

# 불안정한 플랜트에 대한 멀티레이트 IMC 제어기 설계

## Multirate IMC Controller Design for Unstable Plants

°김 영 백\*, 이 상 정\*

\*국방과학연구소(Tel:821-3538; Fax:821-2225; E-mail:kyb0100@Unitel.co.kr)  
\*충남대학교 전자공학과(Tel:821-6582; Fax:823-4494; E-mail:eesjl@cslab.chungnam.ac.kr)

**Abstracts** In this paper, we design a stabilizing controller with disturbance rejection properties for multirate sampled-data systems which have periodic output measurement scheme. We assume that the plant is open-loop unstable and the disturbance consists of a sum of finite number of sine waves with different frequencies. A sufficient condition for maintaining observability in multirate sampled-data systems is derived. The proposed controller has an IMC structure and can be decomposed into the filtered-disturbance estimator and the inverse of the fast uniform sampled model of the pre-stabilized plant. An example is presented for illustrations.

**Keywords** multirate, IMC(Internal Model Control), disturbance rejection

### 1. 서론

멀티레이트 디지털 제어는 1950년대 초부터 시작되어 많은 사람들이 지속적인 관심을 보여 온 연구 분야이다. 초기에 멀티레이트 디지털 제어에 관한 연구는 항공 분야에서 제어기 구현상의 필요성 때문에 시작되었으나 곧 이어 여러 가지 분산 시스템에 대한 제어 분야에도 응용되기 시작했다. 최근 들어 주기적인 멀티레이트 이산 제어기로 선형 시불변 플랜트를 제어하는 문제가 활발히 연구되고 있으며 영점 배치[1][3], 강인성 개선[1][10], 모델 matching과 비결합[5]등의 여러 제어 문제에 종래의 선형 시불변 제어기보다 주기성을 갖는 멀티레이트 제어기가 우수하다는 것이 발표되었다. 한편으로 화학 공정이나 기계 공정들 중에는 주기적인 특성을 갖는 플랜트들이 많이 있어서 이에 대한 제어 문제는 자연스럽게 주기적인 모델로 표현된 플랜트에 멀티레이트 제어 방식이나 주기적인 제어 방식을 사용하게 되었다 [7][8].

본 논문에서는 개루프 상태에서 불안정한 플랜트에 대해 주기적인 출력 측정 방식을 취하는 멀티레이트 표본 데이터 시스템에서 안정화 제어기 설계 방법을 제안한다. 먼저 2장에서 본 논문에서 다루는 멀티레이트 표본 데이터 시스템과 설계 문제를 설명하고, Goodwin등이 제안한 안정화 제어기를 소개한다. 그리고 lifting 방식을 이용해서는 위의 안정화 제어기를 본 논문에서 다루는 설계 문제에 적용할 수 없음을 보인다. 3장에서는 이 문제를 해결하기 위한 2단계 설계 과정을 제안한다. 즉, 주어진 멀티레이트 제어 시스템의 안정화 제어기 설계 문제를 외란 신호를 필터링한 형태로 나타나는 IMC 제어기 입력 신호의 추정기와 선 안정화 플랜트를 일정한 샘플링 주기로 이산화한 전달함수를 이용하여 IMC 제어기를 설계하는 것으로 문제를 해결할 수 있음을 보이고 예제를 통해 성능을 검증한다. 마지막으로 4장에서 결론을 맺는다.

### 2. 문제 설정

그림 2.1의 멀티레이트 표본 데이터 폐환 시스템을 고려해 보자. 먼저  $G_p(s)$ 의 ZOH 등가 상태 공간 모델을 다음과 같이 두면

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.1)$$

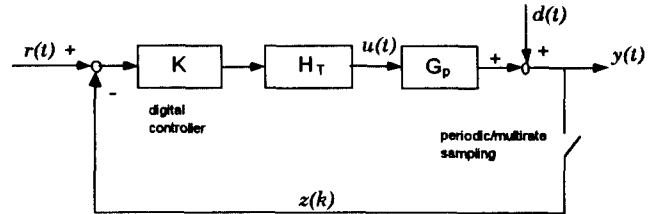


그림 2.1. 주기적인 측정을 하는 멀티레이트 표본 데이터 시스템.

Fig. 2.1. Sampled-data feedback system with periodic measurement.

$$y(k) = Cx(k) + d(k). \quad (2.2)$$

측정된 출력  $z(k)$ 는

$$z(k) = P(k)y(k) \quad (2.3)$$

으로 표시할 수 있다. 여기서  $P(k)$ 는 주기적인 측정을 나타내는 연산자로 출력의 측정 유무에 따라 1 또는 0의 값을 갖으며 출력의 수에 따라 차수가 결정되는 대각 행렬이다. 따라서 본 논문에서 다루는 멀티레이트 표본 데이터 시스템의 상태 공간 모델은 다음과 같다:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2.6)$$

$$z(k) = C(k)x(k) + P(k)d(k). \quad (2.7)$$

여기서  $C(k) = P(k)C$ ,  $C(k+N) = C(k)$ ,

$P(k+N) = P(k)$ 이다.

본 논문에서 주어진 멀티레이트 표본 데이터 시스템에서 외란 제거 특성을 갖는 안정화 제어기를 설계하고자 한다. 개루프 상태에서 불안정한 플랜트에 대해 IMC 구조를 갖는 안정화 제어기는 그림 2.2와 같다[14]. 그림 2.2에서  $G_p$ 는 전달함수가  $B/A$ 인 연속 시간 플랜트이고  $Q$ 는 플랜트 모델의 역이 포함되어 있는 안정하고 proper한 제어기이다.  $P/L$ 은 다음의 조건을 만족하는 선 안정화 제어기(pre-stabilizing controller)이다.

$$\hat{A}L + \hat{B}P = E_1E_2 \quad (2.6)$$

여기서  $E_1$  과  $E_2$  는 Hurwitz 다항식이다.

이때 외란과 출력 사이의 페루프 전달함수는 다음과 같다.

$$y = \frac{\hat{A}L}{\hat{A}L + \hat{B}P}(1 - Q\frac{\hat{B}}{E_1})d. \quad (2.6)$$

그러므로 외란 제거를 위한 최적의 제어기는 다음과 같다.

$$Q = (\hat{B}/E_1)^{-1}. \quad (2.7)$$

그러나 제어기가 플랜트 모델의 역을 포함하는 것은 무한대의 계환 이득이나 비최소 위상 영점 등의 이유로 구현할 수 없는 경우가 많다. 그러므로 실제적인 IMC 제어기는 비최소 위상이나 시간 지연 요소 등을 제외하여 플랜트 전달함수의 역을 구하고 제어기의 전달함수가 improper가 되는 것을 방지하기 위해 전치 필터를 추가하여 사용하는 것이 일반적이다. 그림 2.3에 위의 안정화 제어기를 어떻게 본 논문의 설계 문제에 적용할 것인가를 보였다. 멀티레이트 또는 주기적인 시스템에 대한 제어 문제는 lifting 방식을 이용하여 주어진 시스템을 shift-invariant 형태로 변환하여 해결하는 것이 일반적이다[4][9][11]. 개루프 상태에서 불안정한 플랜트에 대한 lifted 시스템의 IMC 제어기 구조는 그림 2.4와 같다. 그림 2.4에서 첨자 L은 lifting 연산을 나타낸다. 만약 모델이 정확하다면  $Q_L = (\hat{B}/E_1)_L^{-1}$ 이 최적의 제어기가 된다. 그러나 본 논문에서 다루는 문제는 lifted 시스템의 전달함수 행렬의 역을 구하는 그 자체가 불가능하다[12]. 따라서 지금까지의 결과를 그대로 적용할 수 없다.

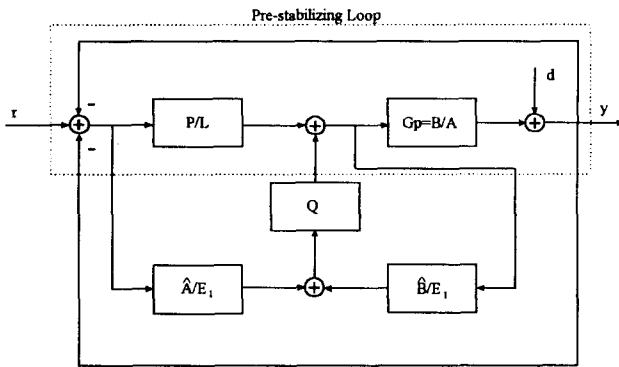


그림 2.2. 안정화 제어기 구조.

Fig. 2.2. An interesting class of all stabilizing controllers.

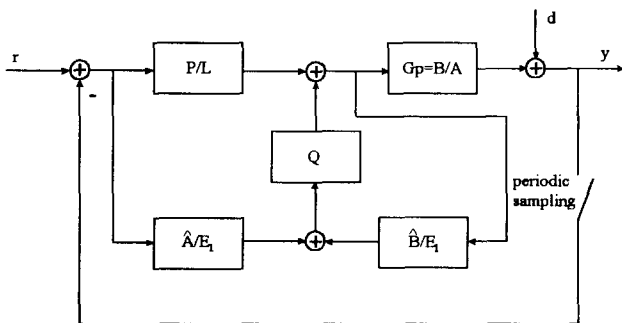


그림 2.3. 주기적인 측정을 하는 안정화 제어기 구조.

Fig. 2.3. A stabilizing controller with zigzag measurement scheme.

### 3. 외란 제거를 위한 제어 구조

이 절에서는 개루프 상태에서 불안정한 플랜트에 대해서 주어진 멀티레이트 표본 데이터 시스템의 lifted 시스템의 전달함수 행렬이 singular인 문제점을 해결하기 위한 설계 과정을 제안한

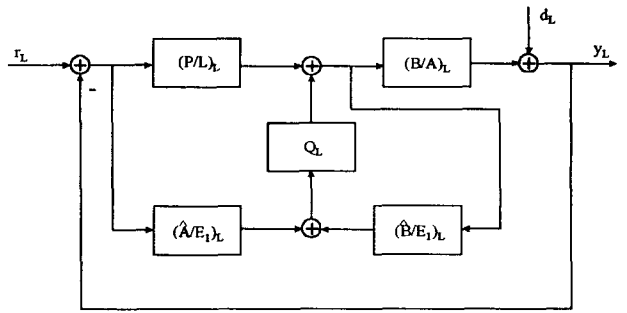


그림 2.4. lifted 시스템의 안정화 제어기 구조.

Fig. 2.4. IMC structure for the lifted system.

다. 안정한 플랜트에 대한 IMC 구조로부터 유사한 문제를 해결하였다. 안정한 플랜트에 대한 IMC 제어기 구조에서 만약 모델이 정확하다고 가정하면 계환 되는 신호는 외란 신호이다. 그러므로 앞 절의 주기적인 출력 추정 방식에 의해 빠르게 된 출력 샘플 값, 즉 외란 신호를 적절히 추정할 수 있다면 IMC 제어기를 설계하는 데 singular인 lifted 모델의 전달함수 행렬이 아니라 빠른 샘플링 주기로 일정하게 이산화한 nonsingular 전달함수를 사용할 수 있게 된다[12].

이제 이상의 결과를 불안정한 IMC 구조의 제어기 설계 문제에 적용해 보고자 한다. 플랜트 모델이 정확하다면 IMC 제어기 Q의 입력 단에서 외란 신호가 필터를 통과한 형태인  $(\hat{A}/E_1)d$ 를 관측할 수 있다. 그러므로  $(\hat{A}/E_1)d$ 에 대한 추정기를 설계해야 한다. 만약 이 추정기를 설계할 수 있다면 식 (2.7)의 lifted 모델이 아니라 일정한 샘플링 주기로 이산화한 모델로 IMC 제어기를 설계할 수 있다. 본 논문에서 외란이 유한개의 정현파의 합으로 구성되었다고 가정하면 외란의 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}_d(t) = A x_d(t), \quad (3.1)$$

$$d(t) = C x_d(t) + v(t), \quad (3.2)$$

여기서

$$A = \text{diag} [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n], \quad (3.3)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ for } i=1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

$$C = [c_1 \ 0 \ c_2 \ 0 \ \dots \ c_n \ 0], \quad (3.5)$$

$$x_d^T(0) = [0 \ \omega_1 \ 0 \ \omega_2 \ \dots \ 0 \ \omega_n] \quad (3.6)$$

이고  $v(t)$ 는 스펙트럼 밀도가 R인 백색 가우시안 잡음(white Gaussian noise)이고 편의상  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ 라고 가정한다. 식 (3.5)에서 역 벡터  $c_i$ 들은 외란을 구성하는 정현파들의 가중치를 나타내는 것으로 영(zero) 벡터가 되면 무의미하게 된다. 따라서  $c_i$ 가 영 벡터가 아니면 위의 정현파의 합으로 구성된 외란의 모델은 가관측성을 갖는 것을 쉽게 알 수 있다. 이 외란 모델을 주기적인 측정 방식에 의해 멀티레이트 표본 데이터 시스템으로 이산화한 결과는 다음과 같다.

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k), \quad (3.7)$$

$$z(k) = P(k)C_d x_d(k) + P(k)v(k), \quad (3.8)$$

주어진 주기적인 샘플링에 의한 멀티레이트 표본 데이터 시스템에서 다음의 조건은 가관측성을 유지하는 충분조건이 된다[15].

$$\omega_n \Delta < (M/N)\pi. \quad (3.9)$$

여기서  $M$ 은 주기  $N\Delta$  내에서 행한 샘플링 회수이다.

이제 필터식  $\hat{A}/E_1$ 을 고려해 보자. 불안정한 플랜트를 고려하고 있으므로 다항식  $\hat{A}$ 는 양의 실수 부분을 갖는 해를 최소한 하나 이상 갖고  $E_1$ 은 Hurwitz이다. 기본 샘플링 주기  $\Delta$ 로 이산화한 필터식을 다음과 같이 가정한다.

$$x_f(k+1) = A_f x_f(k) + B_f z(k), \quad (3.10)$$

$$d_e(k) = C_f x_f(k) + D_f z(k). \quad (3.11)$$

필터를 통과한 외란의 식은 필터식과 외란식을 직렬로 연결하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B\xi(k), \quad (3.12)$$

$$d_e(k) = C(k)x(k) + \eta(k), \quad (3.13)$$

여기서

$$x(k) = [x_d(k) \ x_f(k)]^T, \quad (3.14)$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} A_d & \mathbf{0} \\ B_f P(k) C_d & A_f \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$B = [\mathbf{0} \ B_f]^T, \quad (3.16)$$

$$C(k) = [D_f P(k) C_d \ C_f]^T, \quad (3.17)$$

$$\xi(k) = P(k)v(k), \quad \eta(k) = D_f P(k)v(k), \quad (3.18)$$

$$A(k) = A(k+N), \quad C(k) = C(k+N). \quad (3.19)$$

위 식에서 프로세스 잡음과 측정 잡음은 서로 상관되어 있음을 알 수 있다. 이제 필터를 통과한 외란의 가관측성을 고려해 보자.

**정리 3.1:** 샘플링 주기가  $\omega_n \Delta < (M/N)\pi$ 을 만족하면, 필터링한 외란 식 (3.12)-(3.13)은 가관측성을 갖는다.

**증명 :** 외란을 주기적으로 샘플링 했을 때, 샘플링 주기가  $\omega_n \Delta < (M/N)\pi$ 을 만족하면 샘플링 후에도 외란은 가관측성을 갖고 외란의 모든 극점은  $z$  평면에서 단위 원의 원주 위에 존재한다. 이런 외란의 특성과 함께 플랜트가 불안정하지만 외란과 같은 모드는 갖지 않는다고 가정하면  $E_1$ 은 Hurwitz이므로  $\hat{A}/E_1$ 과  $d$  사이에 극점과 영점의 상쇄가 발생하지 않는다. 따라서 식 (3.12) - (3.13)은 가관측성을 갖는다. Q. E. D

필터링한 외란의 lifted 모델은 다음과 같다.

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{B} \bar{\xi}(k), \quad (3.20)$$

$$\bar{y}(k) = \bar{C} \bar{x}(k) + \bar{D} \bar{\eta}(k), \quad (3.21)$$

여기서

$$\bar{x}(k) = x(kN), \quad (3.22)$$

$$\bar{y}(k) = [y(kN) \ y(kN+1) \ \dots \ y(kN+N-1)]^T, \quad (3.23)$$

$$\bar{\xi}(k) = [P(kN)v(kN) \ P(kN+1)v(kN+1) \ \dots \ P(kN+N-1)v(kN+N-1)]^T, \quad (3.24)$$

$$\bar{\eta}(k) = [D_f P(kN)v(kN) \ D_f P(kN+1)v(kN+1) \ \dots \ D_f P(kN+N-1)v(kN+N-1)]. \quad (3.25)$$

$\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ 와  $\bar{D}$ 는 lifting technique을 사용하면 쉽게 구할 수 있다[4][9][11]. 이제 프로세스 잡음과 측정 잡음이 서로 상관된 경우에 대한 Kalman 필터는 다음과 같이 구할 수 있다[2].

$$\Sigma(k+1)^- = (A - KC)\Sigma(k)(A - KC)^T + BQB^T - KRK^T, \quad (3.26)$$

$$K = BSR^{-1}, \quad (3.27)$$

$$\hat{x}(k+1)^- = A\hat{x}(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k)], \quad (3.28)$$

$$G(k+1) = \Sigma(k+1)^- C^T (C\Sigma(k+1)^- C^T + R)^{-1}, \quad (3.29)$$

$$\Sigma(k+1) = (I - G(k+1)C)\Sigma(k+1)^-, \quad (3.30)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1)^- + G(k+1)[y(k+1) - C\hat{x}(k+1)^-], \quad (3.31)$$

$$\Sigma(0) = \text{var}(x_0), \quad (3.32)$$

여기서  $G(k)$ 는 Kalman 필터의 이득 행렬이고  $Q$ 와  $R$ 은 프로세스 잡음과 측정 잡음의 공분산 행렬이며  $S$ 는 이 두 잡음간의 상호 공분산(cross covariance) 행렬이다. 이 Kalman 필터를 이용하면 샘플링 주기  $N\Delta$ 의 신호만 추정할 수 있으므로 기본 샘플링 주기  $\Delta$ 로 일정하게 이산화한 모델로 기본 샘플링 주기의 신호를 보간(interpolation)해 내야 한다.

이상의 결과를 요약하면, 지그재그 형태의 출력 측정 방식을 취하는 주어진 멀티레이트 표본 데이터 시스템에서 플랜트가 개루프 상태에서 불안정하고 외란이 유한개의 정현파의 합으로 주어질 때, 외란을 최적으로 제거할 수 있는 안정화 제어를 IMC구조로 구현할 수 있다. 이때 IMC제어기는 필터를 통과한 외란을 추정하는 칼만 필터와 보간기(Interpolator) 및 기본 샘플링 주기로 일정하게 이산화한 플랜트 모델의 역으로 구현할 수 있다. 제안된 IMC 제어 시스템은 그림 3.1과 같다.

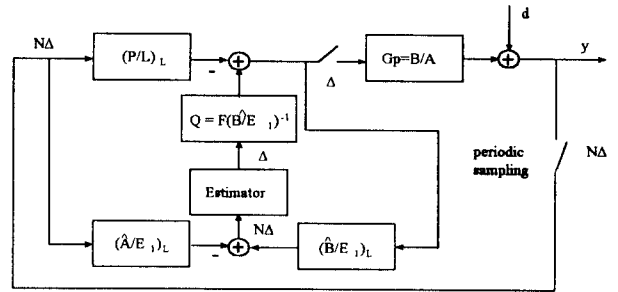


그림 3.1. 제안된 IMC 제어 시스템.  
Fig. 3.1 The proposed IMC control system.

**예제**

다음과 같은 전달함수를 갖는 시스템을 고려해 보자.

$$G_p(s) = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{s+1}{s-1}. \quad (3.33)$$

이때 그림 2.2에서 선 안정화 제어기  $E_1$ 은 다음과 같다.

$$\frac{P(s)}{L(s)} = \frac{3}{s+1}, \quad (3.34)$$

$$E_1 = s+2. \quad (3.35)$$

외란은 서로 다른 주파수 1 rad/sec와 2 rad/sec를 갖는 두 개의 정현파의 합으로 표현되며 출력 측정은  $4\Delta$ 내에서 2번 샘플링하는 것으로 가정한다. 즉,  $P(k) = (10011001 \dots)$ . 외란의 시연속 모델은 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{x}_d(t) = A x_d(t), \quad (3.36)$$

$$d(t) = C x_d(t) + v(t), \quad (3.37)$$

여기서

## 참고문헌

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad (3.39)$$

$$x_d^T(0) = [0 \ 1 \ 0 \ 2]. \quad (3.40)$$

샘플링 주기를 정리 3.1에 따라  $\Delta = 0.2$  sec 로 선정하면 식 (3.26) - (3.32)를 이용하여 Kalman필터를 설계할 수 있다. 그림 3.2에서 Kalman 필터를 이용하여 추정한 결과를 보면 lifting에 의한 시간 지연 요소가 있지만 Kalman 필터가 필터링한 외란을 잘 추정해 감을 알 수 있다.

최적의 연속시간 IMC 제어기는

$$\tilde{q} = \frac{E_1}{B} = \frac{s+2}{s+1}. \quad (3.41)$$

이고 이를 샘플링 주기  $\Delta = 0.2$ sec로 이산화하고 Kalman 필터와 함께 IMC 제어기를 구성할 수 있다.

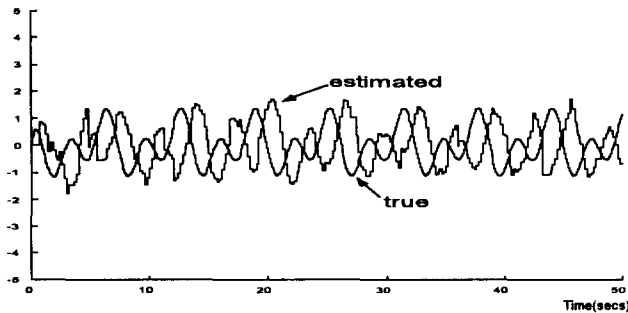


그림 3.2. 추정 결과.

Fig. 3.2. Estimation result.

## 4. 결론

본 논문에서는 개루프 상태에서 불안정한 플랜트에 대해 지그재그 형태의 주기적인 출력 측정 방식을 갖는 멀티레이트 표본 데이터 시스템에서 외란 제거 특성을 갖는 IMC 구조의 안정화 제어기 설계 방법을 제안하였다. 멀티레이트 시스템에 대한 제어 문제는 lifting 기법을 이용하여 제어기를 설계하는 것이 일반적이나, 지그재그 형태의 주기적인 출력 측정 방식을 취할 경우 시스템의 lifted 모델이 singular가 되어 플랜트 전달함수의 역을 포함하는 IMC 구조의 제어 시스템은 구현할 수 없게 된다. 본 논문에서는 불안정한 플랜트에 대한 IMC 제어 시스템에서 IMC 제어기  $Q$ 로 입력되는 신호를 기본 샘플링 주기로 추정함으로써 이 문제를 해결하였다. 즉, 필터링한 외란 신호가 매 샘플링 순간 존재하면, IMC 제어기  $Q$ 를 설계하는 데 lifted 모델이 아니라 일정하게 샘플링된 선 안정화 플랜트의 전달함수를 사용할 수 있으므로 IMC 구조를 갖는 안정화 제어기를 설계할 수 있음을 보였다. 즉, 본 논문에서는 주어진 멀티레이트 표본 데이터 시스템에 대해 외란 제거 특성을 갖는 IMC 구조의 안정화 제어기 설계 문제를 필터링한 외란을 추정하는 칼만 필터의 설계 과정과 기본 샘플링 주기로 일정하게 이산화한 안정화 모델의 역을 이용하여 IMC 제어기를 설계하는 과정으로 이원화하여 해결하는 설계 방법을 제안하였다.

- [1] B. A. Francis and T. T. Georgiou, "Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers," *IEEE tran. Automat. Contr.*, vol. AC-33, pp.820-832, 1988.
- [2] C.K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] C. Zhang, "A dual rate digital compensator for zero assignment," *Systems and Control Letters*, vol.19, pp.225-232, 1992.
- [4] D. G. Meyer, "A parameterization of stabilization controllers for multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-35, no.2, pp.233-236, 1990.
- [5] D. G. Meyer, "A new class of shift-varying operators, their shift-invariant equivalents and multirate digital systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-35, pp.429-433, 1990.
- [6] G.C. Goodwin, S.F. Graebe and W.S. Levine, "Internal Model Control of Linear Systems with Saturating Actuators," *Proc. ECC'93*, Groninger, The Netherlands, 1993.
- [7] K. Onogi and M. Matsubara, "Structure analysis of periodically controlled chemical process," *Chem. Eng. Sci.*, vol.34, pp.1009-1019, 1990.
- [8] K. Schadlich, U. Hoffmann and H. Hoffman, "Periodical operation of chemical process and evaluation of conversion improvements," *Chem. Eng. Sci.*, vol.38, pp.1375-1384, 1983.
- [9] M. A. Dahleh, P. G. Voulgaris and L. S. Valavani, "Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-37, no.1, pp.90-99, 1992.
- [10] P. Alberto, "Block multirate input-output model for sampled-data control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, pp.1085-1088, 1990.
- [11] R. Ravi, P. P. Khargonekar, K.D.Minto and C.N.Nett, "Controller parameterization for time-varying multirate plants," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-35, no.11, pp.1259-1262, 1990.
- [12] 김영백, 이상정, "멀티레이트 표본 데이터 제어 시스템의 안정화," 제어.자동화.시스템공학 논문지, 제 2권 제 2호, pp. 73-80, 1996.