내부해로부터 최적기저 추출에 관한 연구

박 찬규, 박 순달

서울대학교 산업공학과

ABSTRACT

If the LP problem doesn't have the optimal solution uniquely, the solution of the primal-dual barrier method converges to the interior point of the optimal face. Therefore, when the optimal vertex solution or the optimal basis is required, we have to perform the additional procedure to recover the optimal basis from the final solution of the interior point method.

In this paper the existing methods for recovering the optimal basis or identifying the optimal solutions are analyzed and the new methods are suggested. This paper treats the two optimal basis recovery methods. One uses the purification scheme and the simplex method, the other uses the optimal face solutions. In the method using the purification procedure and the simplex method, the basic feasible solution is obtained from the given interior solution and then simplex method is performed for recovering the optimal basis. In the method using the optimal face solutions, the optimal basis in the primal-dual barrier method is constructed by integrating the optimal solution identification technique and the optimal basis extracting method from the primal-optimal solution and the dual-optimal solution.

Key words: linear programming, interior-point method, primal-dual barrier method, optimal basis recovery

1. 서론

내부점 기법은 현재의 내부가능해에서 개선 방향을 구하고 적절한 폭만큼 이동하여 개선된 내부가능해를 얻게 된다. 이러한 과정을 반복함으로써 최적해를 찾아 가게 된다[1]. 로그 장벽을 사용하는 대부분의 내부점기법은 최적해가 유일하게 정점인 경우에는 정점 최적해에 수렴하지만 그렇지 않는 경우에는 정점 최적해가 아닌 최적해에 수렴하게 된다[4]. 따라서 정점 최적해가 필요할 때는 이를 찾기 위한 부가적인 과정이 요구된다. 예를 들어 비선형계획법 또는 정수계획법 등의 해법에서는 정점 최적해를 필요로 하는 경우가 많고 감도분석(sensitivity analysis)등에서도 최적기저와 이에 대응하는 최적기저해를 필요로 하게 된다. 본 연구에서는 내부점 기법의 최종해로부터 최적기저와 최적기저해를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

이론적 배경

다음과 같은 표준 선형계획 문제 (P)와 (D)를 고려해 보자. A는 (m×n)행렬이다. A의 계수는 m이라고 가정한다.

$$(P):\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & C^TX \\ \text{s.t} & AX = \mathbf{b} \\ & X \ge 0 \end{array} \qquad (D):\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{b}^TY \\ \text{s.t} & A^TY - Z = C \\ & Z \ge 0 \end{array}$$

원가능해 집합 S_P, 쌍대가능해 집합 S_D, 원가능 내부해 집합 $Int(S_P)$, 쌍대가능 내부해 집합 $Int(S_D)$을 각각 아래와 같이 정의하고 $Int(S_P) \ne \emptyset$, $Int(S_P) \ne \emptyset$라고 가정한다.

$$S_P = \{X | AX = \mathbf{b}, X \ge 0\},\quad S_D = \{(Y,Z) | A^TY - Z = C, Z \ge 0\}$$

$$Int(S_P) = \{X | AX = \mathbf{b}, X > 0\},$$

$$Int(S_D) = \{(Y,Z) | A^TY - Z = C, Z > 0\}$$

원쌍대장벽법은 원가능 내부해와 쌍대가능 내부해에서 원가능성과 쌍대가능성을 각각 유지하면서 쌍대간격을 감소시키도록 개선 방향을 구하여 이 개선 방향을 따라 현재의 내부해를 개선해 나가면서 상보여유정리를 만족시키는 최적해를 찾게 된다[1]. 실제 원쌍대장벽법의 구현에서는 원가능성, 쌍대가능성, 상보여유정리를 허용오차 이내로 만족시키는 해를 찾으면 종료하게 된다. 이 때 최종적으로 구한 해를 본 연구에서는 최종해라 부른다.

A에 속하는 열들로 이루어진 임의의 부분 행렬 M에 대하여 M에 각 열에 해당하는 C,X의 요소들을 각각 C_M, X_M이라 하자. 또한 임의의 n차원 열벡터 $\mathbf{x}$에 대해 $\sigma(\mathbf{x})$를 $\sigma(\mathbf{x})=\{i : x_i>0\}$로 정의한다. $A_{.j}$을 A의 j번째 열이라 하자.

A의 m개의 열들로 이루어진 행렬 B가 $Rank(B) = m$이면 B를 기저(행렬)라 한다. 또한 기저 B에 대해 $[\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T]^T = [(B^{-1}\mathbf{b})^T, 0]$ 를 기저해라 하고 이 때 $B^{-1}\mathbf{b} \ge 0$이면 $[\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T]^T$ 는 기저가능해이다. 또는 $X \in S_P$이고 $\{A_{.j} | j \in \sigma(X)\}$에 속하는 모든 열이 일차독립이면 X는 기저가능해이고 $X \in S_P$이고 X가 기저가능해가 아니면 X는 비기저가능해이다. $\sigma(X) < m$인 기저가능해 X가 존재할 때 (P)는 원퇴화라고 하고 $(Y,Z) \in S_D$이고 $\sigma(Z) < n-m$인 (Y,Z)가 존재할 때 (D)는 쌍대퇴화라고 한다.

X^*가 $X^* \in S_P$이고 $X \in S_P$인 모든 X에 대해 $C^TX^* >= C^TX$을 만족하면 X^*는 원최적해이다. 또한 $(Y^*,Z^*) \in S_D$이고 $(Y,Z) \in S_D$인 모든 (Y,Z)에 대해 $\mathbf{b}^TY^* \le \mathbf{b}^TY$을 만족하면 (Y^*,Z^*)를 쌍대최적해이다.

정의 1 최적기저 기저 B에 대응하는 기저가능해 $X = [\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T]^T = [(B^{-1}\mathbf{b})^T, 0]^T$ 가 원최적해일 때 기저 B를 원최적기저라 한다. 또한 기저 B가 있어 $Y=B^{-T}C_B$와 $Z = [\mathbf{z}_B^T, \mathbf{z}_N^T]^T = [0, (C_N - N^TY)^T]^T$ 가 쌍대최적해가 될 때 기저 B를 쌍대최적기저라 한다. 기저 B가 원최적기저이고 쌍대최적기저일 때 기저 B를 최적기저라 한다.□

(P)와 (D)에서는 강상보성을 만족하는 원최적해 X^*와 쌍대최적해 (Y^*,Z^*)가 적어도 하나 존재한다[7]. 또한 강상보성을 만족하는 모든 최적해 X^*에서 $\sigma(X^*)$는 동일한 것으로 알려져 있다[9]. 강상보성을 만족하는 최적해 X^*에 대해 $\sigma^* = \sigma(X^*)$를 최적해의 비영구조(nonzero structure)라 한다. $\overline{B}$를 σ^*에 속하는 A의 열들로 이루어진 A의 부분행렬이라 하고 σ^*에 속하지 않는 A의 열들로 이루어진 A의 부분행렬을 $\overline{N}$이라 하자. 즉, $A = [\overline{B}, \overline{N}]$ 이다.

정의 2 최적면과 최적면의 내부해

$$S_P^* = \{X \in S_P \mid \overline{B}X_{\overline{B}} = \mathbf{b},\ X_i = 0\ (i \notin \sigma^*)\},$$

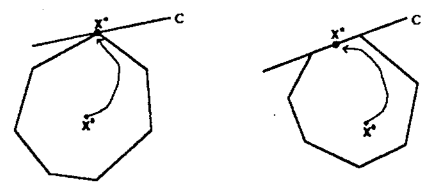
$S_D^* = \{(Y, Z) \in S_D \mid Z_{\bar{B}} = 0,\ Z_i > 0\ (i \in \sigma^*)\}$

여기서 S_P^*을 원최적면, S_D^*을 쌍대최적면이라 한다. 또한 원최적면의 내부해 집합 $Int(S_P^*)$와 쌍대최적면의 내부해 집합 $Int(S_D^*)$을 다음과 같이 정의한다.

$Int(S_P^*) = \{X \in S_P^* \mid X_{\bar{B}} > 0\}$,

$Int(S_D^*) = \{(Y, Z) \in S_D^* \mid Z_i > 0\ (i \notin \sigma^*)\}$□

원최적해가 유일하게 정점해인 경우에는 원쌍대장벽법이 수렴하는 X^*는 원최적기저해가 되지만 그렇지 않는 경우에는 X^*는 원최적해면의 내부해가 된다([그림 1]). 실제 많은 선형계획 문제에 퇴화가 있으므로 원쌍대장벽법을 적용할 때 원(쌍대)최적기저해에 수렴하지 않는 경우가 많다 [4].



[그림 1] 원쌍대장벽법의 원해의 수렴 형태

연구 현황

임의의 비기저가능해 X를 이용하여 기저가능해를 추출하는 방법은 다음과 같다. $J = \sigma(X)$라고 할 때 $\{A_{\cdot j} \mid j \in J\}$에 속하는 모든 열이 서로 일차독립이면 X가 이미 기저가능해이고 그렇지 않으면 $\sum_{j \in J} \alpha_j A_{\cdot j} = 0$, $\{\alpha_j \mid j \in J\} \neq \{0\}$인 α_j가 존재한다. 만약 $\sum_{j \in J} c_j \alpha_j \geq 0$이면 $\theta = \min\{X_j/(-\alpha_j); \alpha_j < 0\}$, $\sum_{j \in J} c_j \alpha_j < 0$이면 $\theta = -\min\{X_j/\alpha_j; \alpha_j > 0\}$이라 둔다. $j \in J$이면 $\overline{X_j} = X_j + \theta\alpha_j$, $j \notin J$이면 $\overline{X_j} = X_j$로 한다. $\overline{X} \geq X$이고 $\overline{J} = \sigma(\overline{X})$라 하면 $|\overline{J}| < |J|$이다. 즉, $\overline{X}$는 목적함수 값이 X보다 나쁘지 않으면서도 양의 값을 갖는 요소의 갯수가 X보다 작다. 따라서 $X \leftarrow \overline{X}$, $J \leftarrow \overline{J}$라 두고 이 과정을 반복하면 임의의 비기저가능해로부터 기저가능해를 추출할 수 있는데 이 과정을 기저화(purification)라고 한다 [11].

Murty에 의하면 내부가능해 X와 원최적해 X^*가 $C^TX^* - C^TX \leq 2^{-L}$을 만족하면 X에 기저화 과정을 적용하면 원최적기저해를 얻을 수 있다[12]. 그러나 원최적기저해로부터 최적기저를 추출하는 문제는 그리 쉽지 않다. Megiddo는 원최적해 또는 쌍대최적해 중의 하나만을 알고 있을 때 최적기저를 강다항(strongly polynomial)시간안에 추출할 수 있으면 선형계획문제의 해도 강다항시간안에 구할 수 있다는 것을 보였다[3].

내부점 기법에서 최적기저 또는 최적해를 추출하는 방법으로는 크게 crossover를 통한 방법과 최적면의 해 추출 방법이 사용되어 왔다. crossover를 이용한 방법은 내부점 기법을 수행하다가 미리 정한 종료조건을 만족하면 단체법으로 전환하여 최적기저를 추출하는 방법이다. 단체법으로 전환하기 이전에 내부해로부터 기저가능해와 기저를 추출하는 과정을 밟아야 한다. 이 접근 방법은 Bixby, Shanno, Gill등에 의해 시도되었다. Bixby등은 원쌍대장벽법으로 주어진 선형계획문제를 푸는 도중 일정한 조건이 만족되면 단체법을 사용하여 최적기저를 구하고자 시도하였으며 Marsten등은 쌍대아핀법을 사용하여, Gill 등은 원장벽법을 사용하여 선형계획문제를 푸는 도중에 최적기저 추출을 위해 단체법으로 전환하는 방법을 사용하였다[6][9][10].

최적면의 해 추출을 위한 방법은 내부점 기법을 수행하다가 내부해가 최적면에 근접했을 때 지시자(Indicator)를 통해 최적해의 비영구조를 추측하여 최적면의 해를 찾는 방법과 섭동(perturbation)를 통해 내부해가 원최적기저해에 수렴하도록 수정해 주는 방법이 있다. 전자는 Mehrotra, Ye, Tapia, Kojima등에 의해 연구되었고 후자는 Mehrotra에 의해 제시되었다[2][5][7][8].

본 연구는 단체법을 사용하는 최적기저 추출 방법의 적용 방법과 이의 구현 결과를 제시한다. 또한 기존의 최적면의 해 인식 방법에 최적해로부터 최적기저를 추출하는 Megiddo의 방법을 결합시켜 원쌍대장벽법에서의 최적기저 추출 방법을 제시하고자 한다.

지시자

지시자 함수 $I(\mathbf{v}) = \mathbf{r}$는 내부점 기법의 k회째에서 가지고 있는 정보 v를 가지고 최적해에서 X_i가 영의 값을 가질 것인지 아니면 양의 값을 가질 것인지에 대한 정보를 나타내는 r를 돌려주는 함수를 말한다[2]. 지시자 함수를 줄여서 지시자라 부르기로 한다. 일반적으로 지시자가 돌려주는 정보 r를 통해 σ^*에 대한 정보를 얻을 수 있다. 여러 가지 지시자 함수가 있으나 본 연구에서는 변수지시자, 원쌍대지시자, Tapia 지시자, Mehrotra-Ye 지시자를 사용한다. 각 지시자의 수렴조건과 수렴속도에 대한 상세한 설명은 [2]과 [7]를 참조하기 바란다.

- 변수지시자

  $I_i(X^k) = X_i^k$

- 원쌍대지시자

  $I_i(X^k, Z^k) = X_i^k / Z_i^k$

- Tapia 지시자

  $I_i(X^k, X^{k+1}) = \dfrac{X_i^{k+1}}{X_i^k}$

- Mehrotra-Ye 지시자

  $I_i(X^k, Z^k, X^{k+1}, Z^{k+1}) = \dfrac{|Z_i^{k+1} - Z_i^k|}{Z_i^k} - \dfrac{|X_i^{k+1} - X_i^k|}{X_i^k}$

2. 단체법을 이용한 최적기저 추출

기저화와 단체법을 이용한 최저기저 추출

단체법은 주어진 기저와 기저가능해에서 시작하여 목적함수 값을 개선시키는 방향의 이웃 정점들로 이동하면서 최적기저해를 구하는 방법이다. 일반적으로 단체법은 최악의 경우 입력자료의 크기에 대해 지수시간 복잡도를 갖으므로 단체법을 최적기저 추출에 사용할 경우 다항시간 복잡도를 보장할 수 없게 된다. 그러나 실제 응용에 있어서 단체법은 매우 효율적임이 알려져 있다.

내부해로부터 최적기저를 추출하는 방법으로 주어진 내부해로부터 기저화(purification)과정을 사용하여 기저가능해를 구하고 여기에 단체법을 사용하여 최적기저를 구하는 방법을 고려해 보자. 일단 기저가능해가 구해지면 이후 단체법을 사용하여 최적기저를 구하는 과정은 잘 알려져 있으므로 내부해로부터 단체법 수행을 위한 기저가능해를 얻기 까지의 과정을 중점적으로 살펴보자.

임의의 원가능 내부해가 주어졌을 때 기저해와 이에 대응하는 기저를 얻는 방법으로 아래와 같은 기저화 방법을 사용한다. (P)와 (D)가 최적해를 가지고 내부가능해 X와 A의 서로 독립인 m개의 열의 지수 집합 Ω이 주어져 있다고 하자. 이 때 Ω에 속하는 열들로 이루어진 행렬 M을 초기기저라 부르기로 한다. 즉, $M = \{A_{\cdot i} \mid i \in \Omega\}$이다. 적절한 인공변수열을 첨가하면 Ω는 쉽게 얻어질 수 있음을 알 수 있다.

단계 1. 열선택

$\sigma(X) - \Omega = \emptyset$이면 종료한다. 아니면 $k \in \sigma(X) - \Omega$인 k를 선택하여 $\beta^k \in R^n$을 다음과 같이 계산한다.

$$\beta_i^k = \begin{cases} -(M^{-1}A_{\cdot k})_i, & \text{만약 } i \in \Omega\text{이면} \\ 1, & \text{만약 } i = k\text{이면} \\ 0, & \text{o/w} \end{cases}$$

단계 2. 작업기저수정

(1)만약 $\sigma(\beta^k) \not\subset \sigma(X)$이면 $r \in \sigma(\beta^k) - \sigma(X)$인 r를구한다.

(2)아니고 $\sigma(\beta^k) \subset \sigma(X)$이면

$C^T\beta^k < 0$이면, $r = \mathrm{argmin}\{\frac{X_i}{\beta_i^k} \mid \beta_i^k > 0\}$, $\rho = \frac{X_r}{\beta_r^k}$,

$X \leftarrow X - \rho\beta^k$로 둔다.

$C^T\beta^k \geq 0$이면, $r = \mathrm{argmin}\{\frac{X_i}{-\beta_i^k} \mid \beta_i^k < 0\}$, $\rho = \frac{X_r}{-\beta_r^k}$,

$X \leftarrow X + \rho\beta^k$로 둔다.

$\Omega \leftarrow \Omega \cup \{k\} \setminus \{r\}$, $M \leftarrow M \cup \{A_{\cdot k}\} \setminus \{A_{\cdot r}\}$로 두고 단계 1로 간다.

정리 2.1 임의의 내부가능해 X가 주어지면 위의 기저화 과정을 사용하여 $C^T\overline{X} \geq C^TX$인 기저가능해 $\overline{X}$을 구할 수 있다[11].□

임의의 기저와 이에 대응되는 기저가능해가 주어지면 단체법을 적용할 수 있다. 단체법은 기저가능해를 순회하면서 최적 조건을 만족하는 최적기저해를 구하게 된다. 따라서 임의의 내부가능해 X가 주어지면 X를 이용하여 기저가능해와 기저를 구하고 여기에 단체법을 적용하여 최적해를 찾을 수 있다.

초기기저 구성 방법

기저화 과정의 단계 1에서 현재의 기저 M에 대해 $\mathbf{x} = -M^{-1}A_{\cdot k}$를 구해야 하는데 M는 최악의 경우 n번 수정되므로 n이 큰 대형문제에서 기저화 과정은 많은 계산시간이 소요될 수도 있다. 따라서 기저화 과정을 수행하는 도중에 M에 대한 수정 회수가 작도록 초기기저 M를 구성할 필요가 있다. 또한 초기기저 M에 따라 기저화 과정이 종료되었을 때 최종적으로 얻게 되는 기저가 달라지게 되는데 이후 단체법의 국면 2를 수행할 때 기저화 과정의 최종 결과로 얻는 B가 최적기저에 포함되지 않는 열들을 많이 포함하고 있으면 단체법의 수행 회수가 많아질 수 있다. 따라서 단체법을 사용한 최적기저 추출 방법에서 초기기저 M를 어떻게 구성하는가는 최적기저 추출의 효율에 큰 영향을 미치게 된다.

Bixby등은 주어진 내부해을 이용하여 변수들을 최적기저에 포함될 가능성에 따라 초기저(superbasic)변수 집합과 비기저변수 집합으로 구분하였는데 여기서 초기저변수는 정해진 기준에 의해 최적기저에 포함될 가능성이 높은 변수를 말하며 비기저 후보 변수는 최적기저에 포함되지 않을 가능성이 많은 변수를 말한다[6]. 여기서 초기저변수들의 열을 우선적으로 초기기저에 포함시키고자 하므로 초기저변수를 효과적으로 선정하는 것이 중요하다.

최적기저 추출을 위한 초기기저를 구성할 때 중점적으로 고려해야 할 사항은 다음과 같다.

- 초기기저가 최적기저에서 포함되는 변수들을 많이 포함하고 있어야 한다.
- 초기기저가 수치적으로 안정적이여야 한다.

Bixby의 초기기저 구성 전략은 원내부해만을 이용하여 초기저변수를 선정하고 단체법의 수행을 위해 보다 수치적으로 안정한 초기 기저를 선정하는데 역점을 두고 있다. 그러나 원내부해와 쌍대내부해가 동시에 주어지는 상황에서는 원해의 정보와 쌍대해의 정보를 동시에 사용하는 것이 최적기저에 포함되는 열에 대한 보다 정확한 정보를 얻을 수 있을 것이다. 특히 주어진 쌍대내부해가 쌍대문제의 최적해에 근접한 해라면 이 쌍대해로부터 최적기저에 포함될 변수들에 대한 보다 정확한 정보를 추출할 수 있을 것이다.

지시자를 사용하여 초기저변수의 지수 집합 S를 구성하는 방법은 다음과 같다. 가정으로 변수지시자와 원쌍대지시자를 사용하는 경우는 임의의 원내부가능해와 쌍대내부가능해 $\overline{X}$, $(\overline{Y}, \overline{Z})$가 주어져 있다고 하자. 그리고 Tapia 지시자와 Ye-Mehrotra 지시자를 사용할 때는 원내부가능해와 쌍대내부가능해 $\overline{X}$, $(\overline{Y}, \overline{Z})$와 이 내부해에 내부점기법을 적용하여 개선되어 얻은 내부해 $\tilde{X}$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$가 주어져 있다고 하자. 또한 $\varepsilon_1(>0)$라고 하자.

① **변수지시자를 사용할 때**

$s_j = \overline{X}_j$로 둔다. 만약 $s_j \leq \varepsilon_1$이면, $X_j = 0$로 두고 아니면 j를 초기저변수 목록 S에 추가하고 S를 s_j가 큰 순서로 정렬한다.

② **원쌍대,Tapia,Mehrotra-Ye지시자를 사용할 때**

이 때 지시자에 따라 s_j^1, s_j^2는 다음과 같이 정의하자.

$s_j^{\cdot} = \overline{x}_j$를 구하고 다음과 같이 각각 s_j을 구한다.

- 원쌍대지시자

$$s_j = \overline{x}_j / \overline{z}_j$$

- Tapia 지시자

$$s_j = \left|\frac{\overline{x}_j}{\tilde{x}_j}\right| + \left|1 - \frac{\overline{z}_j}{\tilde{z}_i}\right|$$

- Mehrotra-Ye 지시자

$$s_j = \frac{|\overline{z}_j - \tilde{z}_i|}{\tilde{z}_j} - \frac{|\overline{x}_j - \tilde{x}_j|}{\tilde{x}_j}$$

만약 $s_j > \varepsilon_1$이고 $s_j^{\cdot} \geq 10^{-12}$이면, j를 초기저변수 목록 S에 추가하고 S를 s_j가 큰 순서로 재정렬한다. 그리고 만약 $s_j \leq \varepsilon_1$이면, $X_j = 0$로 , 만약 $s_j^{\cdot} < 10^{-12}$이면, $X_j = 0$ 로 둔다.

원내부가능해와 쌍대내부가능해가 주어지고 4개의 지시자중의 하나를 택하여 위의 제시된 방법에 따라 초기저변수의 지수 집합 S와 비기저변수의 지수 집합 $\overline{S} = \{1, 2, \cdots, n\} - S$이 구해져 있을 때 초기기저를 구성하는 방법은 다음과 같다. 여기서 $\overline{S}$에 속하는 변수들은 지수가 큰 순서대로 정렬되었다고 가정하고 $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$이라고 하자.

단계 1. 초기저변수 선정

원내부가능해 $\overline{X}$와 쌍대내부가능해 $(\overline{Y}, \overline{Z})$가 주어져 있다고 하자. 주어진 내부해를 이용하여 초기저변수 집합 S와 비기저변수 집합 $\overline{S}$를 구한다.

단계 2. 초기기저 구성

가우스 소거에 의해 $[S, \overline{S}]$ 순으로 독립인 m개의 열을 찾는다. 이 때 선회요소의 값은 $\tau = \tau_1$이상으로 제한한다. 만약 m개의 열을 찾았다면 이 m개의 열로 구성된 행렬을 M라 하고 S에서 M에 포함된 변수는 제거한다. 만약 m개의 독립인 열을 찾지 못하면 인공변수를 추가하여 M가 m개의 독립인 열을 포함하도록 만든다.

단계 3. 초기기저의 LU분해

M를 LU 분해한다. $A = [M, N]$ 이라 할 때 초기해 $\begin{bmatrix} M^{-1}(\mathbf{b} - N\overline{X}_N) \\ \overline{X}_N \end{bmatrix}$ 가 원가능해인가를 검사한다. 만약 원가능해가 아니면 $\tau = \tau_2$로 두고 단계 2와 단계 3을 수행한다.

위의 초기기저 구성 방법의 단계 3에서 구한 초기해의 원비가능성이 크면 M가 수치적으로 불안정하다고 생각하여 선회요소의 값에 더 크게 제한하여 다시 단계 2을 수행하게 된다. 만약 다시 단계 2을 수행하여 구한 M에서 초기해의 원가능해가 아니면 M를 초기기저로 하여 단체법의 국면 1을 수행하여 원가능성을 회복한 후 기저화 과정을

수행하게 된다.

3. 최적면의 해를 이용한 최적기저 추출

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법은 크게 주어진 내부해로부터 최적면의 해를 구하는 과정과 최적면의 해로부터 최적기저를 추출하는 과정의 두 단계로 구성된다.

최적면의 해 추출

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법에서는 내부해가 일정한 조건을 만족하면 최적면의 해를 추출을 시도하게 된다. 예를 들어 원쌍대장벽법의 경우는 원내부가능해와 쌍대내부가능해의 쌍대간격이 미리 정한 허용오차보다 작으면 최적면의 해를 구하는 알고리즘을 수행할 수 있다. 원쌍대장벽법에 속하는 대부분의 내부점 기법이 정해진 허용오차보다 쌍대간격이 작은 해를 다항시간안에 구하게 되므로 최적면의 해 추출도 이론적으로 다항시간안에 가능하게 된다[7].

주어진 내부해로부터 지시자를 이용하여 원최적해와 쌍대최적해를 찾는 방법은 Tapia, Zhang, Mehrotra, Ye를 비롯한 많은 사람들에 의해 연구되어 왔다. 이들은 각기 다른 절차에 의해 최적면의 해를 찾는 방법을 제시하였고 이들이 각자 사용하는 지시자도 상이하지만 본 연구는 Mehrotra-Ye의 연구를 기본으로 하는 최적면의 해를 인식하는 알고리즘을 사용한다[7]. 가정으로 원내부가능해와 쌍대내부가능해 $\overline{X}$, $(\overline{Y}, \overline{Z})$가 주어져 있고 이 내부해에 내부점 기법을 적용하여 개선되어 얻은 내부해 $\tilde{X}$, $(\tilde{Y}, \tilde{W}, \tilde{Z})$가 있다고 하자.

단계 1. 변수 집합 분할

모든 변수 X_j에 대해 $s_j = |\overline{z}_j - \tilde{z}_j|/\tilde{z}_j - |\overline{x}_j - \tilde{x}_j|/\tilde{x}_j$

$s_j' = \overline{X}_j$을구해 $s_j > \varepsilon_1$이고 $s_j' \geq 10^{-12}$이면, $\sigma \leftarrow \sigma \cup \{j\}$로 둔다. $\{A_{\cdot j} \mid j \in \sigma\}$에 속하는 열들로 이루어진 행렬을 B라 하고 $\{A_{\cdot j} \mid j \notin \sigma\}$에 속하는 열들로 이루어진 행렬을 N으로 둔다.

단계 2. 방향계산

$B\ \Delta\mathbf{x}_B = b - B\ \overline{X}_B$를
$B^T\ \Delta\mathbf{y} = C_B - B^T\overline{Y}$ 만족하는 $\Delta\mathbf{x}_B, \Delta\mathbf{y}$를 구한다.

이 때 종속인 열에 해당하는 $\Delta\mathbf{x}_B, \Delta\mathbf{y}$의 요소값은 0으로 둔다.

단계 3. 해의 수정

$X_B = \overline{X}_B + \Delta\mathbf{x}_B$, $X_N = 0$

$Y' = \overline{Y} + \Delta\mathbf{y}$, $Z_B = 0$, $Z_N = C_N - N^TY$로 둔다.

(P)의 내부가능해 $\overline{X}$와 (D)의 내부가능해 $(\overline{Y}, \overline{Z})$가 $\overline{X}^T\overline{Z} < O(1/n)2^{-2L}$을 만족하면 위의 최적면의 해 추출 방법에 의해 구한 X와 (Y,Z)는 각각 (P)와 (D)의 최적해이다[7]. 위의 최적면의 해를 추출 방법을 실제 적용하는데는 2가지 문제점이 있다. 첫번째로 단계 1에서 구한 σ가 최적해의 비영구조 σ^*를 정확히 추측해내지 못하는 경우이다. 두 번째로 쌍대간격이 $\overline{X}^T\overline{Z} < O(1/n)2^{-2L}$를 만족하는 원내부가능해 $\overline{X}$와 쌍대내부가능해 $(\overline{Y}, \overline{Z})$를 현실적으로 구할 수 없다는 것이다. 따라서 현실적으로 쌍대간격이 $O(1/n)2^{-2L}$보다 작지 않은 경우에도 최적면의 해를 추출할 수 있어야 한다.

σ^*를 예측하는 방법으로 앞에서 지시자를 사용하는 방안을 생각할 수 있다. 그러나 현실적으로 원쌍대장벽법을 무한히 수행할 수는 없고 일정한 종료조건을 만족하면 종료해야 하므로 지시자를 사용하더라고 현실적으로 σ^*를 찾는 것은 여전히 문제가 된다.

최적면의 해를 구하기 위해 변수 집합을 분할할 때는 분할 자체에만 관심을 두므로 집합 내에서의 변수간의 정렬은 고려하지 않는다. Mehrotra-Ye 지시자를 사용한 최적면의 해 추출 방법은 앞서 제시되었으므로 나머지 3개의 지시자를 사용할 경우의 변수 분할 과정은 다음과 같다. 가정으로 변수지시자와 원쌍대지시자를 사용하는 경우는 임의의 내부점 원가능해와 쌍대가능해 $\overline{X}$, $(\overline{Y}, \overline{Z})$가 주어져 있다고 하자. 또한 Tapia 지시자를 사용할 때는 원내부가능해와 쌍대내부가능해 $\overline{X}$, $(\overline{Y}, \overline{Z})$와 이 내부해에 내부점 기법을 적용하여 개선되어 얻은 내부해 $\tilde{X}$, $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$가 주어져 있다고 하자. $\sigma \leftarrow \emptyset$로 두고 변수 X_j에 대해서 다음을 수행한다. 단, $\varepsilon_1 > 0$이다.

- 변수지시자를 사용할 때

  $s_j = \overline{Z}_j$, $s_j' = \overline{X}_j$.

  $s_j > \varepsilon_j$이고 $s_j' \geq 10^{-12}$이면, $\sigma \leftarrow \sigma \cup \{j\}$로 둔다.

- 원쌍대지시자를 사용할 때

  $s_j = \overline{X}_j/\overline{Z}_j$, $s_j' = \overline{X}_j$.

  $s_j > \varepsilon_1$이고 $s_j' \geq 10^{-12}$이면, $\sigma \leftarrow \sigma \cup \{j\}$로 둔다.

- Tapia 지시자를 사용할 때

  $s_j = |\frac{\tilde{x}_j}{\overline{x}_j}| + |1 - \frac{\tilde{z}_j}{\overline{z}_i}|$, $s_j' = \overline{X}_j$.

  $s_j > \varepsilon_1$이고 $s_j' \geq 10^{-12}$이면, $\sigma \leftarrow \sigma \cup \{j\}$로 둔다.

최적면의 해로부터 최적기저 구성

(P)의 최적면의 해와 (D)의 최적면의 해가 주어져 있는 상황에서 최적기저를 구하는 방법을 생각해 보자. 본 연구에서는 Megiddo가 제시한 방법을 사용한다. Megiddo의 방법에서는 원최적기저해와 쌍대최적해로부터 최적기저에 들어가는 열을 차례로 구한다. 가정으로 원최적면의 해 X_P^*와 쌍대최적면의 해 (Y_D^*, Z_D^*)가 주어져 있다고 하자.

단계 1. 원최적해부터 원최적기저해 추출

$\Omega = \{A_{\cdot j} \mid j \in \sigma(X_P^*)\}$.

만약 Ω의 열들이 독립이고

$|\Omega| = m$이면 B^*는 Ω의 열들로 이루어진 행렬로 두고 종료한다.. $|\Omega| < m$이면 단계 2로 간다.

아니면

X_P^*에 기저화 과정을 적용하여 원최적기저해 $\overline{X}^*$를 구하고 $\Omega = \{A_{\cdot j} \mid j \in \sigma(\overline{X}_{P^*})\}$로 두고 $|\Omega| = m$이면 B^*를 Ω의 열들로 이루어진 행렬로 두고 종료하고 $|\Omega| < m$이면 단계 2로 간다.

단계 2. 쌍대최적해로부터 최적기저의 열 추출

$\overline{\Omega} = \{A_{\cdot j} \mid A^T_{\cdot j}Y_D^* = C_j\}$.

$\overline{\Omega}$에 있는 열중에 Ω에 있는 열들과 독립인 열이 있으면 이를 Ω에 추가한다. 이를 $\overline{\Omega}$에 Ω에 있는 열들과 독립인 열이 없을 때까지 반복한다.

만약 $|\Omega| = m$이면 B^*를 Ω의 열들로 이루어진 행렬로 두고 종료하고 $|\Omega| < m$이면 단계 3로 간다.

단계 3. 쌍대최적해 수정과 최적기저의 열 추출

$\overline{\Omega}$에 있지 않으면서 Ω의 열들과 독립인 열 $A_{\cdot k}$이 있을 때 $i \in \Omega$인 모든 i에 대해 $(A_{\cdot k})^Tz = 0$, $z^TA_{\cdot j} = 1$를 만족하

는 z을 구하여 $\alpha = \min\{\frac{(Y^{*})^{T}A_{\cdot k} - C_{k}}{z^{T}A_{\cdot k}};\ z^{T}A_{\cdot k} > 0\}$를 구하여 $\overline{Y}^{*} = Y^{*} - \alpha z$로 둔다.

$\overline{\Omega} = \{A_{\cdot j} \mid A^{T}_{\cdot j}\ \overline{Y}_{D}^{*} = C_{j}\}$로 두고 $\overline{\Omega}$에 있는 열중에 Ω에 있는 열들과 독립인 열이 있으면 이를 Ω에 추가한다. 이를 $\overline{\Omega}$에 Ω에 있는 열들과 독립인 열이 없을 때까지 반복한다. 만약 $|\Omega| = m$이면 B^{*}를 Ω의 열들로 이루어진 행렬로 두고 종료하고 $|\Omega| < m$이면 단계 3을 반복한다.

정리 3.1 원최적해와 쌍대최적해가 주어질 때 위의 최적기저 추출 방법은 강다항시간안에 최적기저를 찾는다[3].

단체법을 이용한 최적기저 추출 방법과의 비교

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법에서는 주어진 내부해로부터 최적면의 해를 일단 인식하고 이 최적면의 해로부터 최적기저를 구하게 된다. 반면 단체법을 이용한 최적기저 추출 방법은 주어진 내부해로부터 초기기저를 구성하고 이 초기기저로부터 기저가능해를 만들고 단체법을 수행하여 최적기저를 구하게 된다.

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법은 이론적으로 다항시간안에 최적기저를 추출할 수 있지만 단체법을 이용한 최적기저 추출 방법은 단체법의 특성상 다항시간 복잡도를 보장할 수 없게 된다.

주어진 내부해로부터 단체법을 사용하여 최적기저를 추출하는 방법에서 주관심사는 초기기저 설정에 있지만 최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법에서는 초기기저가 필요 없으므로 최적면의 해 인식과 최적면의 해로부터 최적기저 추출을 효율적으로 수행하는 것이 중요하게 된다.

4. 실험 결과

내부해의 기저화와 단체법을 이용한 최적기저 추출과 최적면의 해를 이용한 최적기저 추출을 구현하였다. 원쌍대장벽법의 해가 $\frac{|C^{T}X^{k} - b^{T}Y^{k}|}{1 + |b^{T}Y^{k}|} \le 10^{-6}$을 만족하면 최적기저 추출을 시도하였다. 내부점 코드로는 서울대 산업공학과 체계분석실에서 개발한 LPABO를 사용하였으며 CPU로 PENTINUM-100을 탑재하고 주기억장치 16M, 운영체제로 Linux를 사용한 PC에서 NETLIB에 있는 10개의 문제를 대상으로 실험하였다. 초기저변수 선정시에 ε_1의 값은 변수지시자의 경우 10^{-5}, 원쌍대지시자의 경우 0.1, Tapia 지시자의 경우 0.2, Mehrotra-Ye 지시자의 경우 10^{-11}로 각각 설정하였다. 또한 초기기저 구성시 $\tau_1 = 10^{-4}$, $\tau_2 = 10^{-3}$으로 두었다. 수행시간은 초단위로 표시하였다. 아래 표에서 P-D는 원쌍대장벽법 수행시간, 각각의 지시자에서 IT는 초기기저 구성시간, ST는 이후 기저화와 단체법에 수행되는 시간을 의미한다.

[표 1]에서 원쌍대장벽법의 전체 수행시간은 676.12초이고 변수지시자를 사용할 때의 최적기저 추출에 소요되는 시간은 41.42초, 원쌍대지시자의 경우 38.03초, Tapia 지시자의 경우 72.7초, Mehrotra-Ye 지시자의 경우 55.29이다. 최적기저 추출에 소요되는 시간은 원쌍대장벽법 수행시간의 7~11% 정도이고 원쌍대지시자를 사용한 경우가 가장 빠른 것을 알 수 있다. 또한 초기기저 구성에 소요되는 시간이 최적기저 추출 시간의 약 50%를 차지함을 알 수 있다.

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법의 실험결과는 [표 2]와 같다. 원쌍대장벽법을 종료하는 시점은 crossover를 통한 최적기저 추출 방법의 경우와 동일하다. 최적기저 추출에서는 최적면의 해 인식에 실패하면 내부점기법을 1회 더 수행하고 다시 최적면의 해 인식을 시도하게 하였다. [표 2]에서 첫번째와 두번째 칸은 문제이름과 문제크기를 나타낸 것이고 각각의 지시자의 첫번째 칸(ST)는 최적해로부터 최적기저 추출이 완료되는 단계를 의미한다. 또한 각각의 지시자의 두번째 칸(NTRY)은 최적기저 추출시까지의 최적해 인식을 시도한 회수, 세번째 칸은 내부점 기법 수행시간를 포함한 최적기저를 추출할 때까지의 전체 소요시간을 의미한다. 각 지시자에서 ε_1의 값은 crossover의 경우와 동일하게 설정하였다.

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출방법은 crossover를 통한 최적기저 추출 방법보다 2~3배정도 더 계산시간이 소요되었으며 또한 변수 집합의 분할시에 원쌍대지시자나 변수지시자를 사용하는 것이 전체 수행시간면에서 우수한 것으로 나타났다.

[표 1] crossover를 통한 최적기저 추출 실험

문제이름		P-D	변수지시자		원쌍대지시자		Tapia 지시자		Mehrotra-Ye 지시자	
문제이름	크기	시간	IT	ST	IT	ST	IT	ST	IT	ST
AFIRO	28 * 32	0.07	0.11	0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09
SC50B	51 * 48	0.09	0.1	0.09	0.11	0.1	0.08	0.19	0.09	0.1
SCSD1	78 * 760	0.98	0.15	0.84	0.13	0.74	0.13	0.87	0.16	1.13
SC105	106 * 103	0.21	0.11	0.1	0.13	0.09	0.12	0.58	0.11	0.1
STOCFOR1	118 * 111	0.43	0.1	0.31	0.11	0.3	0.12	0.3	0.13	0.3
SCAGR7	130 * 140	0.84	0.11	0.13	0.09	0.11	0.1	0.12	0.12	0.09
SC205	206 * 203	0.6	0.24	0.11	0.24	0.14	0.21	0.37	0.22	0.11
STANDATA	360 *1075	6.18	0.35	0.83	0.36	0.85	0.39	0.75	0.39	1.84
STANDMPS	468 *1075	8.44	0.52	0.94	0.52	0.96	0.62	1.17	0.54	2.26
AGG2	517 * 302	61.4	0.5	1.95	0.47	1.04	1.05	1.77	1.05	1.1
AGG3	517 * 302	61.11	0.47	1.75	0.46	1.1	1.01	1.61	1.05	1.58
FFFFF800	525 * 854	85.32	0.62	2.23	0.51	1.47	1.05	2.24	0.78	1.77
BNL1	644 *1175	31.45	2.08	6.04	2.4	4.31	2.42	7.0	2.48	9.91
SHIP08L	779 *4283	271.8	2.73	3.53	2.82	3.47	3.36	3.53	3.89	3.91
25FV47	822 *1571	147.2	11.7	2.74	10.1	3.73	16.4	24.9	15.3	4.72

[표 2] 최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 실험

		변수지시자		원쌍대지시자		Tapia 지시자		Mehrotra-Ye 지시자	
문제이름	크기	IT	시간	IT	시간	IT	시간	IT	시간
AFIRO	28 * 32	1/2	0.58	1/2	0.59	1/2	0.5	1/2	0.58
SC50B	51 * 48	1/1	0.49	1/1	0.5	1/1	0.51	1/1	0.52
SCSD1	78 * 760	1/3	2.18	1/3	2.12	10/3	3.56	8/3	3.34
SC105	106 * 103	1/2	0.73	1/2	0.7	1/1·	0.93	1/1	0.93
STOCFOR1	118 * 111	1/2	1.06	1/2	1.0	1/2	0.99	1/2	1.04
SCAGR7	130 * 140	1/1	1.37	1/1	1.33	1/1	1.35	1/1	1.35
SC205	206 * 203	1/2	1.26	1/2	1.21	1/2	2.53	1/1	1.73
STANDATA	360 *1075	1/3	9.56	1/3	9.62	1/3	9.81	1/3	9.73
GROW22	441 * 946	1/1	21.06	1/1	19.53	1/1	18.89	1/1	19.31
STANDMPS	468 *1075	1/3	13.17	1/3	13.39	1/3	13.21	1/3	13.28
AGG3	517 * 302	1/2	66.43	1/2	66.12	1/2	64.69	2/2	66.48
SHELL	537 *1774	1/3	16.86	1/3	9.15	1/3	9.07	4/3	9.09

6. 결론

본 연구에서는 내부가능해가 주어져 있을 때 기저화 과정과 단체법을 사용하여 최적기저를 구하는 방법과 최적면의 해를 이용하여 최적기저를 구하는 방법을 제시하였다.

제시된 방법을 구현하여 실험한 결과 crossover통한 최적기저 추출 방법은 내부점 기법 수행시간의 약 6~12%, 최적면의 해를 이용한 최적해 인식은 내부점 기법 수행시간의 약 20~30% 정도가 소요되는 것으로 나타났다. 실험결과에 비추어 보면 단체법을 통한 최적기저 추출 방법이 최적면의 해를 이용한 최적기저 추출방법에 비해 더 효율

적인 것으로 나타났다.

기저화와 단체법을 이용한 최적기저 추출 방법에서는 초기기저를 구성하는 시간이 최적기저 추출시간의 약 40~50%정도를 차지하며 초기기저 구성시 초기저변수를 선정하는 기준으로 원쌍대지시자를 사용하는 것이 가장 효과적인 것으로 나타났다.

최적면의 해를 이용한 최적기저 추출 방법은 실험 결과에 의하면 crossover를 통한 최적기저 추출 방법에 비해 2~3배 정도 더 시간이 걸리는 것으로 나타났으며 최적면의 해 인식에 있어서 변수 집합 분할시에는 변수지시자나 원쌍대지시자를 사용하는 것이 효과적이었다.

참고문헌

1. **박순달, 선형계획법, 박영사**, 1992
2. El-bakry, A.S., R.A. Tapia, Y. Zhang, A study of indicators for identifying zero variables in interior point methods, *SIAM Review*, vol. 36, No. 1, 1994, pp.45-72.
3. Megiddo, Nimrod, On finding primal- and dual-optimal bases, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 3, No. 1, Winter 1991.
4. Güler, O., D. den Hertog, C. Roos, T. Terlaky, T. Tsuchiya, Degeneracy in interior point methods for linear programming: a survey, *Annals of Operations Research 46*, 1993, pp.107-138.
5. Tapia, R.A.,Yin Zhang, An optimal-basis identification technique for interior-point linear programming algorithms, *Linear algebra and its applications*, 152, 1991, pp.343-363.
6. Bixby, R. E., Matthew J. Saltzman, Recovering an optimal LP basis from an interior point solution, *Operations Research Letters* 15, 1994, pp.169-178.
7. Mehrotra,S., Yinyu Ye, Finding an interior point in the optimal face of linear programs, *Mathematical Programming* 62, 1993, pp.497-515.
8. Mehrotra, S., On finding a vertex solution using interior point methods, *Linear algebra and its applications*, 152, 1991, pp.233-253.
9. Marsten, R. E., Matthew J. Salzman, David F. Shanno, George S. Pierce, J. F. Ballintijn, Implementations of a dual affine interior point algorithm for linear programming, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 1, No. 4, Fall 1989.
10. Gill, P. E., Walter Murray, Michael A. Saunders, J.A. Tomlin, Margaret H. Wright, On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method, *Mathematical Programming* 36, 1986.
11. Kortanek,K.O.and Zhu Jishan, New purification algorithm for linear programming, *Naval Research Logistics*, Vol. 35, 1988, pp.571-583.
12. Murty,K.G., *Linear Complementarity, Linear and nonlinear programming*, Sigma Series in Applied Mathematics, Heldermann Verlag Berlin, pp.474-476.