므로 보상기를 갱신시켜 나가는 방법을 생각할 필요가 있다.

Lagrange 곱수를 사용하여 Lagrange 함수를 표현하면 다음과 같다.

$$J = trace\left[F_a W_a F_a^T P + \lambda^T\left(A_a^T P + PA_a + \Psi + P\hat{M}X\hat{M}^T P + \hat{N}^T X^{-1}\hat{N}\right)\right] \quad (23)$$

위의 완전블럭 접근법의 반한정 프로그래밍 문제를 풀게되면 위 Lagrange 함수의 변수 P 와 X 에 대한 미분값은 영이 되어야 한다는 조건으로 부터 다음과 같은 Lyapunov 방정식을 얻을 수 있다.

$$F_a W_a F_a^T + U_2 K_f VK_f^T U_2 + \left(A_a + \hat{M}X\hat{M}^T P\right)\lambda + \lambda\left(A_a + \hat{M}X\hat{M}^T P\right)^T = 0 \quad (24)$$

위 방정식에서 구한 λ 은 J 의 보상기의 여유값들에 대한 미분값이 영이라고 가정하고 구한 다음과 같은식의 값을 구하는데 사용된다.

$$K_c^* = -\left(D^T D\right)^{-1} \tilde{B}^T P\lambda^T U_3^T \left(U_3 \lambda^T U_3^T\right)^{-1} \quad (25)$$

$$K_f^* = \left(U_2 P U_2^T\right)^{-1} U_2 P\lambda^T U_2^T C_m^T V^{-1} \quad (26)$$

위에서 구한 값을 이용하여 보상기의 여유값을 갱신시켜 나가는데 다음과 같이 사용된다.

$$K_c = \beta K_c + (1-\beta) K_c^* \quad (27)$$

$$K_f = \beta K_f + (1-\beta) K_f^* \quad (28)$$

여기서 $0 \le \beta \le 1$ 이다.

지금까지 전개시켜온 풀이 기법을 정리하면 다음과 같다.

완전블럭 접근법

1. 보상기의 초기가정 (대각블럭 접근법의 해)
2. 완전블럭 접근법의 반한정 프로그래밍 문제를 푼다.
3. Lyapunov 방정식 (24)을 푼다. ⇒ λ
4. 식 (25)~(28)을 사용하여 보상기를 갱신한다.
5. $J_{k-1} - J_k \le \varepsilon$ 이 될때까지 2 부터 반복한다.

이 기법에는 짚고 넘어갈 곳이 두 부분이 있다. 1 에서 구한 보상기를 2 의 초기값으로 가정했을 경우 2 가 풀릴 수 있는가에 대한 부분이 그 한가지이다. 이 부분에 대한 수학적인 증명은 뒤로하고, 보수적인 문제에 대한 해를 보수성이 약하고 더욱더 비용함수값을 내릴 수 있는 문제의 초기조건으로 사용한다면 그 문제는 풀릴 수 있다고 말할 수 있다. 또 한가지 부분은 4 에서 갱신한 값을 사용했을 때 2 가 풀릴 수 있는가 하는 것인데, β 가 충분히 작다면 항상 가능하다고 말할 수 있다.

4. 결론

이 논문에서는 LMI 기법을 이용하여 실수의 시변하는 파라메터의 불확실성을 가지고 있는 시스템에 대하여 강인한 LQR/LQG 제어기의 설계방법에 대하여 소개하였다. 강건 LQR 제어기의 설계 부분에서는 직접 지정해주어야 할 파라메터와 초기조건이 필요 없는 제어기의 설계방법이 제안되었고 이 방법을 이용하여 전구간 최적인 제어기를 쉽게 구할 수 있었다. 강건 LQG 제어기의 설계 부분에서는 LMI 문제로의 변환의 어려움 때문에 두 단계의 설계방법인 대각블럭 접근법과 완전블럭 접근법이 소개되었다. 대각블럭 접근법의 해는 완전블럭 접근법의 초기조건의로 사용되지만 그 차체로서도 아주 실용적인 방법이라고 말할 수 있다. 강건 LQG 제어기 설계의 경우에는 문제를 반복적인 계산에 의해서 풀게 되므로 그 해가 전구간 최적해라는 보장은 할 수가 없다. 하지만 고전적으로 해결하기 어려운 문제에 대해 체계적이고 실용적인 방법을 제안했다는 점에서 이 논문의 가치는 충분하다고 할 수 있다.

참고문헌

[1] C. Beck," Computational issues in solving LMIs", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1259-1260, 1991.

[2] S. Boyd, L. EL Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of Studies in applied mathematics, SIAM, PA, 1995.

[3] J. C. Doyle, A. packard and K. Zhou, "Review of LFT's, LMIs, and μ . *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1227-1232, 1991.

[4] P. Gahinet, "A Convex parameterizatonof suboptimal H_∞ controllers", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 937-942, 1992.

[5] T. Iwasaki and R. E. Skelton, " All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", *Automatica*, **30** (8), 1307-1317.

[6] P. P. Khargonekar and M. A. Rorea, " Mixed H_2 / H_∞ control: a convex optimization approach", *IEEE Transactions on automatic control*, **36**, 824-837, 1991.

[7] K.S. Kim, On the Robust LQR and LQG Control Based on Lyapunov's second method, M.S. thesis, KAIST, 1995.

[8] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey and G. Becker, "A collection of robust control problems leading to LMIs", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1245-1250, 1991.

[9] M. A. Rotea, "The generalized H_2 control problem", *Automatica*, **29**, 373-386, 1993.

[10] L. Vandenberghe and S. Boyd, "Semidefinite Programming", *SIAM REWIEW*, march, 1996.

[11] 김경수, 박영진, "분리최적화 기법을 이용한 강인제어기 설계", 자동제어학술회의 논문집 국내학술편, 1996.