

# 공력 조종 STT 유도탄의 동특성 해석

## Analysis of Dynamic Characteristics of Aerodynamically Controlled STT Missiles

송찬호, <sup>0</sup>전병을

국방과학연구소 (Tel: (042) 821-4411,4413, Fax: (042) 821-2224)

**Abstracts** We propose a new linearized model which can be used very efficiently for the design and analysis of the autopilot of aerodynamically controlled skid-to-turn missiles. Proposed model is based on the linearized equations of the missile dynamics derived in the aerodynamic frame where xz plane contains the missile longitudinal axis and velocity vector. However, to take the effect due to the small perturbation of the missile body into consideration, we introduce a new frame which is identical to the aerodynamic frame in the trim state but after small perturbation it moves fixed with the missile body, and finally, the proposed model is set up in this frame. It is shown by nonlinear simulations and stability analysis of a numerical example that the new model describes the missile motion better than the conventional one linearized in the body frame with a certain amount of simplification.

**Keywords** Missile dynamics, Autopilot, Aerodynamic control, Modeling, Stability analysis

### 1. 서론

공력학적으로 제어되는 십자형(cruciform) 유도탄의 오토파일럿은 피치, 요 및 롤 운동이 독립적인 것으로 보고 각각의 제어기를 별도로 설계하는 것이 일반적이고[1,2], 유도탄의 횡방향 기동(maneuver)이 크지 않은 경우에는 이러한 가정이 대체로 타당하다. 그러나 유도탄의 기동가속도의 크기가 증가함에 따라 피치, 요 및 롤 운동간의 상호결합(cross-coupling)이 급격히 커지게 되어 각 운동이 독립적이라는 가정은 더 이상 유효하지 않다. 따라서 상호결합이 큰 영역까지의 고기동이 요구되는 유도탄의 제어기 설계 및 제어시스템 해석에는 각 운동간의 상호결합 효과를 반영하여야 한다.

오토파일럿의 설계 및 해석을 위해 일반적으로 사용되어온 동력학 모델은 인듀스드(induced) 요 모멘트나 힘 또는 피치와 요 경로 간의 커플링을 무시하고 동체좌표계(body axis)에서 세운 운동방정식에 기초하고 있는데, 이러한 모델은 유도탄 운동 특성을 정확히 묘사한다고 보기 어렵다. 최근에 동체좌표계에서 뱅크각만큼 회전된 '공력 좌표계(aerodynamic frame)'에 대하여 세워진 유도탄의 운동 방정식을 이용하여 오토파일럿을 설계하는 새로운 시도[3]가 있었는데, 본 논문에서는 이 연구 결과를 근거로 트림 상태에서는 공력 좌표계와 일치하고 미소 섭동이 있으면 유도탄 동체 좌표계에 붙어 움직이는 새 좌표계를 기동 좌표계(maneuver frame)라 정의하고 이 좌표계에서 새로운 선형모델을 유도한다. 우선 공력 좌표계에서 유도된 유도탄 운동 방정식을 선형화하고 그 결과를 근거로 기동 좌표계에 대한 선형모델을 구한다. 기존에 널리 사용되어온 모델에서 흔히 무시되던 비선형 시뮬레이션 및 안정도 해석 등을 통하여 보인다.

### 2. 좌표계의 정의 및 운동방정식

널리 사용되는 유도탄 동체 좌표계( $x^b, y^b, z^b$ )는 유도탄의 축 방향을  $x^b$ 축으로 하고  $x^b$ 축에 수직인 횡방향에서 유도탄에 수

직으로 장착된 두 쌍의 날개를 각각  $y^b$  및  $z^b$ 축으로 정의하며, 공력 좌표계( $x^m, y^m, z^m$ )에서  $x^m$ 축은 동체좌표계와 일치하고  $y^m$  및  $z^m$ 축은 유도탄 동체축을 중심으로 뱅크각(bank angle:  $\Gamma$ ) 만큼 회전시킨 좌표축이다. 따라서 동체좌표계와 공력 좌표계 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} y^m \\ z^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ -\sin \Gamma & \cos \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^b \\ z^b \end{bmatrix} = T_b^m(\Gamma) \begin{bmatrix} y^b \\ z^b \end{bmatrix} \quad (1)$$

적절한 가정하에 공력 좌표계에서 총받음각 및 뱅크각을 상태 변수로 포함하는 유도탄의 운동방정식을 세우면 다음과 같은 식이 얻어진다[3].

$$\begin{aligned} \dot{v}_m &= (X^m \cos \alpha_t + Z^m \sin \alpha_t) v_m \\ \dot{\Gamma} &= p^b + (Y^m - r^m \cos \alpha_t) / \sin \alpha_t \\ \dot{\alpha}_t &= q^m + (-X^m \sin \alpha_t + Z^m \cos \alpha_t) \\ \dot{q}^m &= M^m + M_q^m q^m - \frac{I_{xx}}{I_{zz}} r^m p^b + (p^b - \dot{\Gamma}) r^m \\ \dot{r}^m &= N^m + N_r^m r^m + \frac{I_{xx}}{I_{yy}} q^m p^b - (p^b - \dot{\Gamma}) q^m \\ \dot{p}^b &= L^b + L_p^b p^b \\ \dot{\phi}^b &= p^b + q^b \tan \theta^b \sin \phi^b + r^b \tan \theta^b \cos \phi^b \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서  $v_m$ 은 유도탄의 속도,  $\alpha_t$ 는 총 받음각,  $p^b, \phi^b$ 는 동체 좌표계에서 표현된 롤 각속도 및 롤 각,  $q^m, \theta^m$  및  $r^m, \psi^m$ 는 각각 공력 좌표계에서 표현된 피치 및 요 각속도와 각이고,  $X^m, Y^m, Z^m$  및  $L^b, M^m, N^m$ 은 각각 유도탄에 작용하는 공력학적 힘 및 모멘트를 뜻한다. 또한  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ 는 유도탄의 각 축에 대한 관성모멘트,  $M_q^m, N_r^m$ 는 공력학적 감쇠계수를 나타낸다.

(2)식으로 주어진 유도탄 비선형 운동방정식의 롤 운동 관련 식은 나중에 다루기로 하고 우선 속도, 피치 및 요 운동과 관련된 수식을 선형화 하자. 미소섭동에 의한 선형화를 위해 다음과 같은 가정을 사용한다.

- 가정 1. 유도탄의 속도는 일정하다.
  - 가정 2. 미소 섭동 항의 곱은 무시할 수 있다.
  - 가정 3. 공력 좌표계의 요운동 관련 공칭항(또는 트림 값)의 크기는 무시할 수 있다.
- 위의 가정에 따라 (2)식에 주어진 피치 및 요 운동 관련식을

선형화하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\gamma} \\ \Delta\dot{\alpha}_t \\ \Delta\dot{q}^m \\ \Delta\dot{r}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\gamma & Y_{\alpha_t} & 0 & Y_r \\ Z_\gamma & Z_{\alpha_t} & 1 & 0 \\ M_\gamma & M_{\alpha_t} & M_q & 0 \\ N_\gamma & N_{\alpha_t} & 0 & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \\ \Delta q^m \\ \Delta r^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_z^m} & 0 \\ 0 & Z_{\delta_z^m} \\ 0 & M_{\delta_z^m} \\ N_{\delta_z^m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_y^m \\ \Delta\delta_z^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_\beta \\ 0 \\ 0 \\ N_\beta \end{bmatrix} \Delta p^b \quad (3)$$

여기서  $\Delta(\cdot)$ 는  $(\cdot)$ 에 대한 미소섭동,  $\delta_y^m, \delta_z^m$ 은 공력 좌표계의 각 기동축에 대한 제어편각,  $Y_\gamma$  등으로 표시된 행렬요소는 각각 공력학적 힘 혹은 모멘트에 대한 차원미계수를 뜻한다. 또한  $(\cdot)$ 로 표시된 행렬요소 및 새로운 상태변수  $\gamma$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \bar{\alpha}_t \Delta\Gamma & (4) \\ Y_{\alpha_t} &= Y_{\alpha_t} - \bar{Y}^m / \bar{\alpha}_t \\ Z_{\alpha_t} &= Z_{\alpha_t} - X_{\alpha_t} \bar{\alpha}_t - \bar{X}^m - \bar{Z}^m \bar{\alpha}_t \\ Z_\gamma &= Z_\gamma / \bar{\alpha}_t - X_\Gamma \\ Z_{\delta_z^m} &= Z_{\delta_z^m} - X_{\delta_z^m} \bar{\alpha}_t \\ N_\gamma &= N_\gamma + \bar{q}^m Y_\gamma / \bar{\alpha}_t & (5) \\ N_{\alpha_t} &= N_{\alpha_t} + \bar{q}^m Y_{\alpha_t} / \bar{\alpha}_t \\ N_r &= N_r + \bar{q}^m Y_r / \bar{\alpha}_t \\ N_{\delta_z^m} &= N_{\delta_z^m} + \bar{q}^m Y_{\delta_z^m} / \bar{\alpha}_t \\ N_\beta &= N_\beta + \bar{q}^m \end{aligned}$$

여기에서  $(\bar{\cdot})$ 는 공칭 값을 뜻한다. 한편, 공력 좌표계에서 유도탄의 횡가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \Delta a_y^m \\ \Delta a_z^m \end{bmatrix} = v_m \begin{bmatrix} Y_\gamma & Y_{\alpha_t} \\ Z_\gamma & Z_{\alpha_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \end{bmatrix} + v_m \begin{bmatrix} Y_{\delta_z^m} & 0 \\ 0 & Z_{\delta_z^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_y^m \\ \Delta\delta_z^m \end{bmatrix} \quad (6)$$

공력 좌표계에서 선형화된 식은 공력 특성이나 비행체적 상의 운동특성을 잘 드러내 보이는 장점이 있으나, 동체에 고정된 조종날개의 변위나 각속도 측정치의 미소섭동이 유도탄 운동 모드에 미치는 영향을 보기 어렵다. 동체좌표계에서 선형화된 식은 흔히 사용되는 단순화 과정(피치 및 요 경로 간의 커플링 무시 등)없이 완전한 식을 유도한다 하더라도 운동 모드들이 서로 섞여 있어 그 특성을 살펴보기가 어렵다. 이러한 불편을 해소하기 위하여 동체 좌표계를 공칭 벡터각만큼 좌표변환한 좌표계를 기동좌표계로 정의하고, 선형화 모델을 유도한다. 이후, 기동좌표계를  $(x^\mu, y^\mu, z^\mu)$  혹은  $\mu$ -좌표계로 표시하기로 한다.

우선 공력좌표계와 동체좌표계 사이의 관계식 (1)을 선형수식에 적용하기 위해서 미소섭동시키면 다음과 같다.

$$T_b^m(\bar{\Gamma} + \Delta\Gamma) = T_b^m(\bar{\Gamma}) + T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} 0 & \Delta\Gamma \\ -\Delta\Gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이제 (4)식과 (7)식을 이용하여 기동좌표계의 상태변수 및 입출력 변수를 다음과 같이 동체좌표계 혹은 공력 좌표계의 상태변수 및 입출력 변수에 대한 표현으로 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \end{bmatrix} = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta q^\mu \\ \Delta r^\mu \end{bmatrix} = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} \Delta q^b \\ \Delta r^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta q^m \\ \Delta r^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{q}^m / \bar{\alpha}_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_y^\mu \\ \Delta\delta_z^\mu \end{bmatrix} = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} \Delta\delta_y^b \\ \Delta\delta_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\delta_y^m \\ \Delta\delta_z^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\delta}_z^m / \bar{\alpha}_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a_y^\mu \\ \Delta a_z^\mu \end{bmatrix} = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} \Delta a_y^b \\ \Delta a_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_y^m \\ \Delta a_z^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{a}_z^m / \bar{\alpha}_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \end{bmatrix} \quad (11)$$

(8)식의 상태변수  $\Delta\gamma$ 와  $\Delta\alpha_t$ 는 공력좌표계와 기동좌표계에서 동일한 값을 갖는다. (7)-(11)식을 (3)-(4)식에 적용하면 다음과 같은 횡방향 운동에 대한 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\gamma} \\ \Delta\dot{\alpha}_t \\ \Delta\dot{q}^\mu \\ \Delta\dot{r}^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\gamma & Y_{\alpha_t} & 0 & Y_r \\ Z_\gamma & Z_{\alpha_t} & 1 & 0 \\ M_\gamma & M_{\alpha_t} & M_q & 0 \\ N_\gamma & N_{\alpha_t} & 0 & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \\ \Delta q^\mu \\ \Delta r^\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_z^m} & 0 \\ 0 & Z_{\delta_z^m} \\ 0 & M_{\delta_z^m} \\ N_{\delta_z^m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_y^\mu \\ \Delta\delta_z^\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_\beta \\ 0 \\ 0 \\ N_\beta \end{bmatrix} \Delta p^b \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a_y^\mu \\ \Delta a_z^\mu \end{bmatrix} = v_m \begin{bmatrix} Y_\gamma & Y_{\alpha_t} \\ Z_\gamma & Z_{\alpha_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\alpha_t \end{bmatrix} + v_m \begin{bmatrix} Y_{\delta_z^m} & 0 \\ 0 & Z_{\delta_z^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_y^\mu \\ \Delta\delta_z^\mu \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기에서

$$\begin{aligned} Y_\gamma^* &= Y_\gamma - Y_{\delta_z^m} \bar{\delta}_z^m / \bar{\alpha}_t + Y_r \bar{q}^m / \bar{\alpha}_t \\ N_\gamma^* &= N_\gamma - N_{\delta_z^m} \bar{\delta}_z^m / \bar{\alpha}_t + N_r \bar{q}^m / \bar{\alpha}_t \\ Y_\gamma^* &= Y_\gamma - Y_{\delta_z^m} \bar{\delta}_z^m / \bar{\alpha}_t + \bar{a}_z^m / \bar{\alpha}_t \end{aligned} \quad (14)$$

(2)식의 롤운동 관련 동력학을  $\bar{\theta}^m \approx 0$  및  $\theta^m$ 의 변화가 각속도의 변화에 비해 느리다는 가정 하에 선형화하여 (12)식에 포함시키고, 출력 변수에 오토파일럿의 입력으로 사용되는 측정 변수를 (13)식에 포함시키면, 다음과 같이 새로운 동력학 모델을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_b^\mu &= A_b^\mu X_b^\mu + B_b^\mu U_b^\mu \\ Y_b^\mu &= C_b^\mu X_b^\mu + D_b^\mu U_b^\mu \end{aligned} \quad (15)$$

여기에서

$$\begin{aligned} X_b^\mu &= [\Delta\gamma \ \Delta\alpha_t \ \Delta q^\mu \ \Delta r^\mu \ \Delta p^b \ \Delta\phi^b]^\top \\ Y_b^\mu &= [\Delta a_y^\mu \ \Delta a_z^\mu \ \Delta q^\mu \ \Delta r^\mu \ \Delta p^b \ \Delta\phi^b]^\top \\ U_b^\mu &= [\Delta\delta_y^\mu \ \Delta\delta_z^\mu \ \Delta\delta^b]^\top \end{aligned}$$

$$A_b^\mu = \begin{bmatrix} Y_\gamma^* & Y_{\alpha_t} & 0 & Y_r & Y_\beta & 0 \\ Z_\gamma & Z_{\alpha_t} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ M_\gamma & M_{\alpha_t} & M_q & 0 & 0 & 0 \\ N_\gamma^* & N_{\alpha_t} & 0 & N_r & N_\beta & 0 \\ L_\Gamma / \bar{\alpha}_t & L_{\alpha_t} & 0 & 0 & L_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_b^\mu = \begin{bmatrix} Y_{\delta_z^m} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{\delta_z^m} & 0 \\ 0 & M_{\delta_z^m} & 0 \\ N_{\delta_z^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_b^\mu = \begin{bmatrix} v_m Y_\gamma^* & v_m Y_{\alpha_t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_m Z_\gamma & v_m Z_{\alpha_t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_b^\mu = \begin{bmatrix} v_m Y_{\delta_z^m} & 0 & 0 \\ 0 & v_m Z_{\delta_z^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

유도탄의 유도명령은 동체좌표계에서 롤 변위가 없는 좌표계인 유도 좌표계  $(x^\mu, y^\mu, z^\mu)$ 에서 주어지게 되는데, 이러한 유도 좌표계에서 본 유도탄 기동 가속도 및 롤 위치는 다음과 같이 표현된다.

$$Y^g = C^g Y_b^\mu \quad (16)$$

여기에서  $O_{22}$ 는 영행렬(2x2)을 뜻한다.

$$Y^g = \begin{bmatrix} \Delta a_y^g \\ \Delta a_z^g \\ \Delta\phi^g \end{bmatrix}, \quad C^g = \begin{bmatrix} T_b^m(\bar{\Gamma}) & O_{22} & T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_z^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. 오토파일럿을 포함한 폐루프 시스템

피치, 요 및 롤 운동을 독립적으로 제어하는 세축 제어기에 의

해 구성되는 오토파일롯은 십자형 STT(skid-to-turn) 유도탄에서 널리 사용되는 기본적인 형태인 다음과 같은 구조로 설계되어 있다고 하자[1,2].

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_{yc}^b \\ \Delta\delta_{zc}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & -K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y^b \\ x_z^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -K_r \\ K_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q^b \\ \Delta r^b \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} x_y^b \\ x_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -W_i \\ -W_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q^b \\ \Delta r^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_i(K_v - K_a) & 0 \\ 0 & -W_i(K_v - K_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_y^b \\ \Delta a_z^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_i K_a & 0 \\ 0 & -W_i K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_{yc}^b \\ \Delta a_{zc}^b \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기에서  $K_r, W_i, K_v, K_a, K_p, K_\phi$ 는 각각 유도탄 동체좌표계에 대해 설계된 피치/요 및 롤 제어상수를 의미하고,  $x_y^b, x_z^b$ 는 각각 요 및 피치 제어기에 포함된 적분기의 상태를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \Delta a_{yc}^b \\ \Delta a_{zc}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a_{yc}^g \\ \Delta a_{zc}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{a}_{zc}^g \\ -\bar{a}_{yc}^g \end{bmatrix} \Delta\phi^b \quad (19)$$

$$\Delta\delta_{rc} = -K_p \Delta p^b - K_\phi K_a \Delta\phi^b \quad (20)$$

$b$ -좌표계에 대해서 표현된 (18)식은 (7)-(11)의 관계식을 이용하여  $\mu$ -좌표계에 대한 표현으로 바꿀 수 있고, 여기에 롤 제어기 (20)식을 함께 묶으면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_c^\mu &= B_c^\mu Y_b^\mu + B_2^\mu U_g \\ U_{bc}^\mu &= F_1^\mu Y_b^\mu + F_2^\mu X_c^\mu + B_1^\mu U_g \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서

$$U_{bc}^\mu = \begin{bmatrix} \Delta\delta_{yc}^b \\ \Delta\delta_{zc}^b \\ \Delta\delta_{rc}^b \end{bmatrix}, \quad U_g = \begin{bmatrix} \Delta a_{yc}^g \\ \Delta a_{zc}^g \\ \Delta\phi_c^g \end{bmatrix}, \quad X_c^\mu = \begin{bmatrix} x_y^b \\ x_z^b \end{bmatrix}$$

$$F_1^\mu = \begin{bmatrix} O_{22} & K_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & O_{22} \\ O_{12} & O_{12} & \begin{bmatrix} -K_p & -K_p K_\phi \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$F_2^\mu = \begin{bmatrix} K_r T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T_m^b(\bar{\Gamma}) \\ O_{12} \end{bmatrix}$$

$$B_1^\mu = \begin{bmatrix} O_{23} \\ 0 & 0 & K_p K_\phi \end{bmatrix}$$

$$B_c^\mu = \begin{bmatrix} W_i(K_v - K_a) T_1 & W_i T_2 & W_i K_a T_3 \begin{bmatrix} 0 & -\bar{a}_{zc}^g \\ 0 & -\bar{a}_{yc}^g \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^\mu = \begin{bmatrix} W_i K_a T_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$T_1 = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T_m^b(\bar{\Gamma})$$

$$T_2 = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} T_m^b(\bar{\Gamma})$$

$$T_3 = T_b^m(\bar{\Gamma}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(21)식에서 계산되는 피치, 요 및 롤 제어날개 구동지령을 수행하는 각 구동장치의 동력학 모델 2차 선형시스템으로 보면, 구동시스템 전체는 다음 6차의 상태방정식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_a^\mu &= A_a^\mu X_a^\mu + B_a^\mu U_{bc}^\mu \\ U_b^\mu &= C_a^\mu X_a^\mu \end{aligned} \quad (22)$$

이제 (15)-(16)식의 유도탄 동력학 모델, (21)식의 오토파일롯 및 (22)식의 구동시스템 모델을 결합하여 제어기를 포함하는 유도탄 페루프시스템 동력학 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= A^\mu X^\mu + B^\mu U_c^\mu + B_o^\mu U^g \\ U_c^\mu &= F^\mu X^\mu + G^\mu U^g \\ Y^\mu &= C^\mu X^\mu \end{aligned} \quad (23)$$

여기에서

$$X^\mu = [X_b^\mu \ X_c^\mu \ X_d^\mu]'$$

$$A^\mu = \begin{bmatrix} A_b^\mu & O_{62} & B_b^\mu C_a \\ B_c^\mu C_b^\mu & O_{22} & B_c^\mu D_b^\mu C_a \\ O_{66} & O_{62} & A_a \end{bmatrix}, \quad B^\mu = \begin{bmatrix} O_{63} \\ O_{23} \\ B_a \end{bmatrix}, \quad B_o^\mu = \begin{bmatrix} O_{63} \\ B_2^\mu \\ O_{63} \end{bmatrix}$$

$$F^\mu = [F_1^\mu \ F_2^\mu \ F_1^\mu D_b^\mu C_a], \quad G^\mu = B_b^\mu$$

$$C^\mu = [C_b^\mu C_b^\mu \ O_{32} \ C_b^\mu D_b^\mu C_a]$$

다음에는 페루프상의 특정 지점에서 위상 및 이득의 변화에 대한 상대 안정도를 살펴보는 고전적인 안정도 검토방식을 (23)식에 적용해 보자. 원칙적으로 상대안정도를 살펴보기 위한 루프의 절단지점은 페루프 상의 임의의 곳이 가능하나, 통상적으로 불확실성이 가장 크게 나타난다고 생각되는 곳을 선정하는 것이 타당하다. 예로 (23)식의 페루프에서는 롤 구동 명령( $\delta_{rc}^b$ )에서 루프를 절단할 경우에 대한 각 운동간의 결합특성이 고려된 개루프이득 전달함수를 구해 본다. 우선 페루프시스템에서 롤 제어기 부분을 피치 및 요 제어기와 분리하여 표현하자.

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= (A^\mu + B^\mu P_Y F^\mu P_Y) X^\mu + \Delta\delta_{rc}^\mu \\ \Delta\delta_{rc}^\mu &= F_R^\mu X^\mu \end{aligned} \quad (24)$$

여기에서

$$B_R^\mu = B^\mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_R^\mu = [0 \ 0 \ 1] F^\mu$$

$$B_{PY}^\mu = B^\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_R^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} F^\mu$$

(24)식으로부터 롤 제어를 위한 구동지령에서 루프를 절단했을 경우의 개루프 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$LG_{\delta_{rc}}^\mu(s) = -F_R^\mu (sI - A^\mu - B_{PY}^\mu F^\mu P_Y)^{-1} B_R^\mu \quad (20)$$

페루프 상의 임의의 지점을 절단한 경우에도 앞의 롤 구동 명령을 절단한 것과 유사한 방식으로 개루프 전달함수를 구할 수 있으므로 여기에서는 생략한다.

#### 4. 수치예를 통한 검토

앞의 3절에 제시된 새로운 동력학 모델의 특성을 수치예를 통하여 간략히 살펴보기로 한다. 우선 동력학의 비선형 요소가 포함된 비선형 시뮬레이션 결과를 앞에서 제시한 선형화 모델( $\mu$ -좌표계 모델) 및 피치-요 커플링을 무시하고 동체 좌표계에서 유도된 기존 모델( $b$ -좌표계 모델)의 시뮬레이션 결과와 비교한다.

그림 1에 보인 비선형 모델에 대한 시뮬레이션 결과는 비행조건이 고정되고 뱅크각이 45도인 상태에서 공력결합 효과가 크게 나타나는 정도의 기동인 25g 가속도를 수행하고 있는 정상상태를 초기조건으로 하고, 여기에 다시 1g의 기동 가속도 명령이 주어졌을 때 유도탄의 응답을 나타내고 있다. 비선형 시뮬레이션과 비교되는  $\mu$ -좌표계 모델에 대한 응답은 비선형 시뮬레이션의 초기조건과 동일한 비행조건 및 비행상태에 대하여 수치화된 3절의 모델에 따른 것이고,  $b$ -좌표계 모델에 대한 응답은 동일한 조건에서 선형화된 기존의 모델에 따른 것이다. 그림 1에서 보면 기존의  $b$ -좌표계 모델에 비해 새로 제시된  $\mu$ -좌표계 모델이 비선형 동력학의 특성을 잘 반영하고 있음이 확인된다.

제시된 모델의 상태변수 중에서 롤 관련 상태 및 입력변수는 뱅크각이 0도인 경우에 기존의  $b$ -좌표계 모델의 변수와 동일하게 된다. 따라서 동일한 시스템을 서로 다른 방식으로 기술하고 있는 두 모델을 확인하는 한 방법으로 롤 구동지령에서 절단한

개루우프 전달함수를 비교한다. 그림 2는 동일한 조건의 벅크각 0도에 대한 두 모델의 개루우프 전달함수(를 구동지령 부분에서 절단한 경우)에 대한 나이퀴스트 선도(Nyquist plot)로 두 모델에 대한 그림이 잘 일치하고 있다.

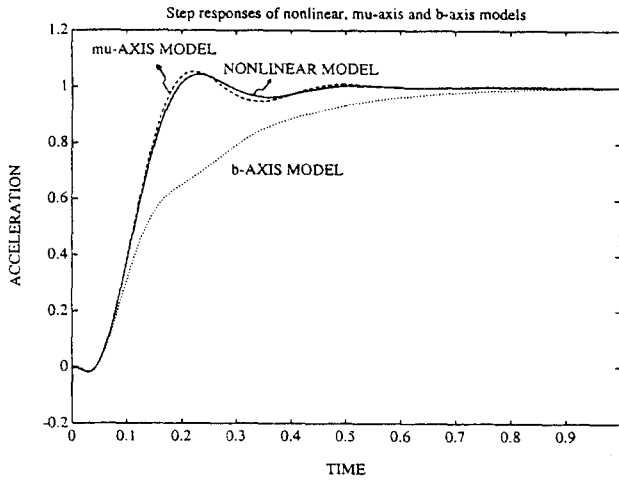


그림 1. 비선형 모델,  $\mu$ -좌표계 모델 및  $b$ -좌표계 모델의 가속도 응답특성 비교

Fig. 1. Comparison the acceleration responses of the nonlinear model with  $\mu$ -frame and  $b$ -frame models

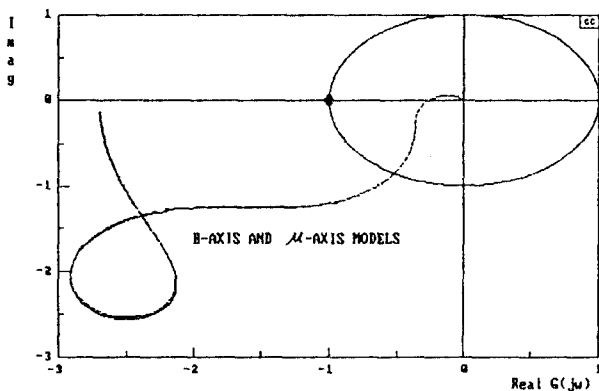


그림 2 벅크 0도에서 선형화한  $\mu$ -좌표계 및  $b$ -좌표계 모델에서  $\delta_{rc}^b$ 를 절단한 개루우프 나이퀴스트 선도

Fig. 2. Nyquist plots of the  $\mu$ -frame and  $b$ -frame models linearized for the bank  $0^\circ$  when the loop broken at  $\delta_{rc}^b$

다음에는 개루우프 전달함수를 이용한 상대안정도에 대한 예를 살펴본다. 기존 모델은 벅크각 45도에서 피치 및 요 운동이 완전히 동일한 것으로 보기 때문에 피치 혹은 요 구동지령에서 절단한 개루우프 전달함수는 완전히 동일하게 나타나는 반면에, 새로운 모델은 기동 속도면을 피치로 하고 그에 수직인 면을 요로 정의하므로 두 개루우프 전달함수가 다르게 나타나고, 따라서 상대안정도에 대한 수치도 달라지게 된다. 그림 3은 두 모델에 대해 피치 혹은 요 구동지령( $b$ -좌표계 모델의 경우  $\Delta\delta_{zc}^b$  혹은  $\Delta\delta_{yc}^b$ ,  $\mu$ -좌표계 모델의 경우  $\Delta\delta_{zc}^\mu$  혹은  $\Delta\delta_{yc}^\mu$ )을 절단한 개루우프 전달함수의 보드선도(Bode plot)를 보여주고, 표 1은 그림 3의 보드선도에서 계산된 상대안정도를 나타낸다.

표 1 피치 혹은 요 구동지령 부분에 대한 상대안정도

Table 1. Relative stability when the loop broken at  $\delta_{zc}^\mu$  or  $\delta_{yc}^\mu$

		이득여유	위상여유	$\omega_{gain_{cr}}$	$\omega_{phase_{cr}}$
$\mu$ -좌표계 모델	피치	14.7 dB	$53^\circ$	4.6 Hz	19.1 Hz
	요	14.3	73	6.7	19.2
$b$ -좌표계 모델	피치/요	14.4	64	6.0	19.1

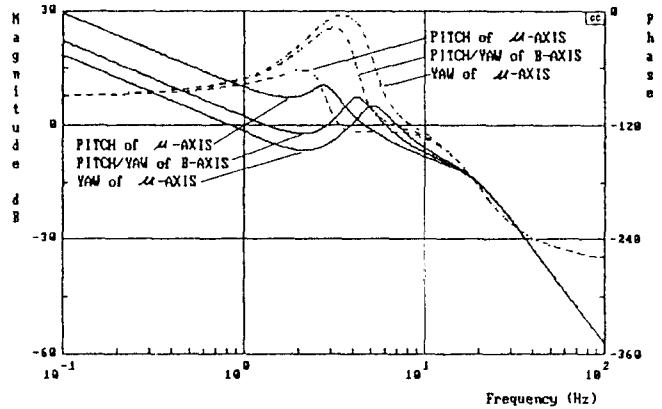


그림 3 벅크 45도에서 선형화한  $\mu$ -좌표계 및  $b$ -좌표계 모델의 피치 혹은 요 구동지령에서 절단한 개루우프 보드 선도

Fig. 3. Bode plots of the  $\mu$ -frame or  $b$ -frame models linearized for the bank  $45^\circ$  when the loop broken at  $\delta_{zc}^\mu$  or  $\delta_{yc}^\mu$

## 5. 결론

공력좌표계에서 선형화된 운동모델에 동체의 미소섭동의 영향이 고려될 수 있도록하기 위하여 트림상태에서는 공력좌표계와 동일하나 미소섭동 후에는 동체에 붙어 움직이는 새로운 기동좌표계( $\mu$ -좌표계)를 정의하고, 이 좌표계에서 선형화한 새로운 유도탄 동역학 모델을 제시하였다. 제시된 모델은 피치-요 커플링 등을 무시하고 유도된 기존의 모델에 비해 유도탄의 운동모드를 보다 충실히 반영하는 것으로 생각된다. 수치예를 통하여 제시된 모델의 특성을 간략히 살펴본 결과, 제시된 선형모델은 기존의 동체좌표계에 대한 선형모델에 비해 유도탄의 비선형모델에 가까운 응답을 보였고, 조종루우프의 상대안정도 계산에서도 유도탄의 기동모드에 대한 특성을 기존의 모델에 비해 잘 반영함을 알 수 있었다.

## 참고문헌

- [1] J. H. Blacklock, *Automatic Control of Aircrafts and Missiles, 2nd Ed*, John Wiley & Sons, Inc., 1991
- [2] P. Garnell, *Guided Weapon Control Systems, 2nd Ed*, Brassey's Defence Publishers, 1980
- [3] C. Song and Y. S. Kim, "A new approach to motion modeling and autopilot design of skid-to-turn missiles," AIAA Guidance and Control Conference, 1996