증식되는 제품의 물류재고모델의 연구

A Study on a Partial Selling Model for Ameliorating Items

황 홍 석
동의대학교 산업공학과

Abstract

The convensional inventory models are concerned with the items of which utilites and amount of numbers are consatant over time. But in practice the items in inventory systems are increasing or decreasing. This study is concerned with the development of ameliorating inventory models. The ameliorating inventory is the inventory of goods whose utility increases over the time by ameliorating activation. The term ameliorating inventory is used in this paper at least, since the terminology is not standard well known. This study is performed according to areas; one is an economic order quantity(EOQ) model for the items whose utility is ameliorating in accordance with Weibull distribution, and the other is a partial selling quantity(PSQ) model developed for selling surplus inventory accumulated by ameliorating activation. Computer programs are developed to obtain the optimal ordering and selling quantity. Numerical examples to illustrate the effect of ameliorating rate on inventory polices are shown at the end of this paper.

Keyword: Ameliorating Inventory, System Modeling, Inventory Theory

1. 서론

기존의 물류재고 모델들은 대부분 이상적인 조건을 가정하고 있다. 즉 물류재고품목이 시간에 따라 그 효용가치 및 수량이 일정하게 유지된다고 가정하고 있다. 일부 연구가 이러한 가정사항에서 감소(Deteriorating)되는 경우의 물류재고정책의 연구를 다루었다. 본 연구에서는 제품의 증식률이 사용률보다 적을 경우, 기존의 물류재고 모델인 EOQ모델을 일반적인 확률분포로 증식되는 제품의 EOQ모델로 확장개발 하였으며 증식율(Ameliorating Rate)이 사용률(Demand Rate)보다 클 경우 증식으로 인하여 누적되는 물류재고의 최적출하량을 결정하는 PSQ(Partial Selling Quantity)모델을 개발하였다. 일반적인 물류재고정책에 관한 많은 연구가 되어왔으나 진부(Deteriorating)화 및 증식(Ameliorating)되는 제품의 물류재고모델은 새로운 분야이다. 특히 증식되는 제품의 물류용어 **Ameliorating Inventory**는 표준용어가 아니며 본 연구에서 처음 사용하는 용어이다. 본 연구의 결과로 기존의 물류재고시스템을 다음과 같이 3가지로 분류할 수 있게되었다.

- 기존의 물류재고 시스템
  (Non-decaying Inventory System)
  (Conventional Inventory Systems),
- 진부화 물류재고 시스템
  (Deteriorating Inventory System),
- 증식되는 물류재고 시스템
  (Ameliorating Inventory System).

본 연구에서 사용된 제품의 증식률(Ameliorating Rate)은 와이블(Weibull)분포로부터 다음과 같이 주어진다.

$$A(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$$

일정 기간에 증식되는 양이 제품의 특성에 따라 증가 또는 감소할 수 있는 양특성을 가지고 있다.

2. 경제적 주문량 결정모델(EOQ)

본 연구에서 사용되는 기호들을 아래와 같이 가정하였다.

R : 사용률(units/time)
α, β : 와이블 분포함수의 파라메터
$f(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}}$
t : Time to ameliorating
Co : 주문비용 (₩/unit)
C_a : 증식비용 (₩/unit)
C_p : 획득비용 (₩/unit)
Ps : 판매가 (₩/unit)
C_h : 재고유지비용 (₩/unit/time)
C_s : 부족비용 (₩/unit)
Q : 부분주문량
S : 부문출고량
A(t) : 순간증식률

$$A(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \alpha \beta t^{\beta-1},$$

여기서 $\alpha, \beta > 0$,

TC : 단위 기간동안의 총비용

증식률 A(t)가 수요율 R보다 적을 경우에는 물류사이클동안에 수요를 일부 재고량으로 충당하고 나머지 일부는 증식되는 량으로 충당되며 어느 시점에서는 재고수준이 0이 된다. 그림1에서 보면 t시점에서

준 It는 다음과 같이 미분방정식으로 표시될 수 있다.

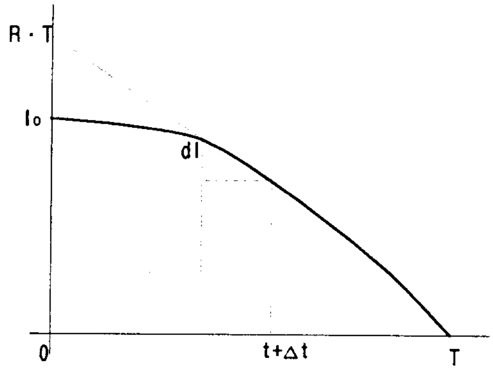

그림 1. 증식되는 제품의 EOQ model

dI=It ·A(t)dt-Rdt --------------------(1)

이를 정리하면

$$\frac{dI}{dt} - I_t(\alpha\beta t^{\beta-1}) = -R \quad \text{----------(2)}$$

여기서 $0 \le t \le T$

이를 초기조건 t=0, $I_t=I_0$를 고려하여 해를 구하면

$$I_0 = R\int_0^T e^{-\alpha t^\beta}dt + k \quad \text{---------------(5)}$$

and $I_t = e^{\alpha t^\beta}\left[-R\int_0^t e^{-\alpha x^\beta}dt + I_0\right]$ -------(6)

비용함수를 구하기 위하여 증식비용, 재고비용 및 발주비용 등을 고려하였으며 단위시간당 총비용 TC를 다음과 같이 구하였다.

$$TC(T) = I_0\left(\frac{C_p - C_a}{T} + \frac{C_h}{2}\right) + RC_a + \frac{C_0}{T} \quad \text{----(7)}$$

$$= R(C_p - C_a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{k\beta}}{(k\beta+1)k!} + \frac{C_h}{2}R\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{k\beta+1}}{(k\beta+1)k!} + RC_a + \frac{C_0}{T} \quad \text{----(8)}$$

또한 사이클기간의 평균재고량 I_A/T를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{I_A}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T I_t\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\alpha t^\beta}\left[-R\int_0^T e^{-\alpha x^\beta}dx + I_0\right]dt$$

$$= \frac{R}{T}\left[\left(\frac{\sum_{k\geq 0}^{\infty}\alpha^k\ T^{k\beta+1)}}{(k\beta+1)k!}\right)\right]^2 - \int_0^T\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha^i T^{ik}}{i!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k t^{\beta+1}}{(k\beta+1)}k!\right)\Bigg]dt$$

$$= \frac{R}{T}\left[Z^2 - \sum_i\sum_k \cdot \frac{\alpha^{i+k}(-1)^k}{i!k!(k\beta+1)} \cdot \frac{T^{(k+i)\beta+1}}{k\beta+i\beta+2}\right]$$

최적사이클타임 T^*을 구하기 위하여 위의 총비용 식을 T에 관해서 미분하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dTC}{dT} = (C_p - C_a)R\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k \cdot k\beta \cdot T^{k\beta-1}}{(k\beta+1)k!} + \frac{C_h}{2}R\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{k\beta}}{k!} + \frac{C_0}{T^2} \quad \text{-------(9)}$$

여기서 $\frac{dTC}{dT}=0$ 에서 최적발주기간 T^*을 구할 수 있으나 위의 수식이 복잡하여 간단한 결과로 표시할 수 없으므로 다음과 같이 변형하여 컴퓨터를 이용한 Graphic 방법으로 해를 구하였다.

$$T = \frac{1}{C_0}R\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-k)^k T^{k\beta-3}}{k!}\left[(C_p - C_a)\frac{k\beta T}{k\beta+1} + \frac{C_h}{2}\right]\right\} \quad \text{--------(10)}$$

최적발주량 T^*를 구하기 위한 Graphical 방법의 계산과정을 요약하면 다음과 같다 :

(1) T의 값을 일정간격으로 변형하면서 위 식의 우측값을 β 및 α값의 변형에 따라 산정 한다.(이를 위한 전산프로그램 개발)

(2) 이를 그림 2와 같이 도표 상에 표시한다.

(3) 여기서 Z=F(Z)와 교차되고 점이 주어진 α 및 β 값에 대한 최적발주기간이 된다.

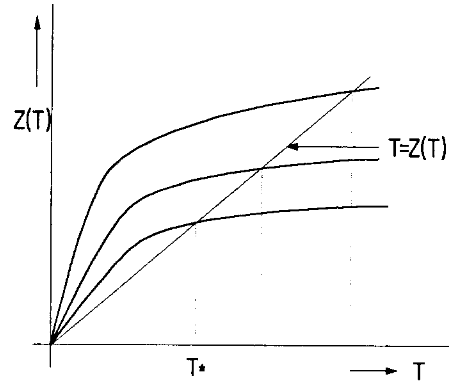

그림 2. 도표방법에 의한 최적발주기간산출

여기서 β=1 인 경우 본 모델은 증식율이 일정한 값을 갖게 되고 초기재고수준 I_0은 다음과 같이 주어진다.

$$I_0 = \frac{R}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T}),$$

그리고 $$I_t = \frac{R}{\alpha}(1 - e^{\alpha(t-T)})$$

3. PSQ 모델

제품의 순간증식률이 수요율보다 큰 경우에는 제품의 출고 이후 계속 물류재고수준이 증가되어가게 되며, 재고유지비용, 증식비용, 등 각종비용이 재고의 증가에 따라 증가하게 될 것이다. 이 경우 적정 시점 T에서 적정량 S_o를 출하하여야 할 것이다. 출고직후의 재고수준은 I_o로 될 것이며 이 I_o로부터 다시 증

식이 계속된다. 이러한 물류재고사이클을 표시하면 그림 3과 같다.

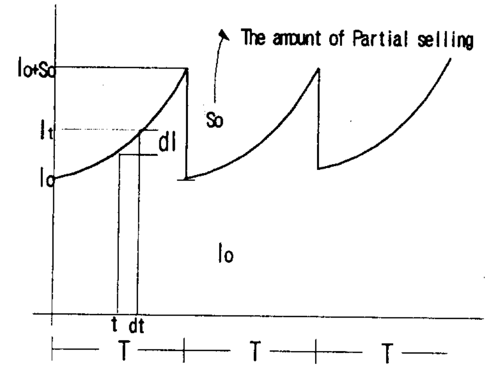

그림 3. PSQ 모델의 재고사이클

초기재고수준 I_o과 적정판매량 S_o은 위에서 구한 수식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$I_o + S_o = e^{\alpha T^\beta}\left[-R\int_0^T e^{-\alpha t^\beta}dt + I_o\right] \qquad \text{------(12)}$$

$$I_o = \frac{1}{e^{\alpha T^\beta}-1}\left[Re^{\alpha T^\beta}\int_0^T - e^{\alpha T^\beta}dt + S_o\right] \text{--(13)}$$

$$S_o = e^{\alpha T^\beta}\left[-R\int_0^T e^{-\alpha t^\beta}dt\right] + I_o(e^{\alpha T^\beta}-1) \qquad \text{-----(14)}$$

PSQ 모델의 경우 총비용함수를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$TC = (P_s - C_a)R + \left[\frac{P_s - C_a}{T} - \frac{C_h}{2}\right]\Big[I_0(e^{\alpha T^\beta}-1) - Re^{\alpha T^\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{k\beta+1}}{(k\beta+1)k!}\Big] - C_h I_0 - \frac{C_0}{T} \qquad \text{------(15)}$$

이를 T에 관해서 미분하고 $\frac{dTC}{dT} = 0$으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Z(T) &= \frac{(P_s - C_a)}{C_0} I_0(e^{\alpha T^\beta}-1) \\ &- \frac{1}{C_0}\left((P_s - C_a) - \frac{C_k}{2}T\right) I_0 \alpha\beta T^{\beta+3} e^{\alpha T^\beta} \\ &+ \alpha\beta e^{\alpha T^\beta}\frac{(P_s - C_a)}{C_0} R\cdot T^3 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{(k+1)\beta-1}}{(k\beta+1)k!} \\ &- \frac{1}{2}\alpha\cdot\beta\frac{C_h}{C_o}\cdot R\cdot T^3\cdot e^{\alpha T\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{(k+1)\beta-1}}{(k\beta+1)k!} \\ &+ \frac{P_s - C_a}{C_0} R\cdot e^{\alpha T^\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k k\beta T^{k\beta-1}}{(k\beta+1)k} \\ &- \frac{1}{2}\frac{C_h}{C_0} R\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k T^{k\beta}}{k!} \end{aligned} \qquad \text{---------------(16)}$$

위의 식으로부터 최적 판매기간 T^*을 개발된 프로그램을 이용하여 구할 수 있다.

4. 모델의 응용

본 연구에서는 2개의 응용사례를 제시하였다. 첫째에는 증식되는 제품의 경제적 주문량을 산출하는 확장된 EOQ의 모델의 예로서 증식률과 수요율 R보다 적을 경우이고, 다른 한 예로 증식률이 수요율보다 큰 경우의 PSQ 모델의 예이다.

예 1 :

양식어업을 하는 회사의 평균 판매수요량이 1000 kg/day이고 양식장의 재고가 거의 없을 경우에 일정량을 주문하여 양식장에서 증식시키면서 판매를 하고 있다. 여기서 증식은 와이블 증식을 따르고, 1회 발주비용이 약 300,000원 정도 소요된다고 한다. 본 예제에 필요한 각종 비용자료는 다음과 같다.

Ca : 4,000₩/unit Ch : 400₩/kg/day
Cp : 10,000₩/kg α : 0.05 ~ 0.3
Ps : 20,000₩/kg β : 0.0.5 ~ 0.3

이를 본 연구에서 개발된 모델을 사용하여 해를 구한 결과를 그림 4 및 표 1에서와 같이 요약하였다.

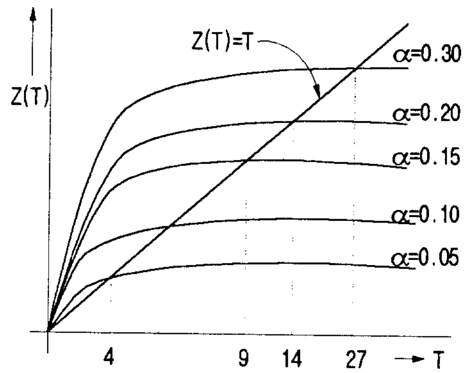

그림 4. 예제 1의 결과

표 1. 예제 1의 전산출력

- T* : 최적발주기간
- I0* : 최적발주량
- TC* : 최적비용

Descr.	β=0.05	β=0.1	β=0.2	β=0.3	β=0.3
α=0.05	3 2852.83 9948303 .	3 2851.65 9945891 .	3 2848.41 9939250 .	4 3773.94 9924690 .	4 3767.03 9913907 .
α=0.10	3 2579.84 9661438	4 3420.48 964625	4 3584.23 9630564	6 5262.66 9575801	8 6868.91 9532634
α=0.15	3 2579.84 9388672 .	4 3420.48 9376753 .	6 5019.88 9320881 .	9 7211.60 9201653 .	13 9926.00 9100634 .
α=0.20	3 2453.32 9129316 .	4 3246.75 9107472	7 5478.88 9012989	14 10003.92 8809016	21 13758.32 8633150
α=0.30	4 2945.28 8640190	6 4331.91 8598514	11 7363.61 8411970	27 14689.99 8010052	30 14748.76 769189

예 2 :

본 예제는 제품의 증식률이 사용률보다 큰 경우로서 PSQ을 적용한 예이다. 아래와 같은 사용률 및 비용

자료로부터 본 연구에서 개발한 전산프로그램의 출력 결과를 표 2에서와같이 요약하였으며 이를 그림 5에

서와같이 최적 물류재고정책을 구하기 위한 도표를 표시하였다.

R = 1,000 unit/day　　Co : 8,000₩/unit
α : 0.5 ~ 1.2　　Cp : 8,000₩/unit
β : 0.5 ~ 1.2　　Ps : 10,000₩/unit
Ca : 1,000₩/kg　　Ch : 100₩/unit/time

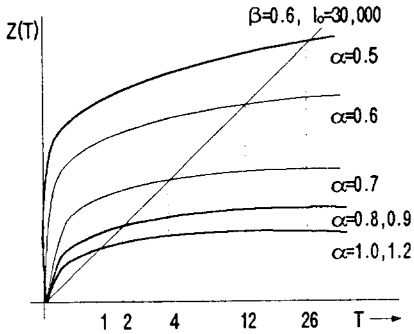

그림 5. 예제 2의 결과 도표(PSQ Model)

표 2. 예제 2의 출력 결과

Description	T*	So*	TC*
α =0.5	26	845832	6.40×10^{6}
α =0.6	12	359444	7.61×10^{6}
α =0.7	4	80794	2.01×10^{6}
α =0.8	2	67551	5.65×10^{7}
α =0.9	2	83818	1.28×10^{8}
α =1.0	1	50043	2.03×10^{8}
α =1.2	1	67956	3.64×10^{8}

예를 들면 α=0.6 이고 β=0.6 일 경우, 최적 출고량 및 사이클당 비용은 다음과 같다.

$S_o* = 35.944$
$Tc* = 7.61 \times10^{6}$
$T* = 12$
$Io = 30,000$

예제 1 및 2의 결과는 위의 2가지 증식제품의 물류재고모델을 적용한 경우이며, 모두 본 연구에서 개발된 전산프로그램을 사용하여 구한 결과를 표시하였다.

4. 결 론

본 연구는 지금까지의 제한된 경우의 물류재고 모델로부터 와이블분포에따라 증식되는 경우의 물류재고 모델로 확장개발한 2가지 모델을 제시하였다. 먼저 제품의 증식률이 사용률 보다 적을 경우 기존의 경제적주문량 모델(EOQ)을 확장 개발하였으며, 제품의 증식률이 사용률보다 클 경우는 기간중 사용후의 재고가 계속 증가하게될것이며 이 경우 적정 량의 출고 정책이이 필요할 것이며 으를 위하여 PSQ(Partial Selling Model)을 개발하였다. 본 연구에서는 이들 모델을 위한 수식들을 전개하고, 총 비용을 최소화하는 물류재고 정책을 구하기 위하여 전산프로그램들을 개발하여 사용하였다. 이를 2가지 예제를 통하여 응용한 결과를 보였다. 본 연구에서 제안한 증식제품의 물류재고정책은 기존의 물류재고정책을 한 차원 높인 결과로 볼 수있으며, 보완 연구될 경우 증식되는 제품의 물류재고관리에 매우 유용하게 활용될 수있을것으로 판단된다.

참고문헌

1. F. Raafat, Eldin.H. An inventory Model for Deteriorating Items, Int. J. Comp. and Eng., Vol. 20, No.1, pp.89-94, 1991.
2. Heng Kheng Joo and Linn R. J., :An Order-Level Lot-Size inventory Model for Deteriorating Items with Finite Replenishment Rate",
3. Hwang H. and Hwang H. S., Optimal Issuing Policy in Production Lot Size System for Items with Weibull Deterioration, Int. J. Prod. Res.,Vo20. No.1, pp87-94, 1982.
4. Hwang H. S., Analysis of Some Decaying Inventory Systems with a Class of Issuing Policies, KAIST, Ph.D. Dissertation. 1982.
5. Gupta N. K., Effect of Lead Time on Inventory-A working Result, J. Opl. Res., Vol.30, No.5, 477-481.