3차원 길로틴 3단계 자재절단 방법에 관한 연구†

A Study on the 3-Stage 3-Dimensional Guillotine Cutting-Stock Problem

김상열, 박순달
서울대학교 산업공학과

Abstract

This paper deals with the method providing an exact solution to the 3-dimensional guillotine cutting stock problem. We suggest a 3-stage cutting method using the property that cubic material has to be cut into 2-dimensional planes firstly. This method requires more stocks than the general guillotine cutting methods but can save work force. By using the 1-dimensional dynamic programming, we reduce the computational time and the memory requirement in the 3-stage guillotine cutting method.

Key word ; cutting stock problem, guillotine cutting, dynamic programming, 3-stage cutting.

1. 서 론

자재절단 문제(cutting stock problem;CSP)란 일정한 크기로 생산된 원자재를 여러 크기의 부품으로 자를 때 발생되는 손실의 양을 최소화하면서 원하는 부품들의 소요를 만족시키도록 하는 문제이다. 자재절단 문제는 사용하는 공간의 차원에 따라 1차원, 2차원, 3차원 문제로 분류된다. 1차원 자재절단 문제란 봉이나 막대와 같이 한 차원으로만 크기를 갖는 원자재로부터 원하는 부품을 한 방향으로만 잘라내야 하는 문제를 말한다. 이에 비해 2차원 자재절단 문제란 가로, 세로의 크기를 갖는 평면 원자재로부터 다양한 가로, 세로의 크기를 갖는 작은 사각형의 부품을 잘라내는 문제를 말한다. 3차원 자재절단 문제란 3차원의 형태를 갖는 부피가 있는 원자재를 잘라 내는 문제인데 3차원 자재는 현실 제약상 항상 2차원 자재로 절단된 후 사용되어야만 하는 제약이 있다. 본 연구에서는 3단계 길로틴 수직절단 제약 하에서 부품을 잘라내는 문제를 다루고자 한다. 3단계 길로틴 절단이란 3차원의 육면체 원자재를 1차로 한쪽 방향으로만 모두 절단하여 2차원 사각형의 자재로 만든 후 이와 같이 절단된 사각형의 부분 원자재를 2차, 3차로 서로 절단 방향에 수직으로 절단하여 원하는 육면체의 부품을 각 부품당 단 3회의 절단을 통해 얻어내는 절단 방법을 말한다. 이와 같은 절단은 3차원의 육면체를 잘라 작은 육면체의 부품을 얻어낼 때 실제 절단 공정에서 공정의 효율을 높이기 위해 사용되는 절단 방법이다.

본 연구에서는 육면체의 원자재로부터 다양한 크기의 육면체 부품을 잘라낼 때 부품은 원자재의 가로나 세로, 높이 방향에 평행하게 자르도록 한다. 또한 부품은 돌려놓아 절단할 수 없으며 원자재의 한쪽 모서리에서 반대편 모서리까지 한번에 잘라내는 길로틴 절단을 하는데 단 3회의 절단을 통해 부품이 만들어지도록 한다

2. 연구현황

자재절단문제에 대한 최적해 해법으로서는 크게 선형계획법에 의한 방법과 분지한계법에 의한 방법으로 대별될 수 있다. 1961년 Gilmore & Gomory[4]는 선형계획법을 이용해 1차원 자재절단문제(이하 CSP)를 해결하는 방법을 제시하였다. 이전에는 원자재로부터 원하는 부품을 잘라 내는 모든 방법을 한번에 모두 고려하지 못하였기 때문에 CSP를 선형계획법으로 해결하는 것이 불가능하였다. 그러나 Gilmore & Gomory는 열제조(column generation)방법을 사용하여 선형계획법의 진입열을 매회 만들어 내도록 하였다. 이들은 배낭문제를 이용해 패턴을 매회 만들어 내어 이를 진입열로 사용하도록 했는데 이 배낭문제는 동적계획법을 사용하여 해결하였다. 1966년 Gilmore & Gomory[5]는 이를 2차원 문제로 확장된 CSP를 최적해 방법에 의해 푸는 동적계획법을 제안하였다. Beasley[1]는 한 개의 원자재로부터 원하는 부품들을 잘라 낼 수 있는 다단계 동적계획법을 제안했다. 이는 Herz[7]에 의해 발견된 Gilmore & Gomory의 동적계획모형의 오류를 분석하고 이를 개선한 새로운 동적계획모델을 제시한 것이다. 분지한계법에 의한 해결방안으로서는 Christofides & Whitlock[2]가 원자재로 부터 잘려지는 부품의 갯수를 제한하는 제한적 CSP를 해결하는 방법을 제시하였다. 이들은 분지한계법을 사용하여 다단계 절단 방법을 해결하도록 하였는데 이때 각 마디는 새롭게 잘려지는 부품을, 분지는 새로운 절단을 표시하도록 하였다. 상한값은 수송문제를 풀어 더 이상 절단할 수 없는 부품의 합을 계산한 값으로 하였다. Christofides & Hadjiconstantinous[3]는 77년에 제시된 분지한계법에서 수송문제를 풀어 나온 값을 이용하여 한계를 정하는 것이 시간소요를 매우 크게 하는 단점을 가지고 있음을 밝히고 이를 동적계획법을 이용하여 상한값을 제시하도록 하였다. 분지한계법에 의한 다른 해결 방법으로서 Viswanathan & Bagchi[9]는 Wang[10]의 발견적 기법인 bottom-up 부품첨가방법을 사용하되 평가함수에 의한 분지한계법을 제시하였다. 이들은 매 분지단계에서 동적계획법을 통해 만들어진 상한을 이용하여 평가함수 값을 구한 후 인공지능의 최적우선탐색(best first search)방법에 의해 탐색해 나가는 방법을 사용하였다. 3차원 자재절단문제는 Schneider[8]가 처음으로 다루었는데 이는 부품의 회전이 허용되지 않고 같은 부품으로만 층(stack)을 이루어야 한다는 길로틴절단 제약하에서 문제를 해결하였다. 그는 잘려지는

† 본 연구는 대우재단의 Post-Graduate 장학연구지원으로 이루어졌음.

상자의 수요를 정확히 만족시키기 위해 조합화방법(combination method)을 사용하였다. 그러나 모든 조합을 매 단계에서 고려하는 것은 시간소요 및 저장공간의 소요를 크게 하는 단점이 있었다.

본 연구방법은 Schneider의 제약하에서 절단방법을 효율적으로 개선시키고 3단계 방법에 의해 최적해를 구하도록 한다.

3. 수리계획 모형

다음 0-1 정수계획문제를 보자. 이 문제는 원자재의 가로를 x축, 세로를 y축, 높이를 z축, 원자재의 좌측 하단 위치가 (0,0,0)이라 할 때 부품 i의 잘려지는 위치(a,b,c)를 찾는 것이다. 즉, 원자재의 위치 (a,b,c)에 j번째 부품 i의 좌측하단이 위치해 있어 잘려진다면 $x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc}$ 가 각각 1이 되게 되는 0-1 정수계획모델이다.

변수 설명

m ; 상자 종류의 개수,

Q_i ; 상자 i의 최대 적재가능 개수, i=1,...,m

x_{ija} = 1, j번째 i 상자의 좌측하단의 x좌표 위치가 a 일경우 i = 1,...,m, j=1,..., Q_i, a $\in L_i$

= 0, 그렇지 않으면

y_{ijb} = 1, j번째 i 상자의 좌측하단의 y좌표 위치가 b 일경우 i = 1,...,m, j=1,..., Q_i, b $\in W_i$

= 0, 그렇지 않으면

z_{ijc} = 1, j번째 i 상자의 좌측하단의 z좌표 위치가 c 일경우 i = 1,...,m, j=1,..., Q_i, c $\in H_i$

= 0, 그렇지 않으면

g_{rst} = 1, 어느상자에 의해서도 적재되어지지 않은 공간일경우
r=0,...,L-1 s=0,...,W-1 t=0,...,H-1

= 0, 그렇지 않으면

v_i = 상자 i 의 가치 (부피) i=1,...,m

$SSW(i)$; 세로가 w_i와 같은 부품들의 집합 i = 1,...,m

$SSH(i)$; 높이가 h_i와 같은 부품들의 집합 i = 1,...,m

SW ; 각각 다른 세로 길이들의 집합

SH ; 각각 다른 높이 길이들의 집합

원자재의 가로, 세로, 높이에 대한 이산화 지점 L_i, W_i, H_i 을 다음과 같이 정의한다.

$$L_i = \{x \mid x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k l_k,\ 0 \le x \le L - l_i,\ 0 \le \alpha_k \le Q_k,\ \alpha_k \text{ 는 정수},\ k = 1, \ldots, m\}$$

$$W_i = \{y \mid y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k w_k,\ 0 \le y \le W - l_i,\ 0 \le \beta_k \le Q_k,\ \beta_k \text{ 는 정수},\ k = 1, \ldots, m\}$$

$$H_i = \{z \mid z = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k h_k,\ 0 \le z \le H - h_i,\ 0 \le \gamma_k \le Q_k,\ \gamma_k \text{ 는 정수},\ k = 1, \ldots, m\}$$

정수계획 모형

1차절단을 z축, 2차절단을 y축, 3차절단을 x축으로 하는 3단계 절단에 대한 정수계획모형은 다음과 같다.

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a \in L_i} x_{ija} \tag{3.1}$$

$$s.t. \quad \sum_{r=a}^{a+l_i-1} \sum_{s=b}^{b+w_i-1} \sum_{t=c}^{c+h_i-1} g_r \le (3 - x_{ija} - y_{ijb} - z_{ijc}) l_i w_i h \tag{3.2}$$

i=1,...,m, j=1,..., Q_i $a \in L_i$, $b \in W_i$, $c \in H_i$

$$\sum_{a \in L_i} x_{ija} \le 1 \qquad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,Q_i \tag{3.3}$$

$$\sum_{a \in L_i} x_{ija} = \sum_{b \in W_i} y_{ijb} \qquad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,Q_i \tag{3.4}$$

$$\sum_{b \in W_i} y_{ijb} = \sum_{c \in H_i} z_{ijc} \qquad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,Q_i \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i h_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{a=r-l_i+1,\, a \in L_i}^{r} x_{ija} + \sum_{s=0}^{W-1} \sum_{t=0}^{H-1} g_{rst} = WH \qquad r=0,\ldots,L-1 \tag{3.6}$$

$$\sum_{i \in SSW(k)} l_i h_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{b=s-w_i+1,\, b \in W_i}^{s} y_{ijb} + \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{t=0}^{H-1} g_{rst} = L \cdot h_i \qquad k=1,\ldots,m,\ s=0,\ldots,W-1 \tag{3.7}$$

$$\sum_{i \in SSH(k)} l_i w_i \sum_{j=1}^{Q_i} \sum_{c=t-h_i+1,\, a \in L_i}^{t} z_{ijc} + \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{W-1} g_{rst} = L \cdot W \qquad k=1,\ldots,m,\ t=0,\ldots,H-1 \tag{3.8}$$

$$x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc} \in \{0,1\}\ \forall_{ijabc}, \quad g_{rst} \in \{0,1\}\ \forall_{rst}$$

목적함수 (3.1)은 원자재로부터 절단되는 부품의 가치(부피)합을 최대화 하도록 하는 것이다. 제약식 (3.2)는 j번째 i부품의 절단 위치가 (a,b,c)라면 부품의 좌하단지점 (a,b,c)로부터 부품의 부피만큼의 위치에 대한 g_{rst}변수는 0 이 되어야 하고 그외는 1이 되도록 제약하는 식이다. 제약식 (3.3), (3.4), (3.5)는 j번째 i부품은 단 한번 절단되어야 하며 만일 절단되었다면 그에 따른 x_{ija}, y_{ijb}, z_{ijc} 값은 동시에 1을 갖도록 제약하는 식이다. 제약식 (3.6), (3.7), (3.8)은 원자재안에 부품이 서로 겹쳐서 절단되지 못하도록 제약하는 식으로서 각각 길이, 너비, 높이에 대하여 고려한 것이다.

4. 이론적 배경

3단계 절단이란 3차원의 원자재를 1차로 잘라내 2차원의 원자재로, 다음 2차로 잘라내 1차원의 원자재로 만들어 나가는 과정을 말한다. 따라서 원자재의 가로축을 x축, 세로축을 y축, 높이축을 z축이라 하고 이 x축, y축, z축 3개의 절단중 가치를 최대화 시키는 절단을 1차절단으로 선정하도록 한다. 다음과 같은 동적계획 모형을 고려해 보자

$F_x(a, W, H)$ = 1차절단의 방향이 x축과 평행하게

a지점 안에서 이루어 질때 (a,W,H) 크기의 원자재가 가질 수 있는 가치의 최대값

$F_y(L,b,H)$ = 1차절단의 방향이 y축과 평행하게 b지점 안에서 이루어 질때 (L,b,H) 크기의 원자재가 가질 수 있는 가치의 최대값

$F_z(L,W,c)$ = 1차절단의 방향이 z축과 평행하게 c 지점 안에서 이루어 질때 (L,W,c) 크기의 원자재가 가질 수 있는 가치의 최대값

이때 $F(a,b,c)$를 (a,b,c)의 크기를 갖는 원자재가 가질 수 있는 가치의 최대값을 말한다면 (L,W,H)원자재의 가치를 최대로 하는 절단방법은 1차절단을 x축으로 하는 F_x, y축으로 하는 F_y, z축으로 하는 F_z 중에서 가장 가치가 큰 방향을 정한다.

$$F(L,W,H) = Max\ [F_{xyz}, F_{yxz}, F_{xzy}, F_{zxy}, F_{yzx}, F_{zyx}]$$

다음 길로틴 절단에 대한 최적 동적계획모형을 살펴보자.

$$F_x = \underset{a=1,\dots,L}{Max}\ [F_x(a_1,W,H) + F_x(a-a_1,W,H)\quad a_1 = 1,\dots,\lfloor a/2 \rfloor\ ] \quad (4.1)$$

$$F_y = \underset{b=1,\dots,W}{Max}\ [F_y(L,b_1,H) + F_y(L,b-b_1,H),\quad b_1 = 1,\dots,\lfloor b/2 \rfloor\ ] \quad (4.2)$$

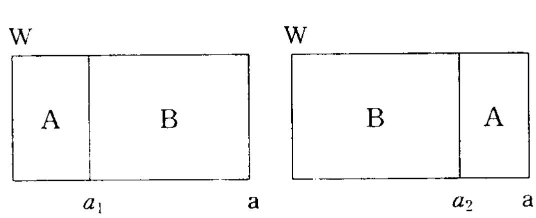
$$F_z = \underset{c=1,\dots,H}{Max}\ [F_z(L,W,c_1) + F_z(L,W,c-c_1),\quad c_1 = 1,\dots,\lfloor c/2 \rfloor\ ] \quad (4.3)$$

식 (4.1)은 육면체의 원자재를 x축 방향으로 1차 절단할 경우, (4.2)는 y축 방향으로 1차 절단할 경우, (4.3)은 z축 방향으로 1차 절단할 경우에 대한 동적계획모형으로 x,y,z축 3방향중 가치를 최대화 할 수 있는 가장 좋은 방향으로 절단할 수 있게 한다. 위의 식에서 a_1, b_1, c_1의 변화범위를 원자재 크기의 1/2까지만 정의하여 문제의 크기를 축소시켰는데 이것은 원자재의 대칭성에 의해 가능하다.

정리 1. 원자재 크기 a의 길로틴 절단에서 최적을 유지하는 절단은 $\lfloor a/2 \rfloor$ 안에서만 고려해도 된다.

증 명 원자재 절단에 있어서 원자재 길이의 1/2보다 큰 쪽에서 절단하는 사항은 대칭성에 의 해 그 전에 이미 고려 되었기 때문에 다시 고려해줄 필요가 없다. 즉, 길로틴 절단에서는 $a_1 + a_2 = a$가 항상 성립하고 이때

$F_x(a_1, W) + F_x(a-a_1, W) = F_x(a-a_2, W) + F_x(a_2, W) = F_x(a_2, W) + F_x(a-a_2, W)$ 가 성립한다.



(a) (b)

또한, $a/2-1 < \lfloor a/2 \rfloor \le a - \lfloor a/2 \rfloor < a/2+1$ 가 성립하고 $a - \lfloor a/2 \rfloor$의 크기를 갖는 부분은 원자재 크기 $a-1$까지의 길로틴 절단에서 이미 계산된 부분이다. 따라서 원자재 크기 a의 길로틴 절단에서 최적을 유지하는 절단은 $\lfloor a/2 \rfloor$ 안에서만 고려해도 된다. ∎

x축 방향으로 1차 절단하는 경우에 있어서의 2차절단에 대한 식은 다음과 같다.

$$F_x(a_1, W, H) = Max\ [F_{xy}, F_{xz}] \quad (4.4)$$

F_{xy} 란 x축방향으로 1차절단된 자재를 y축방향으로 2차 절단하는 경우를 말하고, F_{xz} 란 x축방향으로 1차절단된 자재를 z축방향으로 2차 절단하는것을 말한다. 따라서 x축 방향으로 1차 절단후 y축, z축 방향으로 2차절단 한 것중 가치를 최대화 할 수 있는 2차 절단방향을 결정하게 된다.

x축 방향으로 1차절단, y축으로 2차 절단한것에 대하여 마지막 남은 z축으로 3차 절단하는 것과 x축 방향으로 1차절단, z축으로 2차 절단한것에 대하여 마지막 남은 y축으로 3차 절단하는것에 대한 동적계획모형은 다음과 같다.

$$F_{xyz} = \underset{b=1,\dots,W}{Max}[F_{xy}(a_1,b_1,H) + F_{xy}(a_1,b-b_1,H),\quad b_1 = 1,\dots,\lfloor b/2 \rfloor\ ] \quad (4.5)$$

$$F_{xy}(a_1,b_1,H) = Max[v_j + F(a_1,b_1,c-h_j)\ ] \quad (4.6)$$

$$c = \min\{h_j\},\dots,H,\ j=1,\dots,m \text{ 단 } l_j = a_1, w_j = b_1$$

$$F_{xzy} = \underset{c=1,\dots,H}{Max}[F_{xz}(a_1,W,c_1) + F_{xz}(a_1,W,c-c_1),\quad c_1 = 1,\dots,\lfloor c/2 \rfloor\ ] \quad (4.7)$$

$$F_{xz}(a_1,W,c_1) = Max[v_j + F(a_1,b-w_j,c_1)\ ] \quad (4.8)$$

$$b = \min\{w_j\},\dots,W,\ j=1,\dots,m \text{ 단 } l_j = a_1, h_j = c_1$$

식 (4.5)는 길이 H의 1차원 막대를 길이 h_j, $(j=1,\dots,m,$ 단 $l_j = a_1, w_j = b_1)$를 갖는 부품으로 절단해내는 1차원 배낭문제의 동적계획모형이며 마찬가지로 식 (4.7)은 길이 W의 1차원 막대를 길이 w_j, $(j=1,\dots,m,$ 단 $l_j = a_1, h_j = c_1)$를 갖는 부품으로 절단해내는 1차원 배낭문제의 동적계획모형이다.

5. 해법 절차

위의 동적계획법을 이용하여 다음과 같이 3단계로 분리된 배낭문제를 고려해 보자. 집합 $SSW(i), SSH(i)$ $(i=1,\dots,m)$를 부품의 세로, 높이가 같은 크기를 갖는 부품들의 집합이라하면 같은 집합에 있는 부품들로 원자재의 가로에 대하여 $L*w_j*h_i$ $(i,j=1,\dots,m$ 크기의 자재를 형성하는 1차원 배낭문제를 푸는 문제를 고려해 보자.

[배낭문제 가로 ; x축 절단]

$$Max\quad a_{ij} = \sum_{k\in(SSH(i)\cap SSW(j))} v_k * x_{ijk} \quad (5.1)$$

$$s.t. \quad \sum_{k \in (SSH(i) \cap SSW(j))} l_k * x_{ijk} \le L$$
$$x_{ijk} \ge 0, \quad 정수$$

위의 배낭문제 가로는 높이가 h_i와 같은 부품들의 집합 SSH(i)와 세로가 w_j와 같은 부품들의 집합 SSW(j)에 대하여 모든 α_{ij} 값을 구한다. 이때 x_{ijk}는 높이가 SSH(i)와 같고 세로가 SSW(j)와 같은 부품 k로 원자재의 가로안에서 1차원으로 잘라낸 개수를 말한다. 다음 위와같이 만들어진 $L*w_j*h$ 부분원자재로 세로크기가 W인 $L*W*h$ 원자재를 배낭문제 세로를 통해 만든다.

[배낭문제 세로 ; y축 절단]

$$Max \quad \beta_i = \sum_{j \in (SSH(i) \cap SW)} \alpha_{ij} * x_i \tag{5.2}$$
$$s.t. \quad \sum_{j \in (SSH(i) \cap SW)} w_j * x_{ij} \le W$$
$$x_{ij} \ge 0, \ 정수$$

다음 위와같이 만들어진 $L*W*h$ 를 가지고 배낭문제 높이를 통해 $L*W*H$의 원자재를 만든다.

[배낭문제 높이 ; z축 절단]

$$Max \quad \sum_{i \in SH} \beta_i * x \tag{5.3}$$
$$s.t. \quad \sum_{i \in SH} h_i * x_i \le H$$
$$x_i \ge 0, \quad 정수$$

위의 배낭문제 높이는 2차 세로문제 배낭문제를 통해 만들어진 가치합이 β_i인 $L*W*h$ ($i=1,..m$)의 부분원자재를 가지고 원자재의 높이길이에 가치의 합을 최대화 할 수 있는 절단방법을 찾는다. 이때 x_i는 높이 h_i 를 갖는 $L*W*h$가 원자재로부터 잘려질 수 있는 개수를 말한다.

위와같이 배낭문제 가로, 세로, 높이를 통해 3단계로 길로틴 절단하는 제약아래서 육면체의 원자재를 작은 육면체의 부품들로 최적방법으로 잘라낼 수 있다. 위의 3단계 길로틴 수직절단문제를 다음 *TSCUT* 방법에 의해 해결하도록 한다.

TSCUT 절차

단계 1. (1 단계 절단)

집합 $SSW(i), SSH(j)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$에 공통으로 존재하는 상자들로 원자재의 세로에 대하여 1차원 가로축 배낭문제를 풀어 $L*w_j*h$ 크기의 부분원자재를 형성한다.

단계 2. (2 단계 절단)

단계 1에서 만들어진 $L*w_j*h_i$ $(i, j=1, \ldots, m$ 부분원자재들을 가지고 집합 $SSH(i)$에 대해 모든 상자들의 너비 SW를 가지고 1차원 세로축 배낭문제를 풀어 $L*W*h_i$ $(i=1, \ldots, m$크기의 부분원자재를 형성한다.

단계 3. (3 단계 절단)

단계 2를 통해 나온 $L*W*h_i$ $(i=1, \ldots, m$크기의 부분원자재를 가지고 1차원 높이축 배낭문제를 풀어 $L*W*H$ 크기의 원자재를 형성한다.

6. 결 론

본 연구에서는 3차원 자재절단 문제에 있어서 3단계 길로틴으로 절단하는 최적해 방법을 제안하였다. 3차원 자재는 현실 문제상 먼저 2차원 자재로 절단 후 사용하여야 하는 제약을 이용하여 계속적으로 3차원 원자재를 잘라내는 방법을 사용하였다. 이 방법은 일반길로틴 절단방법보다 원자재의 소요를 더 많이 하게 되는 단점이 있으나 같은 절단 단계에서는 같은 방향으로만 절단하게 됨으로 실제 적용시 공정소요를 단축 시킬 수 있으며 매번 1차원 동적계획법 모형을 사용하므로 계산시간도 절약 할 수 있다.

참고문헌

1. Beasley J.E., "Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting", *J. Opl Res. Soc.* Vol.36, No.4 1985, pp.297-306
2. Christofides Nicos and Charles Whitlock, "An Algorithm for Two-Dimensional Cutting Problems", *Operations Research* Vol.2531, No.1, 1977, pp.30-44
3. Christofides Nicos and Eleni Hadjiconstantinous, "An exact algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts", *European Journal of Operational Research* Vol.83, 1995, pp.21-38
4. Gilmore P.C. and R.E. Gomory, "A Linear Programming Approach to the Cutting- Stock Problem", *Operations Research.* Vol.11, 1961, pp.849-859
5. Gilmore P.C. and R.E. Gomory, "The Theory and Computation of Knapsack Functions", *Operations Research* Vol.14, 1966, pp1045-1074
6. Haessler Robert W., "A Note on Computational Modifications to the Gilmore-Gomory Cutting Stock Algorithm", *Operations Research* Vol. 28, No.4, 1980, pp.1001-1005
7. Herz J.C., "Recursive Computational Procedure for Two-Dimensional Stock Cutting", *IBM J. Res. Develop.* Vol.16, 1972, pp.462-469
8. W. Schneider, "Trim-loss minimization in a crepe-rubber mill;optimal solution versus heuristic in the 2(3)-dimensional case", *European Journal of Operational Research* Vol.34, 1988, pp.273-281
9. Viswanathan K.V. & A.Bagchi, "Best-first search methods for constraineds two-dimensional cutting stock problems", *Operations Research* Vol.41, No.4, 1993, pp.768-776
10. Wang P.Y., "Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems", *Operations Research* Vol.31, No.3, 1983, pp.573-586