

# 민감도 해석에 의한 감쇠계의 구조변경

차 현주\* · 도 원주\*\* · 이 시복\*\*\*

## Structural Dynamics Modification of Damped Systems via Sensitivity Analysis

Hyun-Ju Cha\* · Won-Joo Do\*\* · Shi-Bok Lee\*\*\*

### Abstract

In the mechanical systems with large damping, the conventional SDM method developed for no damping systems will lead to an error solution. Here, we introduce a SDM method based on the experimental modal model for large damping systems. The sensitivities of natural frequencies and mode shapes with respect to mass, damping, and stiffness coefficients of structures are used to calculate the position and quantity of modification, and predict the new dynamic characteristics. Through numerical simulation and experiment, the effectiveness of the proposed method is tested.

### 1. 서 론

기계 구조는 고속화, 고정밀도가 요구되고 복잡해짐에 따라 동특성을 개선시킬 필요가 있다. 구조변경에서 설계 변수의 변화를 시행 착오적으로 구하는 것은 비효율적이며 시간이 많이 걸린다. 민감도(Sensitivity)는 설계 변수의 변화가 구조물의 동특성에 미치는 영향을 결정한다. 즉, 민감도 해석을 통해 최소의 변경량과 최적의 변경 위치를 선택할 수 있다. Fox와 Kapoor<sup>(1)</sup>는 설계변수에 대한 고유진동수와 고유모드의 변화율에 관한 이론을 제안하고, 감쇠가 없는 선형시스템의 구조변경에 대하여 민감도 해석에 관한 근사해를 제시했다. Roger<sup>(2)</sup>는 이를 비대칭 시스템에 적용하였다. Nelson<sup>(3)</sup>은 복잡한 시스템이나 구조물에 대하여 간단히 고유모드를 구하는 방법을 제안하였다. Chou와 Chen<sup>(4)</sup>은 Fox와 Kapoor<sup>(1)</sup>이 제안했던 방법에

서 설계변수에 대하여 고유진동수와 고유모드의 미분항을 전개하여서 수식화 하였다. 민감도 해석은 불안정한 동특성을 나타내는 비자기수반계(non-self-adjoint system), 비보존계(non-conservative system)에까지 확장되고 있다. 이런 방법들은 감쇠를 고려하지 않았으므로 감쇠가 존재하는 실제 시스템에 대한 해석 오차가 크다.

본 연구에서는 기계 시스템이나 구조물의 원하는 동특성을 얻기 위하여 감쇠를 고려한 민감도 해석 방법을 제안한다. 민감도는 고유진동수와 고유모드의 함수로 표현되고, 원하는 동특성을 얻기 위하여 최적위치와 변경량은 고유치와 실험 모드 해석에 의해서 구할 수 있다.

제안된 방법을 검증하기 위하여 감쇠비가 서로 다른 네 가지 종류의 4자유도 시스템에 대해서 고유진동수와 고유모드를 원하는 방향으로 변경한다. 실험을 통해서 제안된 방법이 감쇠가 존재하는 모델에 대해서 적합함을 보였다.

\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

\*\* 현대 자동차 승용 차시 설계 1팀

\*\*\* 부산대학교 기계공학부

## 2. 이론적 배경

### 2.1 비감쇠계의 고유진동수와 고유모드 민감도

비감쇠계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

여기서  $[M]$ 은 질량행렬이고,  $[K]$ 는 강성행렬이다. 식 (1)은 다음과 같은 고유치 해석문제로 생각할 수 있다.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\phi_r\} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\omega_r$ 과  $\phi_r$ 은 시스템의 고유진동수와 고유벡터이다.

(2)식을 행렬  $[M]$ 과  $[K]$ 의 요소  $m_{ij}$ ,  $k_{ij}$ 로 편미분하여 정리하면 다음과 같은 고유진동수와 고유모드의 1계 민감도를 구할 수 있다..

$$\frac{\partial(\omega_r^2)}{\partial m_{ij}} = \begin{pmatrix} -2\omega_r^2 \phi_r^i \phi_r^j & i \neq j \\ -\omega_r^2 (\phi_r^i)^2 & i = j \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\omega_r^2)}{\partial k_{ij}} = \begin{pmatrix} 2\phi_r^i \phi_r^j & i \neq j \\ (\phi_r^i)^2 & i = j \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial m_{ij}} = \sum_{s=1}^n \alpha_s \{\phi_s\} \quad (5)$$

여기서

(i)  $i \neq j$  인 경우는

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{\omega_r^2(\phi_s^j \phi_r^i + \phi_s^i \phi_r^j)}{\omega_s^2 - \omega_r^2} & r \neq s \\ -\phi_r^i \phi_r^j & r = s \end{pmatrix}$$

이고

(ii)  $i = j$  인 경우

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{\omega_r^2(\phi_s^i \phi_r^i)}{\omega_s^2 - \omega_r^2} & r \neq s \\ -\frac{(\phi_r^i)^2}{2} & r = s \end{pmatrix}$$

이다.

$$\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial k_{ij}} = \sum_{s=1}^n \beta_s \{\phi_s\} \quad (6)$$

여기서

(i)  $i \neq j$  인 경우는

$$\beta_s = \begin{pmatrix} \frac{(\phi_s^j \phi_r^i + \phi_s^i \phi_r^j)}{\omega_r^2 - \omega_s^2} & r \neq s \\ 0 & r = s \end{pmatrix}$$

이고

(ii)  $i = j$  인 경우는

$$\beta_s = \begin{pmatrix} \frac{(\phi_s^i \phi_r^i)}{\omega_r^2 - \omega_s^2} & r \neq s \\ 0 & r = s \end{pmatrix}$$

이다.

### 2.2 감쇠계의 고유진동수와 고유모드 민감도

Foss의 변환방식을 도입한 선형 동역학 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

한편 선형 동역학 시스템에서의 고유치 문제는 다음식으로 나타내진다.

$$\lambda_r[A]\{\phi_r\} + [B]\{\phi_r\} = 0 \quad (8)$$

$$\text{또는 } -i\omega_r[A]\{\phi_r\} + [B]\{\phi_r\} = 0 \quad (9)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서  $\lambda_r$ 과  $\phi_r$ 은 각각  $r$ 차 고유치와 정규화된 고유벡터이다.

$a_{ij}$ 를 행렬  $[A]$ 의 요소라 하고 식 (8)를  $a_{ij}$ 로 편미분해서 정리하면

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial a_{ij}} + \lambda_r \{\phi_r\}^T \frac{\partial [A]}{\partial a_{ij}} \{\phi_r\} + \{\phi_r\}^T \frac{\partial [B]}{\partial a_{ij}} \times$$

$$\{\phi_r\} = 0 \quad (11)$$

을 얻는다.

설계변수에 대한 설계변수 행렬의 편미분항을 유도하기 위해 다음과 같이 나눠서 생각한다.

i)  $i = 1 \sim n, j = 1 \sim n$ 의 경우 ( $a_{ij}$ 의 요소가  $[C]_{ij}$ 일 때)는

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial c_{ij}} = \begin{pmatrix} -\lambda_r(\phi_r^i - \phi_r^j)^2 & \text{for } i \neq j \\ -\lambda_r(\phi_r^i)^2 & \text{for } i = j \end{pmatrix} \quad (12)$$

가 되고

ii)  $i = 1 \sim n, j = n+1 \sim 2n$ 의 경우 ( $a_{ij}$ 의 요소가  $[M]_{ij}$ 일 때)는 식 (7)의 고유치가

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} \phi & \phi^* \\ \phi \lambda & \phi^* \lambda^* \end{bmatrix}_{2n \times 2n},$$

$$\text{즉 } \phi_r^{n+i} = \lambda_r \phi_r^i \quad (13)$$

인 성질을 이용해서 앞의 방식대로 전개하면,

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial m_{ij}} = \begin{pmatrix} -2\lambda_r(\phi_r^i)(\phi_r^j) & i \neq j \\ -\lambda_r^2(\phi_r^i)^2 & i = j \end{pmatrix} \quad (14)$$

를 얻는다.

iii)  $i = n \sim 2n$ ,  $j = 1 \sim n$ 의 경우는 ii)의 경우와 동일한 식이 유도된다.

식 (8)을 행렬 [B]의 구성요소인  $b_{ij}$ 로 편미분한 경우도 앞과 같은 방식으로 전개된다. 고유벡터의 민감도를 유도하는 것도 앞과 같은 방식으로 전개한다. 앞의 식을 유도한 과정을 정리하면, 질량, 감쇠, 그리고 강성계수에 대한 고유진동수와 고유모드의 1계 민감도는 다음과 같이 요약된다.

$$\frac{\partial(i\omega_r)}{\partial m_{ij}} = \begin{pmatrix} -2i\omega_r(\phi_r^i)(\phi_r^j) & i \neq j \\ \omega_r^2(\phi_r^i)^2 & i = j \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\frac{\partial(i\omega_r)}{\partial c_{ij}} = \begin{pmatrix} -i\omega_r(\phi_r^i - \phi_r^j)^2 & i \neq j \\ -i\omega_r(\phi_r^i)^2 & i = j \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\frac{\partial(i\omega_r)}{\partial k_{ij}} = \begin{pmatrix} -(\phi_r^i - \phi_r^j)^2 & i \neq j \\ -(\phi_r^i)^2 & i = j \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial m_{ij}} = \sum_{s=1}^n \alpha_s \{\phi_s\} \quad (18)$$

여기서

(i)  $i \neq j$  인 경우는

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{\omega_r^{2(\phi_r^i - \phi_r^j)}}{i\omega_r - i\omega_s} & r \neq s \\ -i\omega_r(\phi_r^i)(\phi_r^j) & r = s \end{pmatrix}$$

이고

(ii)  $i = j$  인 경우는

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{\omega_r^{2(\phi_r^i)}}{i\omega_r - i\omega_s} & r \neq s \\ -i\omega_r(\phi_r^i)^2 & r = s \end{pmatrix}$$

이다

$$\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial c_{ij}} = \sum_{s=1}^n \beta_s \{\phi_s\} \quad (19)$$

여기서

(i)  $i \neq j$  인 경우는

$$\beta_s = \begin{pmatrix} \frac{i\omega_r(\phi_s^i - \phi_s^j)(\phi_r^i - \phi_r^j)}{i\omega_s - i\omega_r} & r \neq s \\ -\frac{1}{2}(\phi_r^i - \phi_r^j)^2 & r = s \end{pmatrix}$$

이고

(ii)  $i = j$  인 경우는

$$\beta_s = \begin{pmatrix} \frac{i\omega_r(\phi_s^i \phi_r^j)}{i\omega_s - i\omega_r} & r \neq s \\ -\frac{1}{2}(\phi_r^i)^2 & r = s \end{pmatrix}$$

이다.

$$\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial k_{ij}} = \sum_{s=1}^n \gamma_s \{\phi_s\} \quad (20)$$

여기서

(i)  $i \neq j$  인 경우는

$$\gamma_s = \begin{pmatrix} \frac{(\phi_s^i - \phi_s^j)(\phi_r^i - \phi_r^j)}{i\omega_s - i\omega_r} & r \neq s \\ 0 & r = s \end{pmatrix}$$

이고,

(ii)  $i = j$  인 경우는

$$\gamma_s = \begin{pmatrix} \frac{(\phi_s^i \phi_r^j)}{i\omega_s - i\omega_r} & r \neq s \\ 0 & r = s \end{pmatrix}$$

이다

### 2.3 감쇠계에 대한 구조변경(SDM)

고차급수를 무시한 고유진동수와 고유모드를 테일러 급수 전개(Taylor's series expansion)하여 변경량  $\Delta m$ ,  $\Delta c$ ,  $\Delta k$ 을 결정한다.

$$i\omega_r = \overline{i\omega_r} + \sum \left[ \frac{\partial(i\omega_r)}{\partial m_{ij}} \right]_{\overline{\omega_r}, \overline{\phi_r}} \Delta m_{ij}$$

$$+ \sum \left[ \frac{\partial(i\omega_r)}{\partial c_{ij}} \right]_{\overline{\omega_r}, \overline{\phi_r}} \Delta c_{ij}$$

$$+ \sum \left[ \frac{\partial(i\omega_r)}{\partial k_{ij}} \right]_{\overline{\omega_r}} \Delta k_{ij} \quad (21)$$

$$\{\phi_r\} = \{\overline{\phi_r}\} +$$

$$\sum \left[ \frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial m_{ij}} \right]_{\overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_n}; \overline{\phi_1}, \dots, \overline{\phi_n}} \Delta m_{ij}$$

$$+ \sum \left[ \frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial c_{ij}} \right]_{\overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_n}; \overline{\phi_1}, \dots, \overline{\phi_n}} \Delta c_{ij}$$

$$+ \sum \left[ \frac{\partial \{\phi_r\}}{\partial k_{ij}} \right]_{\omega_1, \dots, \omega_n; \{\bar{\phi}_1\}, \dots, \{\bar{\phi}_n\}} \Delta k_{ij} \quad (22)$$

일반적으로 변경량  $\Delta m_{ij}$ ,  $\Delta k_{ij}$ 는 작지 않으나 함수와 변수간의 비선형성을 선형이라고 가정하고 증분계획법(incremental scheme)<sup>(11)</sup>을 도입하면 근사가 이루어진다. 이런 근사에 바탕을 두면 소량의 고유진동수나 고유모드의 증감량을 사용할 수 있고, 식 (21)과 (22)을 쓸 수 있다.

### 3. 수치실험

#### 3.1 수치실험의 조건과 방법

수치실험을 통해 고유진동수와 고유모드를 변경함에 있어 감쇠를 고려하지 않은 기존의 방법과 제안된 방법을 감쇠비( $\zeta$ )에 따라 비교하였다. 수치실험에서 이용된 모델은 4자유도 이산계이다. 이 모델에서 감쇠비( $\zeta$ )가 다른 4가지의 모델을 선정하는 방법으로 질량 행렬과 강성 행렬은 고정시키고 감쇠행렬 [C]를 바꾼다. 질량과 강성 및 감쇠는 다음과 같다.

$$m_1 = 1\text{kg}, m_2 = 2\text{kg}, m_3 = 3\text{kg}, m_4 = 4\text{kg}$$

$$k_1 = 800\text{N/m}, k_2 = 1600\text{N/m}, k_3 = 2400\text{N/m},$$

$$k_4 = 3200\text{N/m}$$

그리고 감쇠 데이터는 표1에 나타나 있다.

##### 1) 최적 변경점 선정

구조변경을 함에 있어서 많은 설계변수들이 있으나 가장 적은 양으로 원하는 결과를 얻을 수 있는 방법을 선정하는 것이 바람직하다. 이는 각 설계변수에 대한 민감도 값을 비교해서 구할 수 있는데, 민감도가 클수록 적은 변경량을 갖는다.

##### 2) 고유진동수의 변경

고유진동수  $\omega_r$ 을 원하는 값으로 옮기는데 필요한 변경량은 식 (21)으로부터 구한다.

##### 3) 고유모드의 변경

변경하기 이전 모델의 고유치 해석에서 2차 모드의 노드점(nodal point)이 1점과 2점 사이에 있음을 알 수 있다. 이 때 설계변수  $m_1$ 으로 2차모드의 노드점을 2점으로 변경한다. 필요한 변경량은 식 (22)로부터 구한다.

#### 3.2 결과 및 고찰

표 2는 과감쇠 모델의 경우 고유 진동수와 고유

모드의 변경을 기존의 방법과 제안된 방법으로 비교한 것이다. 그림 2는 2가지 방법으로 구조 변경할 때 고유 진동수의 수렴율을 비교한 것이다.

수치실험의 결과에서 다음과 같은 결론을 얻었다. 우선 고유진동수 변경에서는 감쇠비( $\zeta$ )가 증가함에 따라 기존의 방법보다 제안하는 방법이 더 우수함을 확인할 수 있다. 설계변수를 감쇠 c, 강성 k로 하였을 때는 질량 m에 비해 더 많은 반복횟수를 필요로 한다.

고유모드 변경도 감쇠비( $\zeta$ )가 증가함에 따라 기존의 방법보다 제안하는 방법이 우수하다. 질량 m을 설계변수로 하였을 때 기존의 방법에서 과감쇠와 극과감쇠 모델에서는 다른값 쪽으로 발산하고 있다. 그러나 감쇠 c를 설계변수로 하였을 때는 원하는 목적인 0으로 수렴하지 않고 오히려 원래 시스템의  $\phi_2^2$ 보다 더 큰 값의 결과를 얻는데 이는 변경전 시스템의 특성상 고유모드  $\phi_2^2$ 을 0으로 변경하는 데에는 감쇠 c는 설계변수로 부적합함을 알 수 있다. 제안된 방법은 기존의 방법과는 달리 고유진동수에 감쇠비( $\zeta$ )가 포함되어 있어 감쇠비( $\zeta$ )를 원하는 특성을 가질 수 있도록 변경이 가능하다. 이는 실제 기계 시스템이나 구조물에서 큰 잇점을 갖고 있다. 즉 시스템의 특성상 고유진동수에 의한 큰 진동을 수반하더라도 감쇠비( $\zeta$ )가 커지게 구조변경을 하면 진동크기가 상당히 감소될 수 있다. 오차는 다음과 같이 구하였다.

고유진동수 오차(%)

$$= \frac{|\text{변경된 } \omega - \text{원하는 } \omega|}{\text{원하는 } \omega} \times 100$$

(23)

고유모드 오차(%)

$$= \frac{|\text{변경된 } \phi^2 - \text{원하는 } \phi^2|}{\text{원하는 } \phi^2} \times 100$$

(24)

## 4. 실험

#### 4.1 실험조건과 방법

실험을 통해 기존의 방법과 제안된 방법을 사용한 결과를 비교하여 제안된 방법의 유용성을 보여려고 한다. 실험모델은 재질이 알루미늄(AL-6061)인 외팔보로 하고, 감쇠비( $\zeta$ )를 높이기 위해 감쇠

특성이 다른 재진제를 뒤에 부착하여 감쇠비에 따른 4가지 모델로 실험하였다. 실험 모델인 외팔보의 개략도는 그림 3과 같다. 각 모델에서 가진점은 모두 점 1로 하였고, 각각 4개의 응답점에서 가속도계로 응답을 받아 주파수 응답함수를 구하였다. 설계변수로는 질량  $m$ 을 선택하였다. 그리고, 주파수 응답함수에서 구한 고유진동수와 고유모드를 이용하여 최적위치와 변경량을 구한후 알루미늄 조각을 외팔보에 부착하여 구조변경을 하였다.

#### 4.2 결과 및 고찰

외팔보에 대한 고유진동수와 고유모드를 변경할 때 감쇠비( $\zeta$ )에 따른 4가지 모델에서 기존의 방법과 제안된 방법의 결과중 과감쇠 모델의 경우를 주파수 응답함수로 그림 4에 나타내었다. 표 3에서는 고유진동수와 고유모드를 변경할 때 감쇠비( $\zeta$ )가 증가함에 따라 기존의 방법보다는 감쇠를 고려한 제안하는 방법이 오차가 적음을 보여준다. 또 극과감쇠 모델( $\zeta_c = 9.578\%$ )에서 기존의 방법은 원하는 목적이 아닌 다른값으로 발산하여 오차가 커짐을 알 수 있다. 실험으로 구조변경을 할 때 민감도의 계산에서는 각 반복(iteration)마다 고유치 해석을 할 수 없으므로 변경된  $\omega$ 와  $\phi$ 가 바뀌어 들어가지 않고 오직 원하는 목적함수인  $\omega$ 나  $\phi$  하나만이 바뀌어 들어가므로 전체적인 오차가 수치 실험에 비해서 큰 것을 확인할 수 있다. 그러므로 실제 실험에서 구조변경을 할 때에는 이런 영향을 고려한 보정항의 개발이 필요하다.

### 5. 결론

본 논문에서는 모드 모델을 이용한 구조 동특성 변경법 중 감쇠를 고려한 방법을 제안하고, 수치 실험과 실험을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 민감도 해석에 의한 시스템의 구조변경을 감쇠를 고려하여 수행할 수 있는 방법을 개발하였다.
- 2) 감쇠를 고려하지 않은 방법과 비교한 결과 제안하는 방법이 감쇠비( $\zeta$ )가 증가함에 따라 더 좋은 결과를 제시하였다.
- 3) 감쇠를 고려한 방법은 감쇠비( $\zeta$ )를 원하는 특성치로 변경하는 것이 가능하다.

### 참고 문헌

1. Fox,R.L. & Kapoor,M.P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA Journal, Vol.6, No.12, pp2426-2429
2. Roger,L.C., 1970, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA Journal, Vol.8, No. 5, pp 943-944
3. Nelson,R.B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives" AIAA Journal, Vol. 14, No.9 pp 1201-1205
4. Chou,Y.F. & Chen,J.S., 1985, "Structural Dynamics Modification via Sensitivity Analysis", IMAC III, pp483-489
5. Kuang,J.H. & Chen,L.S., 1986, "A Sensitivity Analysis on the Eigensolutions of Linearly Damped System", IMAC IV, pp572-578
6. Ju,J. & Xu,Z., 1989, "The Multi-Terms Sensitivity Analysis of Structural Modification" IMAC VII, pp584-588
7. Heo,J.H. 1991, "Eigensensitivity Synthesis and its Application to Structural Dynamics Modification" Ph. Doctor Dissertation, Univ. of Northwestern,
8. Adelman,H.M., & Haftka,R.T., 1986, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural System" AIAA Journal Vol.24 No.5, pp823-832
9. 長松昭男, 1985, "モード解析" 培風館,
10. Ewins,D.J, 1986, " Modal Testing : Theory and Practice " Research Studies Press LTD.,
11. Cook,R.D., 1981, " Concepts and Application of Finite Element Analysis ", 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc.,

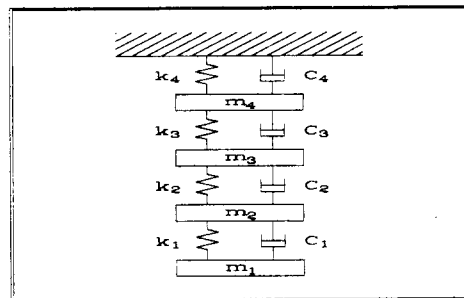
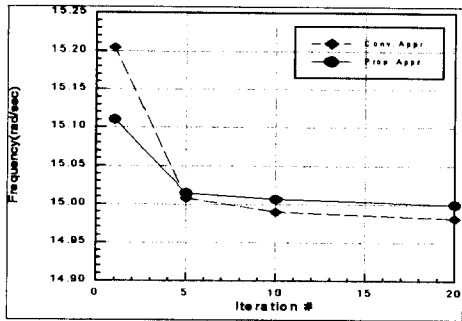
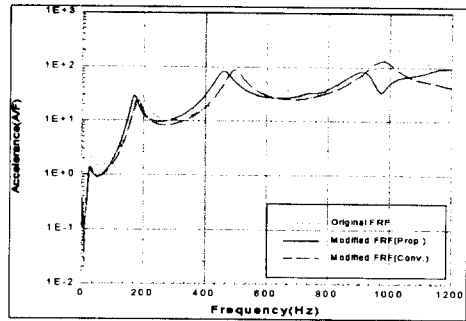


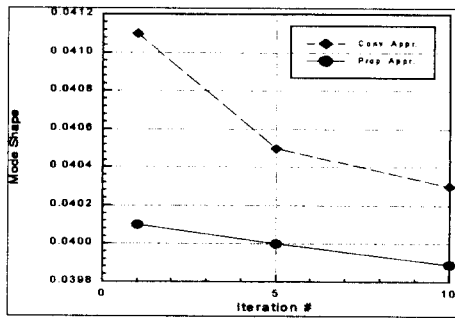
Fig.1. 4 DOF discrete system



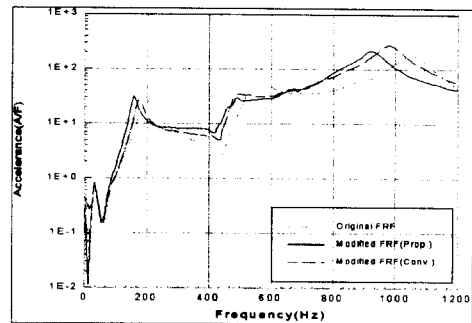
(a) Modification of mass



(a) Natural frequencies



(b) Modification of Stiffness



(b) Mode shapes

Fig.2. Comparison of natural frequencies of large damped model

Fig.4. Comparison of frequency response functions

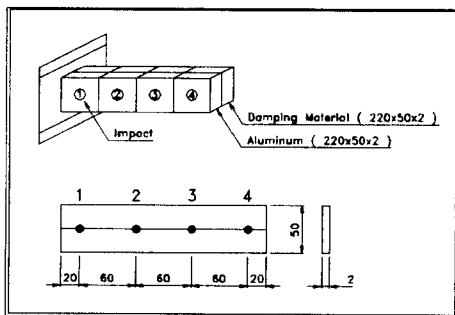


Fig.3. Cantilever beam model

Table 1. Damping coefficient ( Unit : N·s/m)

	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
C1	2	8	14	24
C2	4	16	28	48
C3	6	24	42	72
C4	8	32	56	96

- Ⓐ : light damping model
- Ⓑ : medium damping model
- Ⓒ : large damping model
- Ⓓ : heavy damping model

Table 2. Results of numerical simulation for the large damping model ( $\zeta_1 = 11.632\%$ )

(a) Modification of natural frequency  
( $\omega_1 : 13.2033 \rightarrow 15$ )

		compared method		suggested method		Error Rate
		$\omega_1$	error (%)	$\omega_1$	error (%)	
m <sub>1</sub>	1 iter.	15.2044	1.36267	15.1103	0.7353	0.5396
	5 iter.	15.0078	0.052	15.0148	0.09867	1.8975
	10 iter.	14.99	0.067	15.007	0.0467	0.697
c <sub>2</sub>	1 iter.			14.4608	3.5947	
	5 iter.			14.4722	3.5187	
	10 iter.			14.4893	3.262	
k <sub>2</sub>	1 iter.	14.111	5.9267	14.1267	5.822	0.98233
	5 iter.	14.4804	3.464	14.5712	2.85866	0.82525
	10 iter.	14.68	2.133	14.71	1.933	0.906235

(b) Modification of mode shape  
( $\phi_2^2 : 0.081 \rightarrow 0$ )

		compared method		suggested method		error rate
		$\phi_2^2$	error (%)	$\phi_2^2$	error (%)	
m <sub>1</sub>	1 iter.	0.00511	6.273	0.00507	6.220	0.9917
	5 iter.	0.004252	5.219	0.0041	5.030	0.9638
	10 iter.	0.005189	6.369	0.00391	4.797	0.75315
c <sub>1</sub>	1 iter.			0.0998	122.5	
	5 iter.			0.09937	121.9	
	10 iter.			0.09859	121.0	
k <sub>1</sub>	1 iter.	0.0411	50.45	0.0401	49.22	0.97567
	5 iter.	0.0405	49.71	0.04	49.10	0.98765
	10 iter.	0.0403	49.47	0.03989	48.94	0.98934

Table 3. Results of experiment

	design variable	existing method		suggested method		
		result	error (%)	result	error (%)	
Ⓐ ( $\zeta_1=1.828$ )	R.S( $\omega_1$ ) 29.015→25 (Hz)	m <sub>4</sub>	25.057	0.228	24.969	0.124
	M.S.C. ( $\phi_2^3$ ) 1.43→0	m <sub>2</sub>	0.0722		0.0695	
Ⓑ ( $\zeta_1=4.7205$ )	R.S( $\omega_1$ ) 26.388→23 (Hz)	m <sub>4</sub>	23.206	0.896	23.140	0.608
	M.S.C. ( $\phi_2^3$ ) 1.35→1	m <sub>2</sub>	1.10	10	1.06	6
Ⓒ ( $\zeta_1=7.174$ )	R.S( $\omega_1$ ) 29.553→26 (Hz)	m <sub>4</sub>	26.967	3.72	26.543	2.088
	M.S.C. ( $\phi_2^3$ ) 1.90→1	m <sub>1</sub>	1.14	14	1.08	8
Ⓓ ( $\zeta_1=9.578$ )	R.S( $\omega_1$ ) 40.063→37 (Hz)	m <sub>4</sub>	35.276	4.66	37.765	2.068
	M.S.C. ( $\phi_2^3$ ) 0.82756→0.5	m <sub>2</sub>	0.7050	41.008	0.6068	21.368

R.S. : Resonance specification

M.S.C. : Mode shape change