Weighted Average of Fuzzy Numbers

김 국
서경대학교 산업공학과
서울 성북구 정릉동 16-1

Abstract

When data is classified and each class has weight, the mean of data is a weighted average. When the class values and weights are trapezoidal fuzzy numbers, we can prove the weghted average is a fuzzy number though not trapezoidal. Its 4 corner points are obtained.

기호

X, Y, ... 일반적인 집합 (Crisp support sets)

x, y, ... 집합의 원소. 예로써 x ∈ X.

$\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots$ 모호집합. 예로써 $\tilde{A}=\{(x, \mu_A(x))\}$ 은 원소 x와 그 원소의 자격정도, 즉 집합의 정의에 부합하는 정도 $\mu_A(x)$를 짝으로서 동반. 여기서는 모호수.

$\mu_A(x)$ $\tilde{A}$의 자격함수.

※지지구간(support set) : 0보다 큰자격값을 가지는 정의역

"... " 모호집합의 호칭. 예로써 $\tilde{A}$= "*high*", $\tilde{B}$= "평가치"

1. 확장원리와 가중합산

각 등급이 아래와 같이 측정되었다고 하자.

	등 급 치	가 중 치
등 급 1	$\tilde{A}_1$	$\tilde{W}_1$
등 급 2	$\tilde{A}_2$	$\tilde{W}_2$

여기서

$\tilde{A}_i$: 모호수 (a_i, b_i, c_i, d_i),

$\tilde{W}_i$: 모호수 $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$.

※ 모호수의 정의는 생략. Dubois[1]를 참조한다.

각 등급치 및 가중치가 모호수가 아닌 실수로 주어진다고 하면 다음과 같은 식으로 데이터의 합을 구할 수 있다. 소위 가중합산이다.

$$z=x_1w_1+x_2w_2 \quad \cdots\cdots(1)$$

이론적으로 그리고 실제적으로 모호집합이론에서 원리로 인정되는 Zadeh의 확장원리[6]를 이용하여 가중합 $\tilde{T}$를 얻는다.

$$\tilde{T}=\tilde{A}_1\tilde{W}_1+\tilde{A}_2\tilde{W}_2 \quad \cdots\cdots(2)$$

이고 그 자격함수 $\mu_T(z)$는;

$$\max_{z=x_1w_1+x_2w_2}\left[\min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{W_1}(w_1), \mu_{A_2}(x_2), \mu_{W_2}(w_2)\}\right] \quad \cdots\cdots(3)$$

의 모호집합이 된다.

확장원리로부터 $\tilde{T}$를 구하기 위해서는 모호수의 연산에 관해 몇 가지 정리를 사용한다. 여기에 사용되는 것은 모호수의 합과 곱이다.

<u>모호수의 합</u>

$\tilde{N}_1=(a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\tilde{N}_2=(a_2, b_2, c_2, d_2)$이면,

$\tilde{N}_1+\tilde{N}_2=(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)$,

자격함수 μ는 $[a_1+a_2, b_1+b_2]$에서 단조증가, $[c_1+c_2, d_1+d_2]$에서 단조감소. 여기서 $\mu_L=(\mu_{1L}^{-1}+\mu_{2L}^{-1})^{-1}$, $\mu_R=(\mu_{1R}^{-1}+\mu_{2R}^{-1})^{-1}$. L과 R은 각각 왼쪽, 오른쪽을 뜻한다.

이의 증명은 Dubois[1]를 참조한다. 이를 보면 자격함수의 증가, 감소 부분만 역함수가 사용될 뿐 4 곳의 수치는 각각 대응위치끼리 합산한 것과 같다. 특히 사다리꼴 자격함수를 가진 모호수 간의 합의 경우 역시 사다리꼴 모호수가 된다. 예를 들어 사다리꼴 자격함수를 가진 두 모호수 (1, 3, 5, 8) + (2, 3, 5, 6)의 합은 사다리꼴 모호수 (3, 6, 10, 14)이 된다.

<u>모호수의 곱</u>

$\tilde{N}_1=(a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\tilde{N}_2=(a_2, b_2, c_2, d_2)$이면 (단 a_1, a_2는 양수), $\tilde{N}_1 * \tilde{N}_2=(a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2)$. 자격함수는 $[a_1a_2, b_1b_2]$에서 단조증가, $[c_1c_2, d_1d_2]$에서 단조감소. 여기서 $\mu_L=(\mu_{1L}^{-1} * \mu_{2L}^{-1})^{-1}$, $\mu_R=(\mu_{1R}^{-1} * \mu_{2R}^{-1})^{-1}$.

이의 증명은 역시 Dubois를 참조한다. 이를 보면 모호수의 합의 경우와 달리 왼쪽 끝점이 양수라는 제한이 있다. 곱의 예로써 사다리꼴 자격함수의 두 모호수 (1, 3, 5, 8)*(2, 3, 5, 6) 간의 곱은 (2, 9, 25, 48)이 된다. 그러나 이의 자격함수는 사다리꼴이 아니다. 즉 자격함수는 역함수의 형태로 왼쪽에서 $x=2\mu^2+5\mu+2$가 되고 오른쪽에서 $x=3\mu^2-26\mu+48$ $0<\mu<1$이 된다. 자격함수의 역함수가 2차 함수 꼴이며 이러한 모양은 자격함수의 모습을 공식처럼 수립하여 PC를 이용하면 쉽게 그려낼 수가 있다. 왼쪽부분에서 위로 볼록하고 오

튼쪽 부분에서 아래로 볼록하므로 사다리꼴로 가정할 때와 비교하면 모호도는 줄어든다.

모호수가 음수와 양수에 걸쳐 정의될 때의 곱에 대해서는 여기서 사용되지 않으므로 생략한다.

가중합산은 위 정리와 확장원리에 의해 구해진다.

<u>모호수의 가중합산</u>

$\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$,

$\tilde{W}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $\tilde{W}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$이면,

$$\tilde{A}_1\tilde{W}_1 + \tilde{A}_2\tilde{W}_2 = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, b_1\beta_1 + b_2\beta_2, c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2, d_1\delta_1 + d_2\delta_2) \quad \cdots\cdots(5)$$

이를 보면 4 개의 꼭지점은 각 대응점 간의 가중합산과 같다. 그 자격함수에 관해서는 앞의 합 또는 곱에서 보인 것과 유사하다. 증명은 곱에 관한 것과 합에 관한 것의 순차적 적용으로 보일 수 있다.

이를 확장하면 항목이 여러 개인 일반적인 경우도 성립한다. 또 각 모호수가 사다리꼴이더라도 가중합산 결과의 자격함수는 그 모습이 모호수의 곱에서 본 바와 같이 사다리꼴이 아니다. 그러나 결과를 Tanaka[4]의 근사식 즉 사다리꼴로 가정하여도 대부분의 경우 별 문제가 없다.

그리나 모호수의 가중평균의 경우는 이와 달리 분모 분자에 동일한 모호수가 들어 가게 되어 복잡하며 뒤에서 설명된다.

<u>예제</u>

아래 표와 같이 각 등급의 등급치와 가중치가 모호수로 주어졌다고 하자. 정의역은 [0,1]이다.

	등 급 치	가 중 치
등급1	(0.5, 0.7, 0.8, 0.9)	(0.4, 0.6, 0.7, 0.9)
등급2	(0.4, 0.5, 0.6, 0.8)	(0.3, 0.4, 0.5, 0.6)

그러면 가중합 $\tilde{T}$ 는 앞에서 설명한 바에 따라 $\tilde{T} = \tilde{A}_1\tilde{W}_1 + \tilde{A}_2\tilde{W}_2$ = (0.32, 0.62, 0.8, 1.29) 이 된다. 이 모호수의 정의역은 z = [0, 2]이다.

참고로 자격함수는 역함수 형태로 왼쪽에서 $z = 0.05\mu^2 + 0.25\mu + 0.32$, $0 < \mu < 1$이고 오른쪽에서 $z = 0.03\mu^2 - 0.38\mu + 1.29$, $0 < \mu < 1$이다.

2. 가중평균 - 표준화 방법

측정치로부터 다른 집단과 비교, 또는 기준치와의 비교를 하기 위해 표준화가 필요하다. 그러면 원래 단순가중합산 결과는 구간이 [0, 2] 였는데 어떻게 [0, 1]로 표준화하는가.

(1) $z' = z/2$ 로 변환하는 방법 (잘못된 방법)

그러면 Z[0,2]가 Z'[0,1]로 된다. 마치 그대로 축약한 것과 같다. 이것으로 문제는 간단히 끝난 것처럼 보이지만 대단히 부적당하다. 왜냐하면 등급이 여럿일 경우, 중요도가 떨어지는 등급들이 추가될 경우 (인위적으로 넣어보면 그 효과를 알 수 있다) 가중합은 왼쪽으로 이동하는 효과가 있다. 즉 항목이 n 개일 경우 이론적인 총평점구간은 [0, n]이고 값 n이 이론적인 가장 큰 위치지만 이것은 각 항의 가중치가 1 쪽에 있을 때에 의미가 있다. 극단적인 예로서 무의미한 등급을 추가할수록 가중합산의 범위는 늘어나고 가중합의 위치는 전체 범위의 왼쪽으로 이동한다. 이러한 경우는 다기준의사결정에서 잘 알려진 문제이다[2].

(2) 표준화 - 가중평균 방법

만일에 가중치들이 모호수가 아닌 일반 상수라 하면 (등급치는 모호수라도 상관없다) 가중합 대신 표준화는 가중평균의 식으로부터

$$\frac{A_1w_1 + A_2w_2}{w_1 + w_2} \quad \cdots\cdots(6)$$

로 하면 된다. 각 등급치가 1에 가까우면 (6)의 결과가 "1" 부근에 나타난다.

그러나 문제는 가중치가 모호수이고 다음과 같이 분자 분모에 모두 나타난다는 것이다.

$$\frac{\tilde{A}_1\tilde{W}_1 + \tilde{A}_2\tilde{W}_2}{\tilde{W}_1 + \tilde{W}_2} \quad \cdots\cdots(7)$$

모호수의 역수, 모호수의 나눗셈에 관한 정리는 Dubois에 나와 있으나 가중평균에 대해서는 나와 있지 않다. 이것은 모호수의 합, 곱 또는 가중합산과 달리 4 곳의 점이 대응위치끼리 연산으로 이루어지지 않는다.

확장원리에 따라 복잡한 과정을 거쳐 위 (7)는 모호수가 됨을 증명할 수 있다. 자격함수의 모습을 정확히 표현할 수 없으나 4 꼭지점은 대수적으로 아래와 같이 결정된다.

$$a = \min\left[\frac{w_1 * a_1 + w_2 * a_2}{w_1 + w_2}, w_1 = \{\alpha_1, \delta_1\}, w_2 = \{\alpha_2, \delta_2\}\right]$$

$$b = \min\left[\frac{w_1 * b_1 + w_2 * b_2}{w_1 + w_2}, w_1 = \{\beta_1, \gamma_1\}, w_2 = \{\beta_2, \gamma_2\}\right]$$

$$c = \min\left[\frac{w_1 * c_1 + w_2 * c_2}{w_1 + w_2}, w_1 = \{\beta_1, \gamma_1\}, w_2 = \{\beta_2, \gamma_2\}\right]$$

$$d = \min\left[\frac{w_1 * d_1 + w_2 * d_2}{w_1 + w_2}, w_1 = \{\alpha_1, \delta_1\}, w_2 = \{\alpha_2, \delta_2\}\right]. \quad \cdots\cdots(8)$$

다소 복잡해 보지만 전부 대수적으로 구해진다. c와 d는 각각 b와 a에 대칭적인 형태이다. 윗식을 보면 a는 각 항목 평가치의 a 부분을 전부 사용하되 가중치에 대해서는 단순히 왼쪽 끝점이 아닌 왼쪽 끝 또는 오른쪽 끝점의 조합에 의한 것 중에서 결정됨을 알 수 있다. 이를 확장하면 항목이 두 개이상인 일반적인 경우도 성립한다.

<u>예제(계속)</u>

앞의 예제를 계속하면 4 꼭지점을 구하는 과정이 아래 표와 같다.

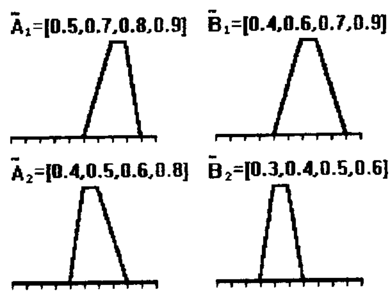

그림 1. 모호수 측정치 예제

꼭지점	w_1= {α_1, δ_1}	w_2= {α_2, δ_2}	$\frac{w_1*0.5+w_2*0.4}{w_1+w_2}$	최소값
a	0.4	0.3	0.4561	0.4400
		0.6	0.4400	
	0.9	0.3	0.4750	
		0.6	0.4600	

꼭지점	w_1 = {β_1, γ_1}	w_2 = {β_2, γ_2}	$\frac{w_1*0.7+w_2*0.5}{w_1+w_2}$	최소값
b	0.6	0.4	0.6200	0.6090
		0.5	0.6090	
	0.7	0.4	0.6272	
		0.5	0.6166	

꼭지점	w_1 = {β_1, γ_1}	w_2 = {β_2, γ_2}	$\frac{w_1*0.8+w_2*0.6}{w_1+w_2}$	최소값
c	0.6	0.4	0.7200	0.7090
		0.5	0.7090	
	0.7	0.4	0.7272	
		0.5	0.7166	

꼭지점	w_1= {α_1, δ_1}	w_2= {α_2, δ_2}	$\frac{w_1*0.9+w_2*0.8}{w_1+w_2}$	최소값
d	0.4	0.3	0.8571	0.8400
		0.6	0.8400	
	0.9	0.3	0.8750	
		0.6	0.8600	

따라서 가중평균은 $\underline{\tilde{I}}$=(0.44, 0.609, 0.709, 0.84) 가 된다.

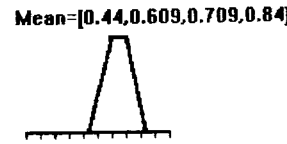

그림 2. 모호한 가중평균(근사치)

3. 결론

측정에 있어서 주관적 평가 및 불확실한 정보하의 측정을 모호집합 이론에 근거하여 등급치와 가중치가 모호수로 주어질 때 가중합을 구하는 것은 매우 단순하고 직관적이다. 그러나 가중평균은 단순하지 않다. 다기준의사결정과 같은 문제에서 평가의 왜곡화를 피하기 위해 표준화가 필요한데 이를 위하여서는 모호수의 가중평균이 필요하다. 모호한 가중평균의 4 꼭지점은 등급치와 가중치의 4 꼭지점을 대응시켜서가 아니라 조합에 의해서 결정된다.

References

[1] Dubois, D., & H. Prade, Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, 1980

[2] Hwang, C.L., & Yoon, K. Multiple Attribute Decision Making: Method and Applications, Springer Verlag, 1981

[3] Jain, R., "Tolerance analysis using fuzzy sets," I.J. Sys. Sci., 7.12, 1976, 1393-1401

[4] Tanaka, H., et al., Fault-tree analysis by fuzzy probability, IEEE Tr. on Rel., 32.5, 1983, 453-457

[5] Zadeh, L.A., "Fussy Sets," Infor. & Control, 8., 1965, 338-353

[6] Zadeh, L.A., "The concept of linguistic variable and its applications to approximate reasoning - I, II, III," Infor. Sci., 8., 1975, 199-249 & 9., 1975, 43-80