

저소음 저배압을 위한

다중모드 지능제어 배기계에 관한 연구

- 음향관 모델의 모델차수 결정방법 -

°손 동구°, 김 홍섭°, 오 재응°

The study on the multi-mode muffler by intelligent control for low noise and low backpressure

- The model order determination for acoustic tube -

°DongGoo Sohn°, Hung-Sub Kim°, Jae-Eung Oh°

Abstract

For prediction and control of sound, acoustic systems must be modeled. Because sound systems like exhaust systems are very difficult to calculate mathematically, this study presents a method to determine experimentally the order of poles by transfer function.

When designing a control system by traditional methods the exact model order and coefficient of the system to be controlled must be determined. But in acoustic systems, where systems to be controlled are very complex, mathematical interpretation is almost always impossible. Therefore transversal filters using trial and error methods to determine model order of a system are used to design a system. Compared to mathematical models with poles, transversal filters, in which the model order becomes relatively large, have the disadvantage of prolonged processing time and marked time delay.

This study presents a method to determine experimentally the order of poles in a system model with poles and zeroes. Also, the validity of this method was verified mathematically and confirmed by application in general simple models and acoustic tube simulators.

1. 서론

소음을 예측, 제어하고자 할 경우 음향

계를 모델링하여야 한다. 배기계와 같은 음향계의 경우 수학적으로 계산하기가 매우 어렵기 때문에 본 연구에서는 실험적으로 전달 함수에서 pole의 차수를 결정하는 방법을 제시하고자 한다.

전통적인 방법으로 제어계를 구성하고

* 한양대학교 자동차공학과

** 한양대학교 정밀공학과 대학원

자 할 경우 제어 대상 계의 정확한 모델 차수와 계수를 결정하고 이에 따라 제어계를 구성하여야 한다. 그러나 음향계와 같이 제어 대상이 복잡할 때 수식적으로 해석이 불가능한 경우가 대부분이다. 이러한 경우 시행착오적인 방법을 사용할 수 있는 순차 필터를 사용하여 대상계의 모델 차수를 구하여 계를 구성하고 있다. 그러나 순차 필터의 경우 pole 이 있는 수학적 모델에 비하여 상대적으로 모델의 차수가 매우 커지므로 인하여 연산처리에 시간이 많이 걸리며 초기 응답의 지연이 크다는 단점을 가지고 있다.⁽¹⁾

본 연구에서는 pole 과 zero 를 갖는 계의 모델에서 실험적인 방법으로 pole 의 차수를 결정하는 방법을 제안하고 수학적으로 타당성을 검증하였으며, 이 방법을 일반 단순 모델과 음향관 시뮬레이션에 적용하여 확인하였다.

2. Laplace 영역과 주파수영역의 상호 관계⁽²⁾

호 관계⁽²⁾

외부 가진력이 존재하는 1 자유도계의 경우 운동방정식은 다음과 같은 수식으로 표현 된다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1)$$

식(1)을 Laplace 영역으로 변환시키면 식(2)와 같다.

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \quad (2)$$

이 계에서 의 전달함수는 식(3)과 같다.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3)$$

이 계는 1 개의 고유진동수 ω_n 을 가진다. 즉 2 개의 켈레 복소수 pole 을 갖는 계는 1 개의 고유진동수를 갖는다.

위의 경우를 일반화하기 위하여 자연계의 전달함수를 확장하여 Laplace 영역으로 표현하면 다음과 같다.

$$H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{s - a_i} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{c_i}{(s - d_i)^{q_i}} \quad (4)$$

$$a_i = \sigma_{ai} + j\omega_{ai}$$

$$b_i = \sigma_{bi} + j\omega_{bi}$$

$$c_i = \sigma_{ci} + j\omega_{ci}$$

$$d_i = \sigma_{di} + j\omega_{di}$$

$$e_i = \sigma_{ei}$$

식(4)를 시간 영역으로 변환하면 다음과 같이 표현된다.

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e^{a_i t} + \sum_{i=2}^{\infty} c_i t^{q_i - 1} e^{d_i t} \quad (5)$$

식(5) 우변의 1 항은 일반적인 감쇄를 가진 계의 함수이다. 2 항은 시간의 누승에 비례하여 증가하는 계로서 음향계에서 찾을 수가 없으므로 식(5)의 우변 1 항만을 고려하여 다시 표현하면 다음과 같다.

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e^{a_i t} \quad (6)$$

전달함수에서 i 번째 항과 이와 연관된 켈레

복소수인 j 항을 고려할 때 지수부의 계수는 다음과 같다.

$$a_i = a_j^* \quad (7)$$

i 와 j 항을 쌍으로 하여 대응되는 진동계 k 번째의 감쇄 ζ_k 및 고유 진동수 ω_{nk} 와의 관계를 보면

$$2\zeta_k \omega_{nk} = -2\sigma_i \quad (8)$$

$$\omega_{nk} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}, \quad \zeta_k = \frac{-\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}$$

전달함수에서 i, j 항을 첨자를 생략하고 주파수영역으로 변환시키면

$$H(\omega) = FFT(be^{at}) \quad t \geq 0 \quad (9)$$

$$= \int_0^{\infty} (be^{at}) e^{-j\omega t} dt = \frac{be^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$= -\frac{\sigma_b + j\omega_b}{\sigma_a + j(\omega_a - \omega)} + \frac{\sigma_b + j\omega_b}{\sigma_a + j(\omega_a - \omega)} \left[e^{\sigma_a t} e^{-j(\omega - \omega_a)t} \right]_{t=\infty}$$

$$= -\frac{\sigma_b \sigma_a - \omega_b(\omega - \omega_a) + j(\sigma_a \omega_b + \sigma_b(\omega - \omega_a))}{\sigma_a^2 + (\omega - \omega_a)^2}$$

감쇄가 없는 경우의 공진점을 구하기 위하여 식(9)에서 $\sigma_a = 0$ 로 하면

$$H(\omega) = -\frac{-\omega_b + j\sigma_b}{(\omega - \omega_a)} \quad (10)$$

식(10) 으로부터 공진점과 식(8)의 비감쇄 공진점이 일치 됨을 알 수 있다.

3. 음향관의 전달 특성⁽³⁾⁽⁴⁾

앞에서 얻어진 주파수영역과 Laplace 영역의 관계를 음향관에 도입하기 위해서는 정확한 입출력간의 관계를 얻어야 한다. 그러므로 실험을 통해서는 정확한 계의 특성을 알 수 없으므로 기지의 음향계를 구성하여 비교 할 필요가 있다.

선형 음향해석을 위해서 다음과 같은 가정이 필요하다. 음향관의 벽면은 강체로 가정하여 벽면을 통한 음향의 전달을 무시한다. 비점성유체 및 작은 단면적을 갖는 음향관으로 가정하여 저주파 영역에서 평면파의 전달로 국한시키며 유체의 유동은 없는 것으로 가정하였다. 그리고 작은 진폭의 음향으로 가정하여 파의 진폭이 찌그러짐등에 의한 비선형성을 배제시켰다. 이상의 가정을 이용하여 얻어진 음향파동방정식과 그 해는 다음식과 같다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p = 0 \quad (11)$$

$$p(z, t) = C_1 e^{j\omega(t-z/a_0)} + C_2 e^{j\omega(t+z/a_0)} \quad (12)$$

$$= [C_1 e^{-jkz} + C_2 e^{+jkz}] e^{j\omega t}$$

식(12)에서 직진파 만을 고려하면 다음 식과 같다.

$$p(z, t) = C_1 e^{-jkz} e^{j\omega t} \quad (13)$$

단순음향관에서 직진파들로만 구성된 음압들의 거동을 살펴보면 Fig.1 과 같다.

입력 p_{in} 은 $z=0$ 인 입구단에서 측정되는 음압으로써 가진된 음압 p_1 과 관을 통과하여 입구단으로 투과한 음압 p_4 의 합으로 구성되어 측정되며 $z=0$ 에서 출구단으로 진행되는 음압 p_0 과 출구단에서 입구단으로 전파되어오는 음압 p_3 의 합과 동일하다. $z=l$ 에서 음압 p_{out} 은 음압 p_0 가 전파된 음압 p_1 과 이 음압의 반사파인 음압 p_2 의 합으로 구성된다. 반사계수 R 과 투과계수 T 를 사용하여 입구단의 음압과 출구단의 음압을 구하면 다음식과 같다.

$$p_{in} = (1 + R_{out}G^2)p_0 \quad (14)$$

$$p_{out} = (1 + R_{out})Gp_0 \quad (15)$$

여기서 음압 p_0 는 가진 음압으로써 조화함수를 가정하면 다음과 같으며 음압 p_0 는 $j\omega$ 에서 pole을 갖는다.

$$p_0 = \frac{C}{s - j\omega}$$

그리고 G 는 음압 p_0 이 음압 p_1 으로 될 때 또는 음압 p_2 가 음압 p_3 로 될 때의 전달함수로서 다음과 같다.

$$G(z, s) = e^{-jkz} \quad (16)$$

이 계의 입출구단의 전달함수와 가진력과 출구단의 전달함수는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} H_{in,out}(z, s) &= \frac{p_{out}}{p_{in}} \\ &= \frac{(1+R)G}{1+RG^2} \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)에서 $R=1$ 인 경우 출구단이 막힌 경우가 된다. 이 경우 pole의 갯수는 공간주

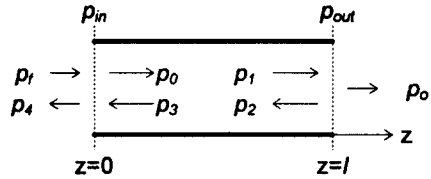


Fig.1 Pressure behavior in a simple pipe.

파수에 대하여 나타난다.

4. Laplace 합성계 및 음향계 모델을 통한 검증

위에서 유도된 가설을 증명하기 위하여 임의의 갯수의 pole을 가진 전달계를 구성하여 임의의 합성계를 구성하고 백색잡음을 입력으로 사용하여 출력을 구한 후 주파수 영역의 전달 함수를 구하였다. 그리고 얻어진 주파수 영역의 전달함수로 부터 pole의 갯수를 역으로 추정하여 가설의 진위를 증명하고자 한다.

이를 위하여 사용된 계는 Fig.2와 같다.

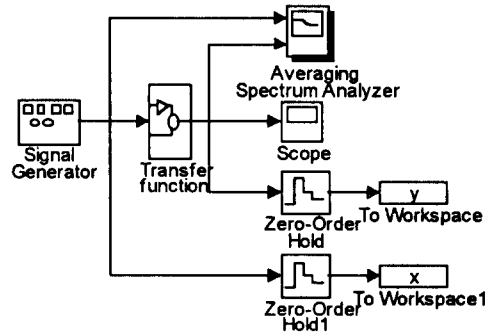


Fig.2 Model for input and output signal acquisition

전달계가 pole 을 10Hz 에서 2 개를 가질 경우, 10Hz 와 20Hz 에서 각각 2 개씩 4 개의 pole 을 갖는 경우 그리고 10, 11, 20, 30Hz 에서 각각 2 개씩 8 개의 pole 을 갖는 경우에 대하여 검증 하였다.

또한 시간영역에서 구성된 음향관 모델에 적용하여 Fig.1 과 같은 음향계 모델에서 반사계수의 적용이 편리한 1 단 패구 1 단 개구 형태의 관에 적용하였다.

5. 결과 및 고찰

Laplace 영역에서 전달계가 10, 11, 20, 30Hz 에서 각각 2 개씩의 pole 을 가질 여러 경우의 합성된 전달계의 주파수 전달함수를 측정하여 그 결과를 Fig.3- Fig.5 에 표시하였다.

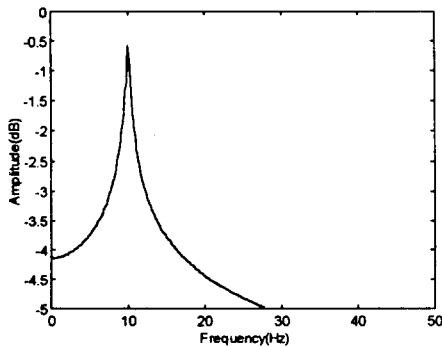


Fig.3 Transfer function with 2 poles in 10Hz

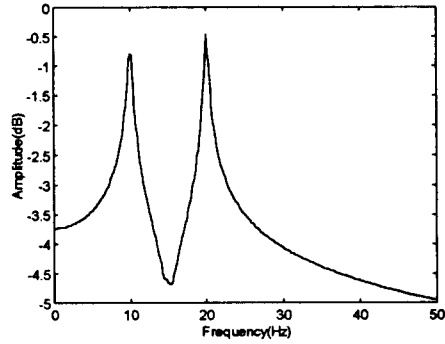


Fig.4 Transfer function with 2 poles in 10Hz and 2 poles in 20Hz

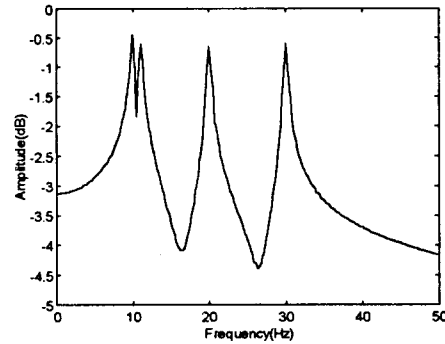


Fig.5 Transfer function with 2 poles in 10Hz, 2 poles in 11Hz, 2 poles in 20Hz and 2 poles in 30Hz

Fig.3-5 의 결과와 앞에서 제안한 고유진동수 갯수의 2 배의 pole 을 갖는다는 제안과 정확하게 일치 됨을 알 수 있다.

음향관의 경우 1 단개구 1 단 패구의 음향관에서의 개구단에 대한 패구단의 주파수 전달함수는 Fig.6 과 같다.

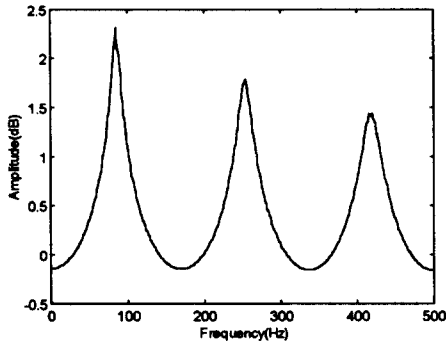


Fig.6 Frequency transfer function of the one-side open and one-side closed tube

Fig.6 에서 적용된 관의 길이는 1m로서 공진주파수는 약 85Hz($n=0$)를 기본주파수로 하여 $\frac{2n+1}{4}$ 을 간격으로 주기적으로 나타난다. 이는 식(17)에서 예측한 것과 일치된다. 그러나 pole 의 갯수와 공진점의 갯수가 일치하는 것은 식(11)에서 식(13)으로 전계시 $-\omega$ 항을 생략하였기 때문에 단일 pole 만이 존재하는 것과 같이 나타나나 실제로는 2 배의 pole 의 갯수를 갖는다. 그러나 pole 이 조화함수로 나타나므로 이를 급수 전계시 관측주파수에 연관하여 고려하는 항의 갯수를 결정 하여야 하겠다.

6. 결론

계의 전달함수와 Laplace 영역의 pole 과의 관계를 고찰하고 이를 음향관에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 계의 pole 의 차수는 수학적 고찰 및

모의 실험을 통하여 공진점의 갯수의 2 배가 됨을 알 수 있었다.

2. 음향관의 모델은 고려하는 주파수의 범위에서 조화 함수이므로 다항식으로 전개시 공진점의 갯수를 참고하여 항의 갯수를 정하여야 할 것으로 생각된다.

향후 음향관의 다항식 전개시 고려될 항의 차수와 공진점의 갯수와의 관계를 정확히 확인하여 실험을 통한 음향관의 다항식 모델을 구축 할 수 있으리라 기대된다.

7. 후 기

본 연구는 1996 년 한국과학재단의 핵심연구과제(961-1001-015-2)의 연구비 지원을 받아 이루어졌으며, 관계자 여러분께 감사 드리는 바이다.

8. 참고문헌

1. Nasir Ahmed, T. Natarajan, "Discrete-Time Signals and Systems", Reston, 1983
2. Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, 1970
3. M.L.Munjal, "Acoustics of ducts and mufflers", JOHN WILEY & SONS, 1986
4. Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B.Coppens, James V. Sanders, "Fundamentals of Acoustics", Wiley, 1982