

타원 궤적 연결점을 이용한 일차매개곡선에 기반한 충돌회피 궤적 계획

Elliptic Coordinate of Connection Point for Collision-Free Path Planning Based on Linear Parametric Curve

°남궁 인

한국원자력연구소(Tel: 042-868-8774, E-mail: inamgung@nanum.kaeri.re.kr)

Abstracts The collision-free path planning presented here uses linear parametric curve with one intermediate connection point between start and target points. The algorithm, in which connection point is organized in elliptic coord. (θ, δ) , maps objects in Euclidean Space into images in CPS through intersection check between path and obstacles, a process defined as GM. Elliptic locus has special property that the total distance between focus points through a point on ellipse is the same regardless of θ . Hence by locating the start and target points to focus points of ellipse, and organizing connection point in elliptic coordinate, the δ -axis of CPS represents length of path. The GM of EWS requires calculation of interference in circumferential direction only. The procedures for GM is developed which include categorization of obstacles to reduce calculation amount. Simulations of GM of EWS, on a PC with Pentium/90MHz, is carried out to measure performance of algorithm and the results are reported on a table. The simulations are done for number of cases with different number of obstacles and location of start/target points.

Keywords Robot Path Planning, Geometry Mapping, Obstacle Avoidance

1. 서론

일차매개곡선을 이용한 로봇궤적계획에 대해서는 참고문헌 [1]에 연구되었다. 참고문헌 [1]에서는 두 개의 일차매개곡선을 하나의 중간 연결점, Q,에 연결시키고, 나머지점을 출발점, S,과 종착점, T,에 대응시켜 궤적을 구하였다. 중간 연결점의 위치를 극좌표에 대응시켜 로봇 작업공간상의 장애물을 연결점공간상의 이미지로 변환하였다. 본 논문에서는 중간 연결점의 위치를 타원좌표로(각도 (θ) , 장축 초점으로부터 거리 (δ)) 나타내어 중간 연결점 공간을 구성하였다. 이렇게 중간연결점을 타원상에 위치시키면, 주어진 δ 에 대해 궤적의 출발점으로부터 종착점까지의 거리가 각도에 관계없이 일정한 특징이 있다. 본 논문에서는 타원좌표에 기반한 기하매핑의 장애물 간섭에 대한 공식을 유도하고, 장애물의 분류 및 기하매핑 구현에 대해 논의하고 시뮬레이션들을 통하여 이론적 개념을 입증하였다.

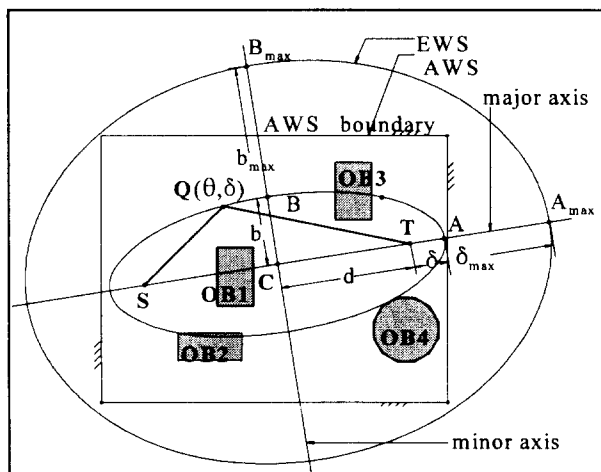


그림 1. 타원작업공간 및 타원좌표 중간연결점을 이용한 궤적
Figure 1. elliptic coord. of connection point for path planning

2. 하나의 중간연결점을 타원좌표한 기하매핑

그림 1에 보인바와 같이 출발점과 종착점을 직접연결하는 궤적이 장애물과 교차할 경우 하나의 중간 연결점을 설정하여 궤적을 구성할 수 있다. 이 연결점을 타원좌표에 대응시켜 실제작업공간 전체를 포함하도록 하여 가능한 궤적을 구할 수 있도록한다. 타원은 두 개의 변수로 정의된다. 일반적으로 타원은 장축과 단축의 길이를 변수로한 표준형으로 표현하면,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

그리고 매개변수를, θ , 이용한 매개함수로 표현하면,

$$\begin{aligned} R_x &= a \cos \theta \\ R_y &= b \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

타원의 장축길이 a는 다음과 같이 기하관계로 부터 구한다,

$$a = d + \delta = \frac{1}{2} \{ SQ + QT \} = BS = BT \quad (3)$$

그리고 타원의 단축길이 b는 a와 직각삼각형 CTB를 이용하면

$$b = \{ (d + \delta)^2 - d^2 \}^{\frac{1}{2}} = \{ \delta^2 + 2d\delta \}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

여기서 d는 중심점과 초점사이의 거리, 즉 $d = T-S / 2$ 이다. 식 (3)과 (4)를 식 (1)과 (2)에 삽입하여 타원의 식을 초점과 장축 사이의 거리 δ 및 장축으로 부터의 각도로 표현할수있다.

$$\frac{x^2}{(d + \delta)^2} + \frac{y^2}{\delta^2 + 2d\delta} = 1 \quad (5)$$

$$x = R_x(\delta, \theta) = (d + \delta) \cos \theta \quad (6)$$

$$y = R_y(\delta, \theta) = (\delta^2 + 2d\delta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta$$

이렇게 타원좌표로 표현된 중간연결점 공간을 타원작업공간으로 (EWS, Elliptic Workspace) 정의하고, 이 타원작업공간은 실제작업공간을(AWS, Actual Workspace) 포함해야된다. 그림 1 참조. 실제작업공간을 포함하는 최소의 타원작업공간을 구하기 위해서는 실제작업공간을 정의하는 모서리점의 값을 (5)에 삽입하여 가장 큰값을 나타내는 꼭지점을 찾고, (3)을 이용하여 δ_{max} 을 구한다.

이렇게 δ_{max} 을 구한후, δ 를 0에서 δ_{max} 까지 증가시키며, 장애물과 간섭을 일으키지않는 타원의 각도구간을 구한다. 장애물과 간섭을 일으키는 타원의 각도구간은 두가지 경우가 있다. 하나는 장애물과 타원이 두점에서 교차하는 것이고, 그림 2 참조, 다른 하나는 장애물이 타원과 한점에서 접촉하는 것이다.

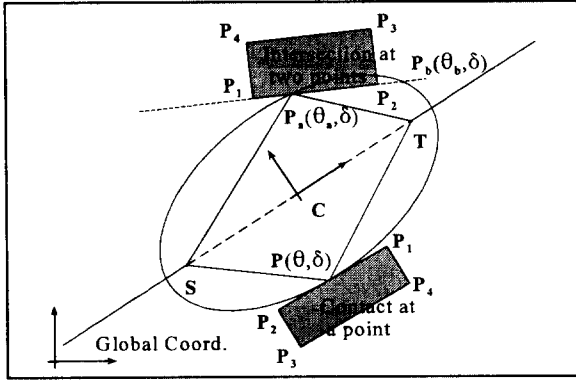


그림 2. 장애물과 타원간의 간섭

Figure 2. Intersection or contact of ellipse with obstacle edge
첫 번째 경우는 (5)의 (x,y) 에 장애물의 모서리를 매개함수의 형태로 표현하여 삽입하여 계산한다.

$$\frac{\{(P_{2x}-P_{1x})\mu+P_{1x}\}^2}{(d+\delta)^2} + \frac{\{(P_{2y}-P_{1y})\mu+P_{1y}\}^2}{\delta^2+2d\delta} = 1 \quad (7)$$

(7)에서 미지의 매개변수 δ 와 μ 는 각각 타원과 선분 P_1P_2 를 의미한다. 이것을 μ 의 내림차순으로 정리하면,

$$K\mu^2+2L\mu+M=0 \quad (8)$$

여기서 K, L, M은

$$\begin{aligned} K &= (P_{2x}-P_{1x})^2(\delta^2+2d\delta)+(P_{2y}-P_{1y})^2(d+\delta)^2 \\ L &= P_{1x}(P_{2x}-P_{1x})(\delta^2+2d\delta)+P_{1y}(P_{2y}-P_{1y})(d+\delta)^2 \\ M &= P_{1x}^2(\delta^2+2d\delta)+P_{1y}^2(d+\delta)^2-(\delta^2+2d\delta)(d+\delta)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

δ 값이 주어졌을 경우 K, L 및 M을 계산할수있고, (8)의 근은 다음의 형태로 나타난다.

$$\mu = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - KM}}{K} \quad (10)$$

장애물의 모서리와 타원사이의 관계는 $L^2=KM$ 는 접촉을, $L^2>KM$ 는 교차를, $L^2<KM$ 는 분리되어 있음을 나타낸다. 여기서는 장애물이 타원과 교차한 경우이므로 판별식이 $L^2>KM$ 를 만족하여야 한다. 교차점이나 접촉점은, $P(P_x, P_y)$, μ 값을 다음식에 대입하여 구한다.

$$\begin{aligned} P_x &= (P_{2x}-P_{1x})\mu+P_{1x} \\ P_y &= (P_{2y}-P_{1y})\mu+P_{1y} \end{aligned} \quad (11)$$

이제 P 점의 타원상의 각도는 (3)과 (4)로부터 구한 a와 b를 (2)에 대입하여 구한다.

타원과 장애물과 접촉이 일어난경우는 식(10)에서 판별식이 $L^2=KM$ 인 경우이다. 그래서 이것을 조건으로하여 타원의 크기를 나타내는 변수 δ 를 구할 수 있다. 즉 장애물의 모서리에 접하는 타원의 크기를 결정할수 있다.

$$\begin{aligned} L^2-KM &= \{ (P_{2x}-P_{1x})P_{1x}(\delta^2+2d\delta)+(P_{2y}-P_{1y})P_{1y}(d+\delta)^2 \}^2 - \\ &\{ (P_{2x}-P_{1x})^2(\delta^2+2d\delta)+(P_{2y}-P_{1y})^2(d+\delta)^2 \} \\ &\{ (P_{1x}^2(\delta^2+2d\delta)+P_{1y}^2(d+\delta)^2-(\delta^2+2d\delta)(d+\delta)^2) \} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

이식을 δ 의 내림차순으로 정리하면,

$$P\delta^2+2Pd\delta+R=0 \quad (13)$$

여기서 P와 R은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P &= (P_{2x}-P_{1x})^2+(P_{2y}-P_{1y})^2 \\ R &= P_{1x}^2d^2 - \{ (P_{2x}-P_{1x})P_{1y} - (P_{2y}-P_{1y})P_{1x} \}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

(13)의 근은 다음의 형태로 나타나고,

$$\delta = -d \pm \sqrt{d^2 - \frac{R}{P}} \quad (15)$$

이것을 (9)에 대입하여 μ 값을 다음으로부터 구한다.

$$\mu = -\frac{L}{K} \quad (16)$$

그리고 실제 접촉점의 위치는 μ 를 이용하여 구하고, 접촉점의 각도는 (2), (3) 및 (4)를 이용하여 얻는다.

첫번째 경우에서와 같이 타원의 크기를 미리 주어진경우, 타원과 장애물과 직접적인 교차는 일어나지 않지만 중간 연결점이 타원상에 있는 관계로 궤적과 장애물 사이의 간섭이 발생한다. 그림 3 참조. 이렇게 궤적과 장애물이 접촉하는 경우 출발점이나 종착점과 장애물의 모서리점을 연결한 선이 타원을 교차하고, 그각도를 장애물과 간섭이 일어난 각도로 간주할 수 있다. 타원좌표로 표현된 출발점과 종착점의 좌표는 $S(-d,0)$ 와 $T(d,0)$ 이다. 따라서 출발점과 모서리점을, $P(P_x, P_y)$ - 타원좌표로 변환후의

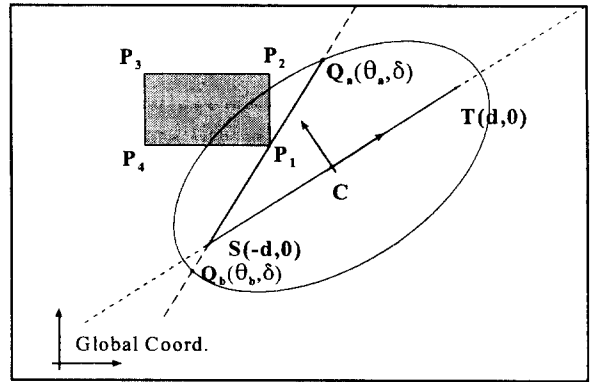


그림 3. 궤적 SQ와 장애물 사이의 간섭

Figure 3. Contact between path SQ and obstacle vertex.
좌표값, 연결하는 매개 곡선은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x &= (P_x+d)\mu-d \\ y &= P_y \mu \end{aligned} \quad (17)$$

(17)을 (5)에 대입한후 μ 의 내림차순으로 정리하면

$$A\mu^2-2B\mu-D=0 \quad (18)$$

여기서 A, B 와 D는 다음과 같고, δ 는 주어진 값이다.

$$\begin{aligned} A &= (d+\delta)^2P_y^2+(\delta^2+2d\delta)(P_x+d)^2 \\ B &= (\delta^2+2d\delta)(P_x+d)d \\ D &= (\delta^2+2d\delta)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

(18)로부터 μ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\mu = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + AD}}{A} \quad (20)$$

(20)은 판별식이 양이므로 항상 두 개의 근을 갖는다. 이것은 그림 3에서 보인바와같이 점 S를 지나는 선과 타원은 항상 두 개의 교점을 있음을 증명한다. 여기서 구하고자하는 μ 값은, 그림 3 참조, 두 개의 값중 큰 것이다. 이상과 같은 방법으로 종착점을 지나는 것에대해서도 μ 값을 구한다.

이상에서 유도한 세가지 장애물간섭 계산을 적절히 이용하여 기하매핑을 수행하는것에 대해 다음절에서 다룬다.

3. 기하매핑을 위한 장애물의 분류

앞절에서는 장애물과의 간섭을 일으키는 경계점의 각도를 구하는 것이었고, 간섭구간을 구하기 위해서는 추가적으로 장애물의 분류를 하여야 한다. 장애물의 분류를 통하여 장애물과의 간섭계산에 소요되는 시간 역시 감축시킬 수 있다. 본절에서는 장애물의 모양을 convex로 가정하였다. 장애물이 타원의 어느부분에 속하는지 그리고 장애물이 직선궤적 ST와 교차하는 위치를 구분하여 장애물을 분류한다.

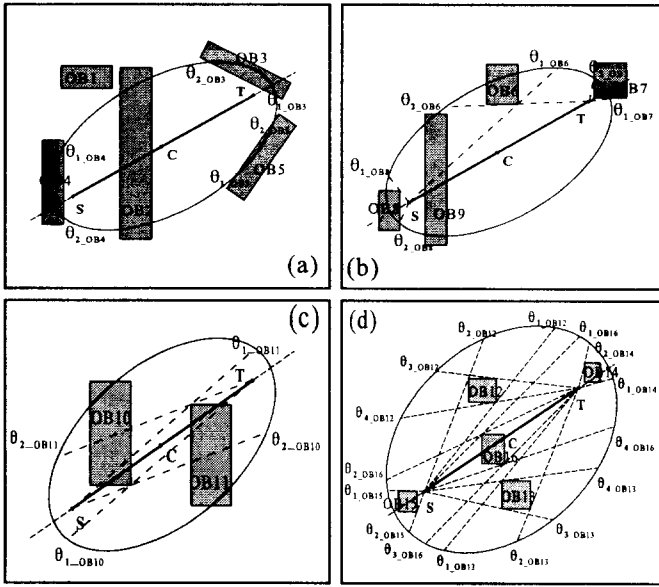


그림 4. 장애물의 위치에 따른 분류

Figure 4. Classification of obstacle

그림 4 (a) - (d) 에 장애물의 분류에대한 것이 도시되었고, 표 1에 장애물 분류에대한 조건 및 간섭각구간과 관련식에 대해 정리하였다.

표 1. 장애물분류 및 간섭각도구간

Table 1. Obstacle categorization and interference range of θ

case	조건	간섭각도 (θ°)	관련식	관련 그림
OB1	all vert. o_side ell., not int. seg. ST	none	none	(a)
OB2	all vert. o_side ell., int. seg. ST	$0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$	none	(a)
OB3	all vert. o_side ell., int. o_side T of ST	$0.0 \leq \theta \leq \theta_2$ $\theta_1 \leq \theta \leq 360^\circ$	9.10.11.3, 4.2	(a)
OB4	all vert. o_side ell., int. o_side S of ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	9.10.11.3, 4.2	(a)
OB5	all vert. o_side ell., not int. line ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	9.10.11.3, 4.2	(a)
OB6	intersect ellipse, not int. line ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	9.10.11.19, 20.17.3.4.2	(b)
OB7	int. ell., int. line outside T of ST	$0^\circ \leq \theta \leq \theta_2$ $\theta_1 \leq \theta \leq 360^\circ$	9.10.11.19, 20.17.3.4.2	(b)
OB8	int. ell., int. line outside S of ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	9.10.11.19, 20.17.3.4.2	(b)
OB9	int. ell. both side, int. line seg. ST	all $0 \leq \theta \leq 360^\circ$	none	(b)
OB10	int. ellipse upside, int. line seg. ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	19.20.17.3, 4.2	(c)
OB11	int. ell. downside, int. line seg. ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	19.20.17.3, 4.2	(c)
OB12	inside ellipse, above line ST	$\theta_1 < \theta < \theta_2$ $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_1$	19.20.17.3, 4.2	(d)
OB13	inside ellipse, below line ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_1$	19.20.17.3, 4.2	(d)
OB14	inside ellipse, int. line o_side S of ST	$0.0 \leq \theta \leq \theta_1$ $\theta_2 \leq \theta \leq 360^\circ$	19.20.17.3, 4.2	(d)
OB15	inside ellipse, int. line o_side T of ST	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	19.20.17.3, 4.2	(d)
OB16	inside ell., int. seg. ST	$\theta_1 \leq \theta < \theta_3$ $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$	19.20.17.3, 4.2	(d)

장애물과의 간섭각도는 δ 를 0에서 δ_{max} 로 증가시키며 주어진 δ 값에대해 수행한다. 이렇게 구해진 장애물의 이미지는 δ 값의 간격에 의존한다. 추가적으로 장애물이 타원과 접하는 δ 값을 구할 필요가 있다. 이것은 좀더 정확한 장애물의 이미지를 구하기 위해 필요한데, 식 (11), (14), (15), (16)과 (3), (4), (2)를 이용하여 구할 수 있다. 그림 4에는 각 장애물에대해 간섭을 일으키는 각도영역을 θ_1 와 θ_2 로 표시하였다. 각각의 장애물은 표1에 따라 장애물간섭 관련 식을 이용하여 각도를 구한후 그중 가장 큰 값과 작은값을 찾아서 각도구간을 결정해야한다.

4. 타원 작업공간의 기하매핑에 대한 시뮬레이션

타원작업공간의 기하매핑에대한 시뮬레이션을 수행하여 알고리즘의 성능을 제측하였다. 시뮬레이션에서는 기하매핑후의 연결점공간의 빈공간으로부터 충돌회피 궤적을 검색하는 것은 포함하지 않았다. 이 연결점공간의 검색은 여러 가지 다른 조건에 따라 수행가능하다. 즉 가장 안전한 궤적, 가장 짧은시간내에 충돌회피 궤적 계획, 또는 가장 짧은 충돌회피 궤적등이 있다. 그림 5 (a) - (f)에 보인 시뮬레이션 결과는 연결점 공간의 δ 축을 δ/δ_{max} 로하여 무차원화 하였다. 표 2에는 시뮬레이션의 결과를 요약하였다. 기하매핑은 장애물의 숫자와 출발점, S.과 종착점, T.의 위치에 관련이 있음을 보인다.

시뮬레이션 작업은 Pentium 90MHz/16Mb RAM 을 장착한 PC 의 DOS모드에서 수행되었다. 윈도우95에서 수행한 시뮬레이션은 그 결과가 윈도우의 특성상, 다중작업 환경, 일정한 결과를 나타내지 않았고, 대략 DOS모드의 두배정도 시간을 요구 하였다. 시뮬레이션 프로그램은 보랜드 C++/3.1을 사용하여 수행하였다. 시뮬레이션의 결과는 DXF(AutoCAD drawing interchange file format) 파일 형식으로 저장되어 직접 문서로 도입되었다. 이러한 작업을 위한 추가적인 DXF 라이브러리 프로그램 역시 개발되어 사용하였고, 연결점 공간을 플랫폼기위한 프레임 플랫폼 기능이 포함되어있다.

그림 5에서 각각의 장애물과 실제작업공간의 외부는 왜곡된 이미지로 투영되었다. 그림 5 (a)의 이미지는 서로 다른 부피로 나타내어 대응되는 장애물을 연관시켰고, 두 개의 궤적, 하나는 ST 선 위쪽 및 아래쪽의 궤적,을 보여준다. 이 궤적은 ST선의 양쪽의 가장 안전한 궤적을 나타내고, 빈공간에 내접하는 원 C_1 과 C_2 의 중심점에 해당한다. 가장 짧은 궤적은 δ 값이 가장 작으므로, 빈 공간상의 점중 δ 값이 가장작은 점을 검색하여 궤적을 구한다. 이러한 연결점 공간의 빈공간은 연결점 주변을 완만하게할 때, 그에 필요한 공간에 대한 정보를 제공한다.

그림 5 (f)의 예는 연결점공간에 빈공간이 존재하지않는 경우를 보여준다. 즉 궤적계획이 실패한 경우이다. 이러한 궤적계획의 실패여부는 기하매핑의 세밀도 (resolution)와도 관련이있어서, δ 의 증가폭을 작게하여 빈공간을 찾아낼수도있다. 반면 세밀도를 증가시키면 기하매핑의 시간을 많이 소요하게된다. 그림 5의 시뮬레이션은 δ/δ_{max} 의 증가율(세밀도)을 0.02로 하였고 대략 0.1 - 0.2 초의 기하매핑 시간을 보여줬다.

표 2. 시뮬레이션 결과

Table 2. Summary of simulation results

	실행시간 (초)	설정환경	δ/δ_{max} 증가율	성공여부
case 1	0.1291	그림 5, (a)	0.02	성공
case 2	0.0956	그림 5, (b)	0.02	성공
case 3	0.1176	그림 5, (c)	0.02	성공
case 4	0.1291	그림 5, (d)	0.02	성공
case 5	0.1137	그림 5, (e)	0.02	성공
case 6	0.1924	그림 5, (f)	0.02	실패

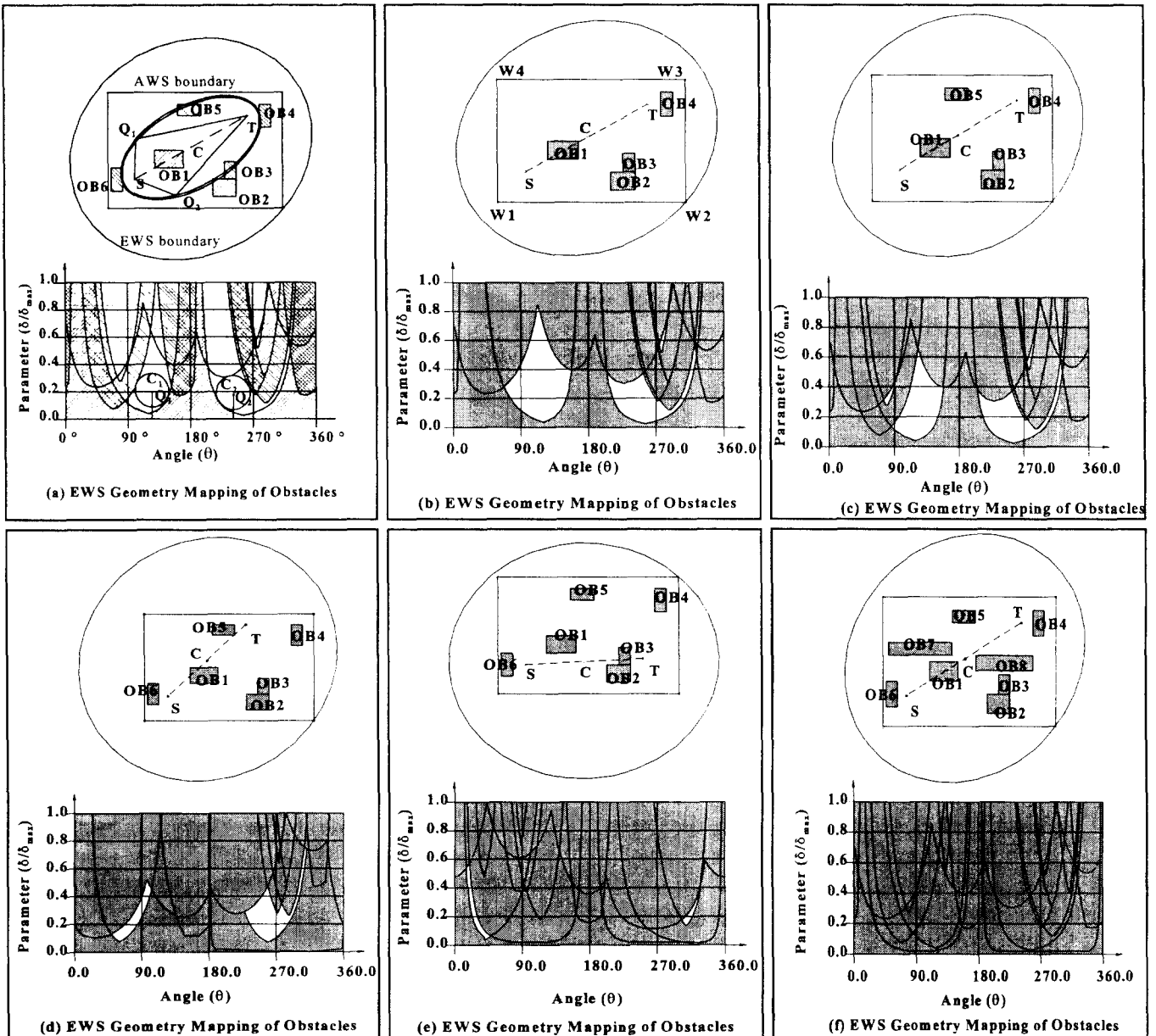


그림 5. 타원작업공간의 기하매핑 시뮬레이션 결과

Figure 5. Simulation of Geometry Mapping for various cases

6. 결론

본 논문에서는 일차매개곡선을 이용하고, 하나의 연결점을 타원좌표로 구성된 경우 충돌회피 궤적계획에 대해 이론적 전개 및 시뮬레이션을 수행하였다. 궤적과 장애물사이의 간섭여무를 계산하여 유클리드 공간상의 장애물을 연결점공간의 이미지로 플랫폼하였다. 이러한 작업을 타원좌표에 기반한 기하매핑으로 정의하였고, 이에필요한 장애물의 분류방법에 대해 논의 하였다. 기하매핑후 연결점공간의 이미지로 매핑되지않은 빈공간상의 한점은 유클리드 공간상의 충돌회피 궤적을 나타낸다. 즉 기하매핑은 유클리드공간상의 궤적계획문제를 연결점공간상의 점 선정의 문제로 변환시켰다.

알고리즘에 대한 시뮬레이션을 수행하여, 실행속도 및 시뮬레이션 구현 방법등에대해 논의하였다. 알고리즘은 연결점 공간에 유한한 개수의 빈공간을 생성하고, 이러한 빈공간의 존재유무로 궤적계획의 실패와 성공을 분명히 판별할 수 있다. 이 알고리즘에는 반복적(iterative) 계산이 포함되지 않고, 모든계산을 대수식으로

로 유도하여 문제의 복잡도에 따른 수행 속도를 예측할 수 있다. Pentium (90Mhz/16MB Ram) PC 를 사용하여 DOS 모드에서 시뮬레이션한 경우, $\delta/\delta_{max} = 0.002$ 이고 6개의 사각형 장애물이 존재할때 대략 0.12초의 수행시간을 소요하였다. 시뮬레이션 결과는 그림 5 및 표 2에 정리 하였다.

7. 참고문헌

- [1] Namgung, I., "A Collision-Free Path Planning Using Linear Parametric Curve Based on Circular Workspace Geometry Mapping", Journal of Control, Automation and Systems Engineering, In process.
- [2] Bézier, P., *Numerical Control-Mathematics and Application*, Translated by A.R. Forrest and A.F. Pankhurst, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [3] 남궁 인, "원형작업공간의 기하매핑에의한 일차 매개 곡선을 이용한 충돌회피 궤적계획", '96 Korea Automatic Control Conference, Oct. 24 - 26, 1996, Pohang, Korea