

On / Off 패턴을 따르는 수요에 대한 마코브 예측모델 A Markov Model for Forecasting Future Demands Having On / Off Pattern

여건민, 전치혁
포항공과대학교 산업공학과
공정산업의 지능자동화연구센터

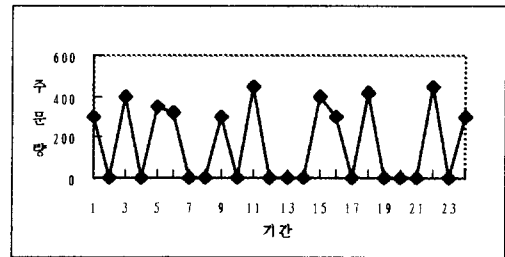
요 약

주문이 매 시점마다 있는 것이 아니라 간헐적인, 즉 어느 시점에는 주문이 있고(ON) 다른 시점에는 주문이 없는(OFF) 패턴에서 미래의 주문량에 대한 예측을 고려한다. 다음 시점의 예측량은 우선 주문이 있을 것인가에 대한 판단과 주문이 있다면 어느 정도가 예상되는가 하는 문제의 두 가지 측면을 모두 고려해야 한다. 기존의 예측모델은 주문량 자체에 대한 고려가 일반적이며 주문시기에 대한 고려는 전무한 상태이기 때문에 이와 같은 주문패턴을 반영시키는데는 어려움이 따른다고 볼 수 있다.

본 논문에서는 이러한 주문패턴을 마코브 체인으로 모델링하고, 이러한 형태의 상태전이확률(state transition probability) 추정식이 각각 독립적인 오목함수(concave function)로 구성되어 있음을 보인다. 또한 확률적으로 표현되는 미래의 주문상태들에 대한 패턴을 확정시키는 알고리즘과 주문량 추정에 있어서 과거의 주문패턴을 반영시키는 모델을 제시한다.

1. 서론

어떤 제품에 여러 주문자가 연결되어 있고 각각의 주문자는 매 시점마다 주문을 하는 것이 아니라 어떤 시점에는 주문을 하고 또 다른 시점에서는 주문을 하지 않는 상황을 생각할 수 있다. 예를 들어 철강제품과 같은 소재를 구매하여 최종제품을 생산하는 업체의 경우 향후 몇개월 소비량을 미리 주문을 한다든지, 최종제품의 시장상황에 따라 소재주문이 간헐적이므로 기존의 일반적인 시계열과는 차이가 있다. 이러한 주문성향은 주문비용을 무시할 수 없는 제조관련 산업에서 흔히 볼 수 있는 상황이다. 일반적으로 하나의 제품에 여러 주문자가 연결되어있는 경우, 각각의 주문자는 서로 매우 다른 주문패턴을 가질 수 있으므로 제품에 대한 총 주문량을 단일 시계열로 파악하는 대신 각 주문에 대한 예측이 필요하다. 다음 그래프는 이러한 주문성향을 반영하는 전형적인 패턴을 보여주고 있다. 여기서 주문이 있는 시점을 ON, 없는 시점을 OFF로 나타내기로 하자.



[그림 1] ON/OFF 주문성향

위의 그래프와 같이 주문량 자체의 기록이 심하지 않을 경우, 다음 시점에 대한 예측오차는 주문자의 주문여부에 전적으로 의존하기 때문에 주문량에 대한 구체적인 값보다는 오히려 언제 주문이 들어올 것인가에 대한 고려가 우선적이라고 볼 수 있다.

본 연구는 이러한 특성을 지니는 시계열을 마코브 체인으로 일반화한다. 주문상태를 정의함에 있어 ON/OFF로 표현된 주문패턴을 상태반영기간에 따라 재구성한다. 최적 상태반영기간은 주문상태를 정의할때 주어진 패턴을 가장 잘 반영하는 지표로서, 본 모델을 패턴에 적용시켜 예측오차가 가장 작은 상태반영기간을 유도한다. 또한, 확률적으로 표현되는 미래상태에 대한 패턴을 극한확률을 이용하여 확정시키는 방법과 주문량이 주문상태에 의존하는 것으로 파악하여, 확정된 미래의 주문패턴에 대한 주문량을 추정하는 방법을 제시해 본다.

2. 예측모델

시점 t 에서의 주문량은 다음과 같은 모델을 따른다.

$$D_t = (\mu_t + \varepsilon_t)I_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1)$$

위 식에서 I_t 는 시점 t 에서의 주문여부를 나타내는 것으로 주문이 있으면 1, 주문이 없으면 0을 갖는데 이는 과거 K 기간의 주문여부에 의존한다. μ_t 는 t 시점에 주문이 있을때 평균 주문량이고 ε_t 는 오차항으로 평균 0, 분산 σ_t^2 을 따른다고 가정한다.

상태반영기간은 현재의 주문여부가 과거 몇개의 주문여부에 의존하는가를 나타내는 것으로 K로 표시하고 6 절에서 최적 상태반영기간을 찾는 방법을 설명하기로 한다. S_t 를 시점 t에서의 주문상태라고 하고 다음과 같이 정의하며,

$$S_t = (I_{t-K+1}, I_{t-K+2}, \dots, I_{t-1}, I_t) \\ \equiv I_{t-K+1}2^{K-1} + I_{t-K}2^{K-2} + \dots + I_{t-1}2^1 + I_t2^0, \quad t \geq K-1 \quad (2)$$

주문여부의 시계열은 다음과 같은 마코프 체인을 따른다고 가정한다.

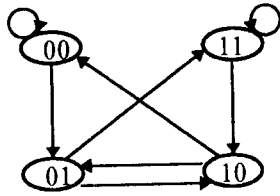
$$\{S_t, t \geq K\}, S_t \in \{0, 1, \dots, 2^K - 1\}$$

한단계후의 상태전이확률 $P_{i,j}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{cases} P_{i,j} = v_i, P_{i,j+1} = 1-v_i & j=2i, i=0, 1, \dots, 2^{K-1}-1 \\ P_{i,j} = v_i, P_{i,j+1} = 1-v_i & j=2(i-2^{K-1}), i=2^{K-1}, \dots, 2^K-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$P_{i,j}$ 가 0가 되는 상태전이는 한단계후의 전이가 일어나지 않음을 의미하는데, 예를들면 K가 3일때 상태 (101)에서 (011), (010)로는 전이가 일어나지만 다른상태로는 전이가 일어나지 않는다. k 단계후의 전이확률은 $P_{i,j}^{(k)}$ 를 계산한다.

상태반영기간이 2 일때의 주문상태간의 전이관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



[그림 2] 상태전이 diagram (K=2)

위 그림의 전이관계를 기준으로 한 전이확률 행렬은 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} v_0 & 1-v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & 1-v_1 \\ v_2 & 1-v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 1-v_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= [P\{S_{t+1} = j | S_t = i\}], \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

3. 전이확률 추정

과거 N개의 데이터로부터 각각의 전이확률을 추정하기 위해서 다음과 같은 추정식을 이용한다. 이것은 과거 데이터로부터 전이확률들을 곱한 maximum likelihood function 이다.

$$L = \prod_{i=0}^{N-K} v_i^{x_i} (1-v_i)^{y_i}, \quad v_i \in (0,1) \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^{N-K} (x_i + y_i) = N - K + 1$$

x_i, y_i 는 각각의 전이가 일어난 횟수이다. 예를들면 x_0 는 상태 0에서 0로 전이한 횟수를 가리키고 y_0 는 상태 0에서 1로 전이한 횟수를 가리킨다. 위의 L 값을 가장 크게 하는 전이확률들을 구함으로써 과거 N개의 패턴을 가장 잘 반영하는 추정값을 얻을 수 있다. 식 L은 각각이 서로 독립인 오목함수 $v_i^{x_i} (1-v_i)^{y_i}$ 로 구성되어 있으며 이 사실로부터 다음과 같이 전이확률의 추정값을 얻을 수 있다.

$$\hat{v}_i = \frac{x_i}{x_i + y_i}, \quad i = 0, \dots, 2^K - 1 \quad (6)$$

위 식에서 전이확률은 결국 특정한 상태를 총 방문한 횟수에 대한 그 상태에서 다른 특정 상태로 전이하는 상대적 비율이라고 볼 수 있다.

4. 주문여부 확정 방법

예측모델식 (1)에서 현재시점 t에서 k 단계후의 주문량의 기대값은 다음과 같다.

$$E[D_{t+k}|S_t] = \mu_{t+k} E[I_{t+k}|S_t] = \mu_{t+k} P\{I_{t+k} = 1 | S_t\} \quad (7)$$

위 식에서 $P\{I_{t+k} = 1 | S_t\} > 0$ 이므로 주문량의 기대값 $E[D_{t+k}]$ 는 항상 0보다 큰 값을 가지게 된다. 이와 같이 단순히 기대값을 사용할 경우 ON/OFF 패턴을 잘 반영하지 못하므로 미래의 주문여부를 확정시킬 필요가 있다.

확률적으로 표현되는 미래 상태들로부터 미래의 주문여부를 확정시키기 위해서는 비교되는 기준값이 있어야 한다. 예를들어 다음 시점에 주문이 있을 확률이 0.6이고 궁극적으로 주문이 있을 확률이 0.8, 즉 주문이 자주 들어오는 경향을 보이는 경우에 비록 주문이 있을 확률이 없을 확률보다는 높지만 궁극적으로 주문이 있을 확률보다는 작으므로 다음 시점에 주문이 없다고 판단하는 것이 타당하다고 볼 수 있다. 주문여부의 확정값 I_{t+k}^* 는 다음과 같이 결정된다.

$$I_{t+k}^* = \begin{cases} 1 & \text{if } P\{S_{t+k} \in \Omega | S_t\} > \pi_\Omega, S_t \in H \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

$$\pi_\Omega = \sum_{i \in \Omega} \pi_i$$

여기서 H는 모든 상태들의 집합이고 Ω 는 여러 상태들 중 최종적으로 주문이 있는 상태들의 집합이다. 예를들면 상태반영기간이 2일때 {(01), (11)}이 Ω 가 된다. 따라서 $P\{S_{t+k} \in \Omega | S_t\}$ 는 k 단계후에

주문이 있을 확률로서 $P\{I_{t,k} = 1|S_t\}$ 이 된다. π_i 는 상태 i 의 극한확률(limiting probability)이다. π_Ω 는 Ω 에 속한 상태들의 극한확률을 더한 값으로 결국 궁극적으로 주문이 있을 확률이 된다. 앞에서 제시된 유형의 마코브 체인은 irreducible 이고 positive recurrent 하기 때문에 다음식을 만족하는 유일한 해 π_j 가 존재한다[1].

$$\pi_j = \sum_{i \in H} \pi_i P_{ij}, j \in H, \quad (9)$$

$$\sum_{j \in H} \pi_j = 1$$

5. 최적 상태반영기간

상태를 정의함에 있어서 몇개의 데이터로 구성할 것인가는 예측능력에 있어서 가장 중요한 문제로 볼 수 있다. 최적 상태반영기간을 찾기 위해서 우선 상태반영기간을 1 부터 늘려가면서 상태전이 확률과 극한확률을 구한뒤 앞에서 제시된 확정 방법으로 주어진 데이터에 적용해서 한단계후의 예측능력이 가장 좋은 값을 최적 상태반영기간 K^* 로 선택한다.

6. 예측량 산출

현재시점 t 에서 k 단계후의 주문여부 I_{t+k}^* 가 결정되면 어느 정도의 주문량이 들어올 것인가, 즉 $\mu_{t,k}$ 를 추정해야 한다.

$k=1$ 일때의 예측량은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{D}_{t,1} = \hat{\mu}_{t,1} I_{t,1}^* \quad (10)$$

$$= (\bar{Y}_t \bar{P}_t) I_{t,1}^*, \quad s = S_{t,1} = (I_{t-K^*+2}, \dots, I_{t,1}^*)$$

위 식에서 \bar{Y}_t 는 상태 s 를 구성하는 과거 데이터에서 K^* 기간내의 총 주문량에 대한 평균값을 의미하고 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{Y}_t = \frac{\sum_{i \in W} Y_i}{M}, \quad Y_i = \sum_{j=0}^{K^*-1} D_{i,j}, \quad i = K^* - 1, \dots, t \quad (11)$$

위 식에서 W 는 과거 상태중 s 와 같은 상태에 있는 시점들의 집합으로 $\{t|S_t = s, \tau = K^* - 1, \dots, t\}$ 으로 나타낼 수 있다. M 은 과거 상태중 s 와 같은 상태에 있는 시점의 갯수로서 바로 집합 W 의 크기가 된다. Y_i 는 시점 i 를 포함하여 K^* 기간전까지의 총 주문량이다. 식 (11)에서 \bar{P}_t 는 상태 s 를 가지는 과거 데이터에서 K^* 기간내의 총 주문량에 대한 그 시점의 주문량의 평균비율로서 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{P}_t = \frac{\sum_{i \in W} P_i}{M}, \quad P_i = \frac{D_i}{Y_i}, \quad i = K^* - 1, \dots, t \quad (12)$$

P_i 는 시점 i 를 포함하여 K^* 기간전까지의 총 주문량에 대한 i 시점 주문량의 상대적 비율이다.

$k > 1$ 일때는 $1 < k < K^*$ 와 $k \geq K^*$ 일때로 나누어서 생각한다. 우선 $k \geq K^*$ 일때 k 단계후의 예측량은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{D}_{t,k} = \hat{\mu}_{t,k} I_{t,k}^* \quad (13)$$

$$= [\sum_{\lambda} \{(\prod_{j=1}^{K^*-1} P\{I_{t+k-K^*+j} = \delta(\lambda, j, K^* - 1)\}) \cdot \bar{Y}_t \bar{P}_t\} \cdot I_{t,k}^*],$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, 2^{K^*-1} - 1, \quad k \geq K^*,$$

$$s = S_{t,k} = (\delta(\lambda, 1, K^* - 1) \dots \delta(\lambda, K^* - 1, K^* - 1) I_{t,k}^*)$$

k 단계후의 추정주문량은 주문상태 $S_{t,k}$ 에 의존한다. $S_{t,k}$ 를 확정된 $I_{t,k}^*$ 와 확정하지 않은 (K^*-1) 기간의 주문여부로 구성하고 이 기간이 취할수 있는 주문여부조합에 대해서 확률적인 고려를 한다. λ 는 이 기간이 취할 수 있는 주문여부조합을 10 진수로 표현한 것이며 $\delta(\lambda, j, K^* - 1)$ 는 λ 를 (K^*-1) 자리 2 진수로 나타내고 왼쪽에서 j 자리째 수를 반환한다. 따라서 $\prod_{j=1}^{K^*-1} P\{I_{t+k-K^*+j} = \delta(\lambda, j, K^* - 1)\} \cdot \bar{Y}_t \bar{P}_t$ 은 (K^*-1) 기간 이 λ 의 주문여부조합을 가지는 확률에 상태 s 에서의 추정주문량을 곱한 값이다. 여기서 s 는 λ 에 의존한다. 결국 $\hat{\mu}_{t,k}$ 는 $S_{t,k}$ 에 의존하는 추정주문량의 기대값을 의미한다.

$1 < k < K^*$ 일때 $S_{t,k}$ 를 (K^*-k) 기간의 주어진 주문여부, 확정하지 않은 $(k-1)$ 기간의 주문여부 그리고 확정된 $I_{t,k}^*$ 로 구성하고 $(k-1)$ 기간의 주문여부조합에 대해서 확률적인 고려를 한다. 따라서 k 단계후의 예측량은 다음과 같다.

$$\hat{D}_{t,k} = [\sum_{\lambda} \{(\prod_{j=1}^{k-1} P\{I_{t,j} = \delta(\lambda, j, k - 1)\}) \cdot \bar{Y}_t \bar{P}_t\} \cdot I_{t,k}^*], \quad (14)$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, 2^{k-1} - 1, \quad 1 < k < K^*,$$

$$s = S_{t,k} = (I_{t+k-K^*+1}, \dots, I_{t,k}^*, \delta(\lambda, 1, k - 1) \dots \delta(\lambda, k - 1, k - 1) I_{t,k}^*)$$

7. 모델 적용 결과

본 모델이 과거의 주문패턴을 얼마나 잘 반영하는가를 보기 위하여 과거의 다양한 주문패턴에 대한 예측패턴을 구해보면 [표 1]과 같다. 1 에서 6 까지는 주기성을 가지는 패턴이며 예측패턴을 보면 완벽하게 반영함을 볼 수 있다. 7 에서 12 까지는 불규칙한 패턴을 나타내는데 비교적 과거 패턴을 잘 반영한다고 볼 수 있다. K^* 는 최적 상태반영기간이며 주로 2 와 3 의 값을 가지는 것으로 보인다. 이것은 제한된 과거 데이터에 비해서 상태수가 늘어나면 현상태에 대한 정보를 과거패턴으로 부터 찾기 힘든 때문으로 파악된다.

본 모델의 유효성을 알아보기 위해서 포함제철(주)의 '94-5 년 선재 수주실적 데이터로 테스트한 예측 기간별 적중률을 구해보면 [표 2]와 같다. 선재제품 수요가의 주문성향은 연간 주문총량이 적을 수록 앞에서 언급한 전형적인 패턴을 따르는 것으

로 알려졌다. 주문여부에 대한 적중률은 비교적 높게 나타났고, 예측기간이 길어질수록 적중률은 떨어지는 것으로 보인다. 선제강종을 하나의 제품으로 보면 하나의 강종에 대해서 여러 수요가가 주문을 하는 상황이므로 강종에 대한 예측은 본 모델에 적합하다고 볼 수 있다. 모든 강종에 대한 한단계 후의 실적량에 대한 예측량의 오차를 계산해본 결과 평균 21%의 오차가 발생하는 것으로 나타났다. 확률적으로 표현되는 미래의 주문여부를 확정시키지 않고 식 (7)과 같이 기대값으로 강종에 대한 예측량을 산출했을때 평균 29%의 오차가 발생했다.

8. 결론 및 추후 연구과제

ON/OFF 패턴을 다루는 시계열의 예측에 있어서 본 모델의 접근방식이 타당한 것으로 보이며 앞의 결과에서 보듯이 이러한 패턴의 결정요소(critical factor)인 적중율에 있어서도 유효한 것으로 판단된다.

본 연구에서 제시한 예측모델은 주문기간과 주문량에 대한 상관관계를 크게 보이지 않는 패턴에 적합하다. 만일 주문기간과 주문량이 상관관계를

보인다면 미래의 주문량은 현재의 상태와 미래의 상태에 동시에 의존한다. 주문자의 재고가 소진되는 시점에서 발주가 이루어지고 발주량은 그 시점의 주문량으로 향후 어느정도 기간을 끌고갈 것인가에 의해서 결정되므로 주문시점에 대한 고려는 현상태에 의존하지만 주문량에 대한 고려는 미래의 주문 상태에 의존하는(future state dependent) 유형을 가진다. 앞에서 테스트한 데이터중 이러한 성향을 띠는 주문이 있을 것으로 생각되며, 이에대한 추후 연구가 진행된다면 ON/OFF 패턴을 보이는 주문성향에 대한 예측능력이 향상될 것으로 생각된다.

참고문헌

- [1] Sheldon M. Ross, Stochastic Process., John Wiley and Sons. Inc., 1982.
- [2] George E. P. Box and Gwilym M. Jenkins, Time Sieries Analysis: Forecasting and Control, 3rd ed., Prentice Hall, 1994.
- [3] Sheldon M. Ross, Introduction to Probability Models, 3rd ed., Academic Press Inc., 1985.
- [4] Gilbert Strang, Linear Algebra and Its Applications, 2nd ed., Academic Press Inc., 1980.

[표 1] 주문패턴 적합성

No	과거주문패턴															예측패턴						K*	
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1		0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
7	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
8	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
9	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
10	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
11	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0

[표 2] 주문량/예측기간별 적중률(%)

연간 주문총량(톤)	예측기간(k)					
	1	2	3	4	5	6
0 - 300	92.3	88.1	80.2	79.4	77.4	71.5
300 - 600	90.5	85.2	81.3	79.2	78.5	72.4
900 - 1200	91.4	86.7	79.8	80.7	76.2	70.7
1200 - 1500	93.2	87.3	82.8	78.2	74.2	68.3
1500 - 3000	90.1	89.6	82.5	77.9	72.2	71.0
3000 - 5000	89.7	87.5	83.7	75.8	74.6	72.1
5000 - 10000	92.2	85.4	80.2	80.6	75.3	69.9
10000 - 15000	90.3	88.6	81.6	76.9	74.2	68.2