

# 사다리꼴 속도분포에 따른 유연한 외팔보의 진동해석

오전 홍걸\*, 김 재원\*, 양 현석\*\*, 박 영필\*\*

## Vibration Analysis of Flexible Arm with Trapezoidal Velocity Profile

Hong-Gul Jun\*, Jae-Won Kim\*, Hyun-Seok Yang\*\*, Young-Pil Park\*\*

### Abstract

The dynamic interaction between a translating flexible arm and a trapezoidal velocity profile of a cart to which the flexible arm is attached is presented. Vibration of the flexible arm due to translation is analytically solved, and the conditions for suppressing vibration is derived in terms of velocity profiles. To prove the validity of the solution and the conditions, numerical computation and experiments are carried out. Only a natural frequency of vibrating plant is needed to obtain the conditions for vibration reduction. With this results, a passive vibration regulator as an open loop control scheme can be designed and direct application to industrial plants such as overhead crane can be made.

### 1. 서론

유연한 외팔보의 능동제어에 관한 연구는 그 이론적 해석에서부터 능동제어에 이르기까지 많은 연구가 이루어져 왔다. 대부분의 연구는 유연한 팔의 진동거동에 의한 팔 끝단의 위치오차를 보상하기 위한 추적제어나 진동의 발생을 억제하는 연구가 대부분이다. 하지만 이러한 연구에 의하여 설계된 제어기의 경우 되먹임을 위하여 스트레인게이지나 가속도계 또는 속도계 등을 진동체에 부착하여 진동량을 측정하여야 한다. 따라서 이미 실제로 사용되고 있는 계(크레인 등)에 적용하기에는 비용이나 설치 측면에 있어서 상당한 문제점이 있다.

진동계가 진동을 표현하는 물성치가 일정치 않은 경우에는 진동제어를 위해서 앞서의 연구들과 같은 폐루프제어기를 구성하여야 하지만 물성치가 일정하고 이에 대한 진동특성을 알 수 있다면 진동을 측정하지 않고도 진동을 예측할 수 있게 되고

이에 따라 진동을 억제하는 개루프제어기를 설계할 수 있게 된다.

본 연구에서는 직선운동하는 유연한 외팔보에 대하여 진동특성중 고유진동수에 관한 정보만을 이용한 진동해석을 통해 대차의 운동속도분포에 따른 외팔보의 진동경향을 해석하고, 이를 이용하여 단순히 진동계 부착부인 대차의 위치제어만을 통하여 진동이 억제되는 속도분포를 예측하는 방법을 제시하고, 이를 모의실험과 실험을 통하여 검증해 본다. 속도분포의 형태는 사다리꼴을 이용하였는데 이는 대부분의 유연성을 가진 실제계의 운동이 사다리꼴 속도분포를 갖도록 구동되기 때문이다. 이러한 경우, 센서의 설치등의 추가 비용없이 진동을 억제할 수 있는 수동 제어기의 설계가 가능하다.

### 2 이론해석

수평이동하는 유연한 외팔보 모델을 Fig.1과 같이 단위길이당 질량  $m$ , 길이가  $l$ 인 유연한 외팔보에 첨단질량(tip mass)  $M$ 이 부착되어 있는 것으로 가

\*연세대학교 대학원

\*\*연세대학교 기계공학과

정하여 해석한다. 유연한 외팔보는 수평이동하는 강체인 대차(cart)에 고정되어있다. 외팔보는 폭에 비해 두께가 매우 얇으므로 Euler-Bernoulli보로 가정한다.

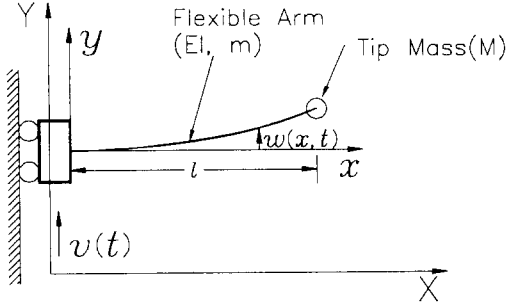


Fig.1 Simplified Model

Fig.1에서 X-Y는 고정좌표계이고 x-y는 절대좌표계에서 수평이동하는 대차를 기준으로한 이동좌표계이다.  $w(x, t)$ 는 수평이동좌표계에 대한 외팔보의 횡방향 변위(lateral displacement)를 나타낸다.

## 2.1 지배 방정식

계가 평형점 근방에서 진동한다고 가정하여 선형화된 지배방정식과 경계조건을 구한다.

대차의 운동  $v(t)$ 는 유연한 외팔보에 작용되는  $p(x, t)$ 의 분포하중으로 생각할 수 있다. 이를 고려하여 구한 운동에너지, 위치에너지와 일은 식(1)과 같고 이들의 변분(variation)은 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l (m + M\delta(x-l)) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \\
 V &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 W &= W_c + W_{nc} = -V + W_{nc} \\
 W_{nc} &= \int_0^l p(x, t) w(x, t) dx
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \int_0^l (m + M\delta(x-l)) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx \\
 \delta W &= \delta W_c + \delta W_{nc} = -\delta V + \int_0^l p(x, t) \delta w dx \\
 \delta V &= \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (3)$$

식(3)의 Hamilton의 원리에 식(2)를 대입하고 부분

적분을 수행하면 다음의 식(4)를 얻을 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \left( -(m + M\delta(x-l)) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p(x, t) \right) \delta w dx - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^l + EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \Big|_0^l \right] dt = 0 \quad (4)$$

식(4)는  $w(x, t)$ 의 임의의 변분  $\delta w$ 에 대해 만족하여야 하므로 다음과 같은 지배방정식과 경계조건을 얻을 수 있다.

$$(m + M\delta(x-l)) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, t) \quad (5)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^l = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \Big|_0^l = 0 \quad (6)$$

여기서  $p(x, t)$ 는 고정좌표계에 대한 이동좌표계의 가속도운동에 의하여 발생하는 비보존 분포부하이고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(t) = -(m + M\delta(x-l)) \ddot{v}(t) \quad (7)$$

## 2.2 분포계의 이산화

앞에서 얻어진 운동방정식과 경계조건을 정리하면 다음의 식(8)과 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned}
 EI w''''(x, t) + (m + M\delta(x-l)) \ddot{w}(x, t) \\
 = -(m + M\delta(x-l)) \ddot{v}(t)
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$w(x, t)_{x=0} = 0 \quad w'(x, t)_{x=0} = 0 \quad (9)$$

$$w''(x, t)_{x=l} = 0 \quad w'''(x, t)_{x=l} = 0$$

이러한 분포계를 집중질량계로 해석하기 위하여 무한개의 진동모우드 중, 유한개의 진동모우드만을 고려한다. Galerkin의 모우드 합 방법을 이용하여 보의 처짐  $w(x, t)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^L \phi_j(x) q_j(t) \quad (10)$$

여기서 L은 고려할 진동모우드의 수이고,  $q_j(t)$ 는 일반화좌표(generalized coordinates)이다.

또,  $\phi_j(x)$ 는 직교좌표계를 이 일반화좌표  $q_j(t)$ 로 변환해주는 좌표변환함수이다.

좌표변환함수로는 유연한 외팔보 모델의 comparison function으로서 첨단질량이 없는 균일한 외팔보의 고유함수(eigen function)를 이용하였고, 이에 따른 좌표변환함수  $\phi_j(x)$ 는 아래의 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \phi_j(x) &= \frac{1}{\sqrt{ml}} [\cosh \lambda_j(x/l) - \cos \lambda_j(x/l) \\
 &\quad - \sigma_j (\sinh \lambda_j(x/l) - \sin \lambda_j(x/l))]
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_j = \frac{\sinh \lambda_j - \sin \lambda_j}{\cosh \lambda_j + \cos \lambda_j} \quad (j = 1, 2, \dots, L)$$

여기서

$$\phi_j(t) = \frac{2(-1)^{j+1}}{\sqrt{ml}}, \quad \int_0^l \phi_j(x) dx = \frac{2\sigma_j \sqrt{ml}}{m\lambda_j}$$

이다.  $\lambda_j$  와  $\sigma_j$  의 값은 Table 1.과 같다.

Table 1. The Values of  $\lambda_j$  and  $\sigma_j$

$j$	$\lambda_j$	$\sigma_j$
1	1.87510	0.734096
2	4.69409	1.018467
3	7.85475	0.999224
4	10.9955	1.000034

식(11)로 표현되는 좌표변환 함수는 다음과 같은 직교성(orthogonality) 조건을 만족한다

$$\int_0^l m \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, L) \quad (12)$$

식(10)과 식(11), 그리고 직교성 조건인 식(12)를 구해진 운동방정식(8)에 대입하면 다음의 식(13)을 구할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^L [m \bar{\omega}_j^2 \phi_j(x) q_j(t) + (m + M\delta(x-l)) \phi_j(x) \bar{q}_j(t)] = - (m + M\delta(x-l)) \dot{v}(t) \quad (13)$$

여기서,

$$\bar{\omega}_j^2 = \lambda_j (EI/ml^4)$$

이다. 식(13)에  $\phi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ )를 내적(inner product)하여 정규화 하고 0에서  $l$ 구간에 대해 적분을 행하면 좌표변환함수의 직교성에 의해 시간의 함수로만 이루어진 다음의 식(14)를 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^L [\delta_{ij} + 4M^* (-1)^{i+j}] \bar{q}_j(t) + \delta_{ij} \bar{\omega}_j^2 q_j(t) = A_i \dot{v}(t) \quad (14)$$

$$A_i = -2\sqrt{ml} [(\sigma_i/\lambda_i) + M^* (-1)^{i+1}]$$

(14)식을 행렬식으로 표기하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \dot{v}(t) \mathbf{F} \quad (15)$$

여기서

$$\mathbf{M}_{ij} = \delta_{ij} + 4M^* (-1)^{i+j}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \delta_{ij} \bar{\omega}_j^2 = \delta_{ij} \lambda_j^4 (EI/ml^4)$$

$$\mathbf{F}_i = A_i, \quad \mathbf{Q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_L(t)]^T$$

이다.

### 2.3 초기조건의 처리

외팔보진동의 초기조건이 이산계에서 일반화좌표

의 초기값에 어떻게 영향을 미치게 되는지를 알아 보기 위하여 식(10)을 이용하여 다음과 같은 초기값을 정의한다.

$$w(x, 0) = \sum_{j=1}^L \phi_j(x) q_j(0) = f(x) \quad (16)$$

$$\dot{w}(x, 0) = \sum_{j=1}^L \phi_j(x) \dot{q}_j(0) = g(x) \quad (17)$$

함수의 내적을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_D \phi_i(x) \phi_j(x) dx \triangleq (\phi_i(x), \phi_j(x))$$

좌표변환함수의 직교성(orthogonality)에 의해서 다음의 식(18)을 만족하게 된다.

$$\int_0^l m \phi_i(x) \phi_j(x) dx = m (\phi_i(x), \phi_j(x)) = \delta_{ij} \quad (18)$$

따라서 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$q_j(0) = \frac{1}{m} (f(x), \phi_j(x))$$

$$\dot{q}_j(0) = \frac{1}{m} (g(x), \phi_j(x))$$

만약 초기값이 모두 0이라면  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$  이므로 다음의 관계를 얻는다.

$$q_j(0) = \dot{q}_j(0) = 0$$

### 2.4 속도분포를 이용한 진동의 억제

Fig.2와 같은 속도 분포에 의해 대차가 운동한다고 가정할 경우, 대차의 속도  $v(t)$  및 가속도  $\dot{v}(t)$ 는 다음의 식(19)와 식(20)과 같이 표현된다.

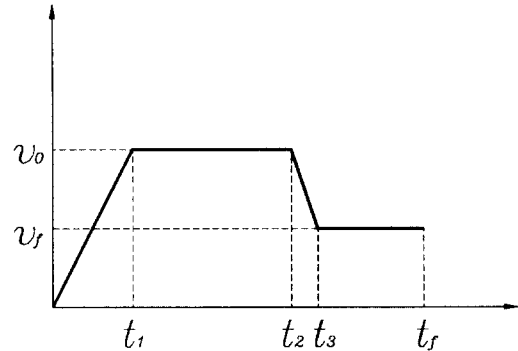


Fig.2 velocity profile

$$v(t) = \frac{v_0}{t_1} t - \frac{v_0}{t_1} (t - t_1) u(t - t_1) \quad (19)$$

$$+ \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} (t - t_2) u(t - t_2) - \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} (t - t_3) u(t - t_3)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{v_0}{t_1} u(t) - \frac{v_0}{t_1} u(t - t_1) \quad (20)$$

$$+ \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} u(t - t_2) - \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} u(t - t_3)$$

무한개의 진동모우드 중에 특정 개수의 진동 모우드만을 고려한 유연한 외팔보의 진동거동을 나타내는 행렬식(15)에 위의  $\dot{x}(t)$  에 관한 식을 대입하여 운동방정식을 해석적으로 푼다.

식(15)의  $\mathbf{M}$  과  $\mathbf{K}$  에 대해 Eigen Analysis를 행하여 Modal Matrix  $[\Phi]$  를 구하면 다음식(21)에 의하여 식(15)는 아래의 식(22)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [\Phi] \eta \\ [\Phi]^T \mathbf{M} [\Phi] &= [m], \quad [\Phi]^T \mathbf{K} [\Phi] = [k] \\ [\Phi]^T E &= f \end{aligned} \quad (21)$$

$$[m] \ddot{\eta} + [k] \eta = f \dot{v} \quad (22)$$

$\eta$  에 있어서의  $\eta_i$  에 대한 식은 식(23)과 같다.

$$m_i \ddot{\eta}_i + k_i \eta_i = f_i \dot{v} \quad (23)$$

식(23)을 Laplace변환하고 정리하면 식(24)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\eta_i(s)}{\dot{v}(s)} &= \frac{f_i}{m_i s^2 + k_i} = \frac{f_i}{m_i} \cdot \frac{1}{s^2 + \Omega_i^2} \\ (\Omega_i &= \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}) \end{aligned} \quad (24)$$

또한 식(20)의 대차의 가속도식을 Laplace변환하면 다음의 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= \frac{v_0}{t_1} \frac{1}{s} - \frac{v_0}{t_1} e^{-t_1 s} \\ &+ \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} \frac{1}{s} e^{-t_2 s} + \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} \frac{1}{s} e^{-t_3 s} \end{aligned} \quad (25)$$

따라서  $\eta_i(s)$  는 다음식(26)과 같다.

$$\eta_i(s) = \frac{\eta_i(t)}{\dot{v}(s)} * \dot{v}(s) \quad (\text{Convolution}) \quad (26)$$

초기에 진동이 없는 경우에 대하여 다음과 같은 조건이 성립함을 알 수 있다.

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0$$

$$q_i(0) = \dot{q}_i(0) = 0$$

$$\eta_i(0) = \dot{\eta}_i(0) = 0$$

$\eta_i(0) = 0$  ,  $\dot{\eta}_i(0) = 0$  인 경우의 시간응답은 다음의 식(27)과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta_i = \int_0^t \dot{v}(\tau) \left\{ \frac{f_i}{m_i \Omega_i} \sin[\Omega_i(t - \tau)] \right\} d\tau \quad (27)$$

시간  $t_3$  이후의 응답은 다음의 식(28)과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= \frac{f_i}{m_i \Omega_i} \left\{ -\frac{v_0}{t_1} \cos[\Omega_i t] + \frac{v_0}{t_1} \cos[\Omega_i(t - t_1)] \right. \\ &\left. - \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} \cos[\Omega_i(t - t_2)] + \frac{v_f - v_0}{t_3 - t_2} \cos[\Omega_i(t - t_3)] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

이에 따라 다음의 식(29)를 만족시키도록  $t_1$  과  $t_2$

를 설정하면 진동을 유발시키지 않을 수 있게된다.

$$t_1 = \frac{2m\pi}{\Omega_i}, \quad t_3 - t_2 = \frac{2n\pi}{\Omega_i} \quad (29)$$

( $m, n$  은 자연수),  $\eta_i(t) = 0$  (at  $t \geq t_3$ )

일반적으로 유연한 외팔보의 경우 진동의 주요거동을 나타내는 1차 모우드의 고유진동수에 해당하는  $\Omega_1$  을 구하여 위식을 만족하는  $t_1, t_2, t_3$  를 정하면 1차 모우드의 진동을 억제시킬 수 있다.

### 3 모의실험 및 실험

#### 3.1 실험 방법 및 실험장치

대차가 2초동안 0.4m를 움직이는 경우에 대해서 대차의 이동속도분포에 따른 유연한 외팔보의 진동거동을 모의실험과 실험을 통하여 앞서 제시한 이론의 타당성을 검증한다. 모의실험에서 모델링한 유연한 외팔보는 비감쇠계이고 진동모우드는 4차까지 고려하였다. 사용된 유연한 외팔보의 물성치는 Table 2. 와 같다.

Table 2. Simulation Parameters of flexible arm

Parameter	Value
Length (l)	1.0(m)
Mass per Unit Length(m)	0.23451(kg/m)
Thickness (h)	0.003(m)
Bending Stiffness (EI)	4.224(N · m <sup>2</sup> )

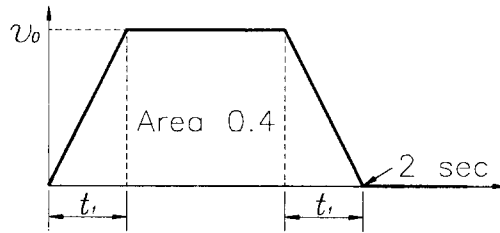


Fig.3 Velocity Profile of Experiment and Simulation

속도분포의 형태는 Fig.3과 같이 양 빗변이 대칭인 사다리꼴이고 이 사다리꼴의 면적이 이동거리인 0.4m가 되도록  $v_0$  를 결정한다. 이때  $t_1 (= t_3 - t_2)$  이 사다리꼴의 형태를 결정하는데  $t_1$  을 하한 0.0초에서 상한 1.0초까지 변화시켜가면서  $t_3$  까지 0.4m를 움직이는 유연한 외팔보의 진동경향을 살펴본다.

실험의 경우 외팔보의 진동을 1m의 유연한 외팔보에 고정단에서 부터 0.1m의 위치에 스트레인지지를 부착하여 측정하였으며 모의실험에서 사용되는 스트레인과 이산계의 일반화변수와와의 관계는 다음의 식(30)과 같다.

$$y_s(x_s) = -\left(\frac{h}{2}\right)\omega''(x_s, t) \\ = -\left(\frac{h}{2}\right)\sum_{i=1}^I \phi''(x_s)q_i(t) \quad (30)$$

여기서 h는 유연한 외팔보의 횡방향 두께이고,  $x_s$ 는 스트레인지지의 부착위치,  $y_s(x_s)$ 는 변형률을 나타낸다.

실험장치로는 대차의 직선운동을 위해 볼스크류(ball screw)를 이용하여 회전운동을 직선운동으로 변환시켜 DC모터로 구동하였으며 실험장치의 흐름도는 Fig.4와 같다.

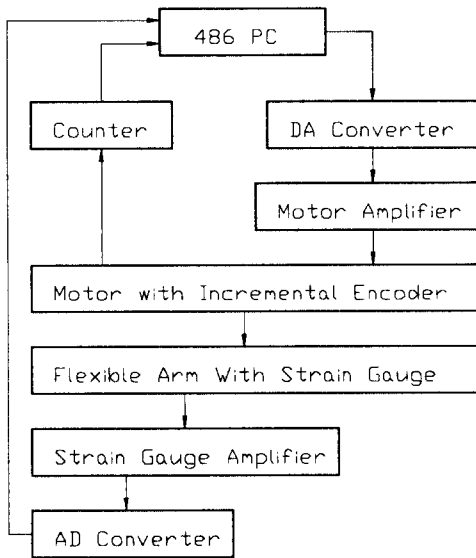


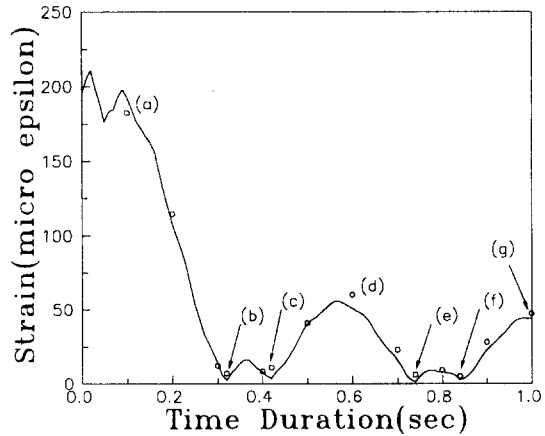
Fig.4 Schematic Diagram of Experimental Setup

### 3.2 모의실험 및 실험결과

Fig.5와 Fig.6에 모의실험 및 실험결과를 나타내었다. Fig.5는  $t_1$ 을 0초에서 1초까지 변화시켜가며 대차의 운동이 완료된 상태에서 유연한 외팔보에서 발생하는 스트레인의 최대값을 표시한 것이다. Fig.6은  $t_1$ 이 0.1초, 0.32초, 0.42초, 0.6초, 0.74초, 0.84초, 1.0초의 각각의 경로에 대한 결과이다.

이론에 의하여 구해진 1차 모드에 의한 진동을 억제하는 등가속/등감속 속도구간( $t_1$ )은 0.42초,

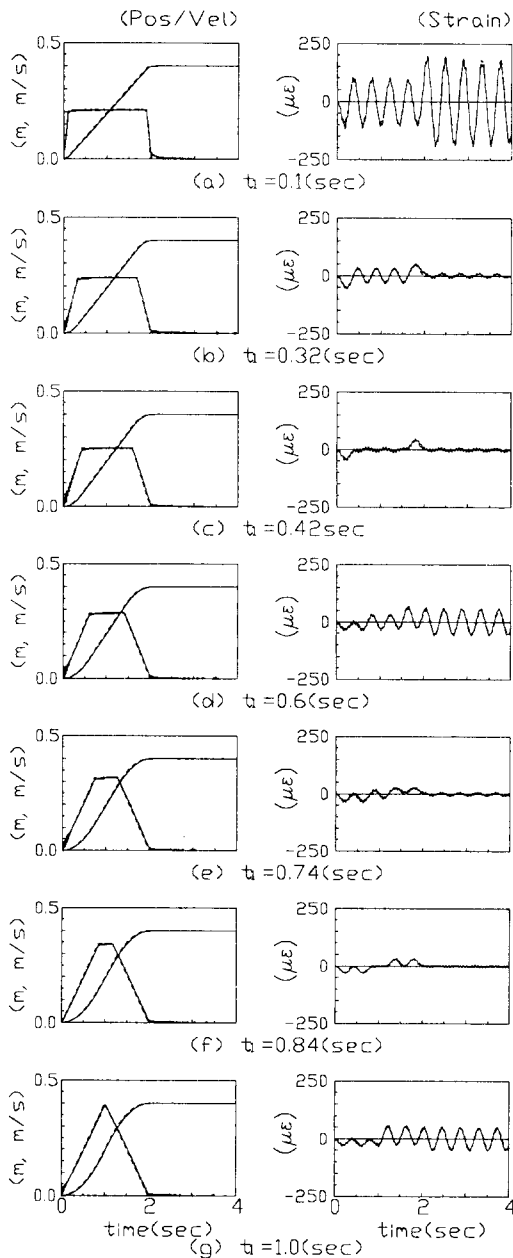
0.84초 근방이다. 이 값에 의한 모의실험 및 실험에 의하면, Fig.5와 Fig.6의 (c)와 (f)에서 볼 수 있듯이 진동이 잘 억제됨을 알 수 있다. 이 외의 경우에는 (b), (e)의 경우를 제외하고는 대차의 운동이 완료된 이후에 외팔보 진동이 크게 발생됨을 알 수 있다.



— Simulation, ○ Experiment  
Fig.5 Strain Magnitude at Steady-State with Time Duration  $t_1$

모의실험 및 실험결과에 의하면 식(29)에 의해 구해진  $t_1$ 이 0.42초인 경우와 0.84초인 경우 이외에  $t_1$ 이 0.32초와 0.74초인 경우에도 Fig.5와 Fig.6의 (b)와 (e)에 나타난 것과 같이 대차의 이동이 완료된 이후에 진동이 거의 발생되지 않음을 볼 수 있다.

이것은 유연한 외팔보의 진동을 변화시킬 수 있는 등가속/등감속운동들 중에서  $t_1$ 이 0.42, 0.84인 경우는 등가속운동과 등감속운동이 각각 진동을 억제하는 속도분포인데 반해  $t_1$ 이 0.32, 0.74인 경우는 등가속운동에 의한 진동과 등감속운동에 의한 진동이 중첩되는 과정에서 두 진동의 진폭이 같고, 위상차가 180°가 되어 서로 소멸간섭을 일으켜 진동이 제거되는 속도분포이기 때문이다.  $t_1$ 이 0.42, 0.84인 경우와  $t_1$ 이 0.32, 0.74인 경우 모두 대차의 운동이 완료된 후의 진동은 거의 발생되지 않으나 후자의 경우 등속운동 구간에서 링크의 운동이 발생됨을 알 수 있다. 또한 위상의 반전이 조금만 어긋나게 되어도 진동이 소멸되지 않게 되어 실제계에 있어서 진동억제 효과를 보기 어렵게 된다.



----- Simulation      ——— Experiment

Fig.6 Simulation and Experiment Results

모의실험과 실험의 결과에 의하여 진동체의 고유진동수에 관한 정보를 알고있으면 이를 이용하여 진동을 억제하는 속도 분포를 이용하여 능동제어를 이용하지 않고도 진동이 제어되는 것을 모의실험과 실험으로 확인할 수 있었다.

#### 4. 결론

모의실험과 실험에 의해서 이론해석의 결과가 타당함을 검증하였으며 이론에서 사용한 유연한 외팔보의 모델이 실제계의 거동을 충분히 설명함 또한 확인할 수 있었다. 이를 바탕으로 본 논문에서는 고유진동수만을 파악하고 있다면 유연한 외팔보를 직접 제어하지 않고도 대차의 운동에 의하여 발생되는 유연한 외팔보의 진동을 현저히 줄일 수 있음을 알았다.

본 연구의 경우 진동체로 사용한 계가 연속계이어서 모델링 오차에 의한 고주파 진동의 경우 모의실험과 실험의 오차가 부각되는 결과를 보이지만 진자구조를 갖는 진동계 등의 경우에는 1차 진동모우드로 계의 진동을 충분히 표현할 수 있으므로 개선된 진동효과를 볼 수 있을 것으로 기대한다.

#### 5. 참고문헌

- [1] G. G. Hastings and W. J. Book, "Verification of a Linear Dynamic Model for Flexible Robot Manipulators", Proceedings, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 2, pp.1024-1029, 1986.
- [2] Caughey T. K. and O'Kelly M. E. J., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp.583-588, 1965.
- [3] Blevins R. D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979.
- [4] Leonard Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Publishing Co. Inc., New York, 1967.
- [5] Francis B. Hildebrand, Method of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1965.