

## 비선형 경계조건을 가진 봉의 공진응답을 위한 다중시간해의 타당성

°이 원 경\*, 여 명 환\*\*, 배 상 수\*\*

### Validity of the Multiple Scale Solution for a Resonance Response of a Bar with a Nonlinear Boundary Condition

Won Kyoung Lee, Myeong Hwan Yeo, Sang Su Bae

#### ABSTRACT

In order to examine the validity of an asymptotic solution obtained from the method of multiple scales, we investigate a third-order subharmonic resonance response of a bar constrained by a nonlinear spring to a harmonic excitation. The motion of the bar is governed by a linear partial differential equation with a nonlinear boundary condition. The nonlinear boundary value problem is solved by using the finite difference method. The numerical solution is compared with the asymptotic solution.

#### 1. 서론

구조물의 비선형진동해석을 위하여 그 동안 많은 해석방법이 사용되어 왔는데 다중시간법(method of multiple scale)도 그 중의 하나이다. 특정 매개변수  $\epsilon$ 이 충분히 작은 범위 내에서만 의미 있는 근사해를 준다고 알려진 다중시간법은, 그 해가 모든 시간에 걸쳐서 수렴함(uniform converge)을 보장한다는 장점 때문에 많은 비선형진동문제해석에 사용되어 왔다. 그러나  $\epsilon$ 이 얼마나 작아야 하는가에 대해선 특별한 기준이 없으므로, 설계자의 입장에서 해석결과에

전적으로 의존할 수는 없다는 것이다. 따라서 근사해의 타당성을 실험적 혹은 수치적으로 검증하는 일은 공학해석에서 중요한 과업인데 특히, 그 근사해가 설계자의 직관에 위배될 때에는 이러한 검증작업은 필수적이라고 할 수 있다.

구체적인 예를 들자면, Hadian과 Nayfeh<sup>(1)</sup>, Lee와 Kim<sup>(2)</sup>은 원판의 축대칭진동에서, Nayfeh와 Asfar<sup>(3)</sup>는 비선형경계조건을 가지는 봉의 진동에서, 진동수이탈변수(frequency detuning parameter)가 증가함에 따라 부공진응답(secondary resonance response)의 진폭이 계속 증가함을 보여주었는데 이 것은 물리적으로 명백히 타당성이 없는 결과이다. 또한 이탈변수가 증가하면 가진진동수가 증가하는데, 이렇게 가진진동수가 계속 증가하면 여러 고유진동수 중

\* 정희원, 영남대학교 기계공학부

\*\* 영남대학교 대학원 기계공학부

의 하나를 만나게 되어 부공진이 아니라 주공진(primary resonance)이 계의 응답을 지배하게 되며, 주공진 해석을 위해선 가진진폭의 크기에 대한 가정부터 부공진 해석의 경우와는 달라야 한다. 따라서 이탈변수가 어느 정도 이상이 되면 부공진 해석결과를 포기해야만 하는데, 결과의 타당성이 보장되는 이탈변수의 범위에 대해선 해석이 우리에게 알려 주는 게 없으므로 결국 근사해의 타당성을 검증하기 위해서는 실험적 또는 수치적 수단에 의존할 수밖에 없다는 것이다.

본 연구에서는, 구조물의 비선형강제진동해석을 통해 구해진 근사해의 타당성을 조사하기 위하여, 비선형경계조건을 가지고 길이방향으로 진동하는 봉을 선택하였다. 이 봉의 한 쪽은 고정되어 있으며 다른쪽의 자유단에는 조화가진력이 작용하는 한편 비선형스프링으로 구속되어 있다. 이러한 비선형경계치문제로 주어지는 구조동역학해석의 어려움은 선형화계의 고유함수가 비선형경계조건을 만족하지 않기 때문에, Galerkin 방법을 적용하기 위한 시도함수(trial function)로서 이 고유함수를 사용할 수가 없다는 점이다. 결국 시도함수로서 고유함수를 사용했을 때의 이점인, 고유함수의 직교성으로부터 생겨나는 수식의 간결함을 포기해야 한다. 즉, 이 문제에 Galerkin 방법을 직접 적용해서는, 비교적 간편하고도 물리적으로 의미가 있는 일반화좌표의 비자율상미분방정식을 유도하기가 쉽지 않다는 것이다. 따라서, 본 연구에서는 일반화좌표의 상미분방정식을 수치적분하여 해의 타당성을 조사한 Lee와 Kim<sup>(2)</sup>과는 달리, 선형편미분방정식과 비선형경계조건으로 주어지는 비선형경계치문제를 직접 수치적으로 풀기 위하여 유한차분법을 사용하였으며, 여기서 구한 수치해를 Nayfeh와 Asfar<sup>(3)</sup>의 근사해와 비교함으로써 이 근사해의 타당성을 조사하였다.

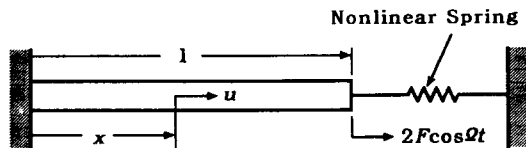


Fig. 1 A schematic diagram of a bar with a nonlinear boundary condition.

## 2. 봉의 운동방정식과 정상상태공진응답

우선 Fig. 1에서와 같이 봉과 스프링으로 구성된 계를 생각해 보자. 이 봉의 왼쪽 경계는 고정되어있고 오른쪽 자유단에는 조화가진력이 작용하는 한편 비선형스프링으로 구속되어 있다. 이 구조물계의 지배방정식은 다음과 같이 주어진다<sup>(3)</sup>.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\epsilon\mu(x) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

$$x=0 \text{ 에서 } u=0 \quad (2)$$

$$x=1 \text{ 에서 } -\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u + \epsilon u^3 = 2F \cos \Omega t \quad (3)$$

Nayfeh와 Asfar<sup>(3)</sup>는 다중시간법(method of multiple scales)을 사용하여 가진진동수  $\Omega$ 가 각 모드의 고유진동수  $\omega_n$ 의 3배에 가까운 경우 ( $\Omega = 3\omega_n + \epsilon\sigma$ , 여기서  $\sigma$ 는 이탈변수) 저조화공진(subharmonic resonance)응답에 의한 정상상태에서의 봉의 변형을 다음과 같이 구하였다.

$$u(x, t) = u_{sr}(x, t) + u_{nr}(x, t) + O(\epsilon) \quad (4)$$

$$u_{sr}(x, t) = a_n G(x, \omega_n) \cos\left(\frac{1}{3}\Omega t - \frac{1}{3}\gamma\right) \quad (5)$$

$$u_{nr}(x, t) = 2\Lambda G(x, \Omega) \cos \Omega t \quad (6)$$

여기서

$$G(x, \omega) = \frac{\sin \alpha x}{\sin \omega} \quad (7)$$

$$\Lambda = \frac{F \sin \Omega}{\Omega \cos \Omega + \alpha \sin \Omega} \quad (8)$$

고유진동수  $\omega_n$ 은  $\Lambda$ 의 극(pole)이므로 다음 특성방정식으로부터 주어진다.

$$\omega \cos \omega + \alpha \sin \omega = 0 \quad (9)$$

저조화공진변형  $u_{sr}$ 의 진폭  $a_n$ 은 다음의 자율상미분방정식

$$a_n' = -\mu_n a_n - \frac{3\Gamma_n \Lambda}{4\omega_n} a_n^2 \sin \gamma. \quad (10)$$

$$a_n \gamma' = \alpha a_n - \frac{9\Gamma_n}{8\omega_n} a_n^3 - \frac{9\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} a_n - \frac{9\Gamma_n}{4\omega_n} a_n \sum_{r \neq n}^{\infty} a_r^2 - \frac{9\Gamma_n \Lambda}{4\omega_n} a_n^2 \cos \gamma \quad (11)$$

$$\left( \text{여기서 } ' = \frac{d}{dT_1}, T_1 = \epsilon t \right)$$

의 정상상태 ( $a_n' = 0, \gamma' = 0$ )에서의 진폭이며, 이 미분방정식에서  $\mu_n$ 과  $\Gamma_n$ 은 다음 식에서 주어진다.

$$\mu_n = \Gamma_n (\sin^2 \omega_n)^{-1} \int_0^1 \mu(x) \sin^2 \omega_n x \, dx. \quad (12)$$

$$\Gamma_n = 4\omega_n \sin^2 \omega_n (2\omega_n - \sin 2\omega_n)^{-1}. \quad (13)$$

변형  $u_{sr}$ 은 고유진동수  $\omega_n$ 에 가까운 진동수와 고유진동양상(normal mode shape)  $G(x, \omega_n)$ 을 가진 3차의 저조화공진응답  $a_n, \gamma$ 에 기인하므로 저조화공진변형(subharmonic resonance deflection)이라고 부른다.  $\Omega/3 \approx \omega_n$ 이므로  $u_{sr}$ 은  $n$ 번째 고유모드진동과 흡사하다. 한편 변형  $u_{sr}$ 은 가진진동수  $\Omega$ 와 그에 해당하는 진동양상  $G(x, \Omega)$ 를 가진 응답으로서, 가진진동수  $\Omega$ 가 고유진동수  $\omega_n$ 의 근방에 있지 않기 때문에 개입된 응답이며  $\Lambda$  즉 비공진응답(nonresonance response)에 기인하므로 비공진변형(nonresonance deflection)이라고 부르기로 한다. 식 (10), (11)로부터, 이 계의 정상상태해 ( $a_n' = \gamma' = 0$ 의 해)는  $a_n = 0$ 인 해와  $a_n \neq 0$ 인 해 즉 두 종류의 해로 구성됨을 알 수 있다. 정상상태의 공진응답이  $a_n = 0$ 인 경우에는 바로 이 비

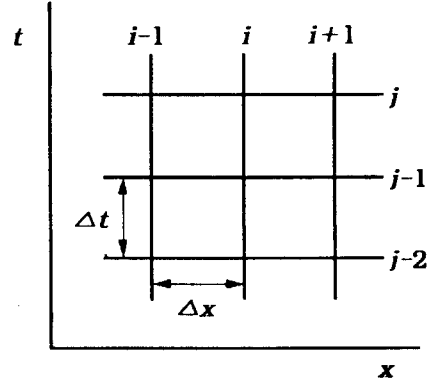


Fig. 2 A schematic diagram of a finite difference.

공진변형이 변형  $u(x, t)$ 가 된다. 달리 말하자면 이 비공진변형이 선형계에서 가진력의 진동수와 같은 진동수를 가지는 강제진동응답으로서 선형해석에서는 바로 이 변형을 얻게 된다.

### 3. 유한차분해석

유한차분법(finite difference method)<sup>(4~5)</sup>을 사용하여 이 경계치문제를 해석하기 위하여 Fig. 2에서와 같이 연속문제영역(continuous problem domain)을 유한차분격자(finite difference mesh)로 치환하여 유한수의 격자점(mesh points)에서의 값만을 고려하기로 한다.

식 (1)~(3)을 유한차분방정식으로 나타내기 위하여

$$u_i^j = u(x, t) = u(x_0 + i\Delta x, t_0 + j\Delta t). \quad (14)$$

$$x = x_0 + i\Delta x, (i=0, 1, 2, \dots, N). \quad (15)$$

$$t = t_0 + j\Delta t, (j=0, 1, 2, \dots, M) \quad (16)$$

로 두면, 연속영역  $x, t$ 는  $\Delta x \times \Delta t$ 의 사각형 격자에 의해 치환되고 격자점은  $(i, j)$ 에 의해 나타내어진다. 격자점  $(i, j-1)$ 은 격자점  $(i, j)$ 와  $(i, j-2)$ 의 중앙에 위치하므로 먼저 격자점  $(i, j)$ 와  $(i, j-2)$ 에 대해 Taylor 전개를 하면, 식 (17)~(18)이 된다.

$$u_i^j = u_i^{j-1} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^{j-1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^{j-1} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^{j-1} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_i^{j-1} + \dots \quad (17)$$

$$u_i^{j-2} = u_i^{j-1} - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^{j-1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^{j-1} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^{j-1} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_i^{j-1} + \dots \quad (18)$$

식 (17)에 식 (18)을 더하고 정리하면, 식 (1)의 우변의 첫 항은 다음과 같이 격자점  $(i, j-1)$ 에 관한 중앙차분(central difference)식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^{j-1} &= \frac{u_i^j - 2u_i^{j-1} + u_i^{j-2}}{(\Delta t)^2} \\ &\quad - \frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_i^{j-1} + \dots \\ &= \frac{u_i^j - 2u_i^{j-1} + u_i^{j-2}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

유사한 방법으로 식 (1)의 좌변의 차분표현은 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^{j-1} &= \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{(\Delta x)^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

식 (17)에서 식 (18)을 빼서 정리하면, 식 (1)의 우변의 둘째 항의 중앙차분식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^{j-1} &= \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{2\Delta t} - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^{j-1} + \dots \\ &= \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

식 (19)~(21)로부터 편미분방정식 (1)을 절단오차(truncation error)가  $\mathcal{O}(\Delta x)^2, (\Delta t)^2$ 인 차분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{(\Delta x)^2} &= \\ \frac{u_i^j - 2u_i^{j-1} + u_i^{j-2}}{(\Delta t)^2} + \frac{u_i^j - u_i^{j-2}}{2\Delta t}. \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, N-1, j=2, 3, \dots, M). \quad (22)$$

식 (3)에 대한 차분식을 얻기 위해서  $\partial u / \partial x$ 의 4점 후방차분식을 사용하였다. 이는 고정-자유단인 보의 자유진동(식 (1)~(3)에서  $\epsilon, \mu, \alpha, F$ 가 0인 경우)에 대한 벤치 테스트(bench test)에서  $\partial u / \partial x$ 의 차분표현으로 4점 후방차분식을 사용하여 신뢰할 만한 값을 얻었기 때문이다. 격자점  $(N-1, j), (N-2, j)$ 와  $(N-3, j)$ 에 대한 Taylor 전개는 식 (23)~(25)와 같다.

$$\begin{aligned} u_{N-1}^j &= u_N^j - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^j + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_N^j - \\ &\quad \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_N^j + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_N^j + \dots. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_{N-2}^j &= u_N^j - 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^j + \frac{(2\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_N^j - \\ &\quad \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_N^j + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_N^j + \dots. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_{N-3}^j &= u_N^j - 3\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^j + \frac{(3\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_N^j - \\ &\quad \frac{(3\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_N^j + \frac{(3\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_N^j + \dots. \end{aligned} \quad (25)$$

식 (23)과 (24)로부터  $\Delta x$ 을 소거하면 식 (26)이 된다.

$$\begin{aligned} u_{N-2}^j - 2u_{N-1}^j &= -u_N^j + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_N^j \\ &\quad - (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_N^j + \frac{7(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_N^j + \dots. \end{aligned} \quad (26)$$

식 (25)와 (26)으로부터  $(\Delta x)^2$ 항을 소거하고, 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^j &= \frac{11u_N^j - 18u_{N-1}^j + 9u_{N-2}^j - 2u_{N-3}^j}{6\Delta x} \\ &\quad - \frac{5(\Delta x)^3}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_N^j + \dots \\ &= \frac{11u_N^j - 18u_{N-1}^j + 9u_{N-2}^j - 2u_{N-3}^j}{6\Delta x} \\ &\quad + O[(\Delta x)^3]. \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 식 (2)~(3)에 대한 차분방정식은 식 (28)~(29)로 표현된다.

$$u_0^j = 0. \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{11u_N^j - 18u_{N-1}^j + 9u_{N-2}^j - 2u_{N-3}^j}{6\Delta x} \\ + au_N^j + \varepsilon(u_N^j)^3 = 2F \cos \Omega(t_0 + j\Delta t). \end{aligned} \quad (29)$$

결국 식 (1)~(3)의 편미분방정식은 식 (22), (28)과 (29)의 차분방정식으로 표현된다. 이상과 같이 차분된 방정식을 각 시간중분에 대하여 다음의 과정을 거쳐 수치해를 구하였다.

- 1) 식 (28), (29)에  $t$ 가  $t_0$ 일때의 초기 및 경계 조건을 대입한다.
- 2) 식 (22)에서  $u_i^j$ 에 관한 양해법(explicit method)<sup>(5)</sup>으로 처리하여  $i$ 가 1에서부터  $N-1$ 의 값을 직접 구할 수 있다.
- 3) 위의 과정 2)에서 구한  $u_i^j$  ( $i=1 \sim N-1$ )를 이용하여 식 (29)에 대입하여  $u_N^j$ 에 대한 값을 구한다.
- 4) 위의 과정 2), 3)을 계속적으로 반복하여, 구하고자 하는  $u_i^j$  ( $i=1 \sim N, j=1 \sim M$ )을 얻을 수 있다.

#### 4. 수치결과

수치예를 위하여 본 연구에서는  $n=1$ 인 경우 즉 가진진동수  $\Omega$ 가 첫 번째 고유진동수의 3배인 저조화공진( $\Omega \approx 3\omega_1$ )의 경우만을 고려하기로 한다. 선택한 매개변수의 값은  $(\varepsilon, \mu_1,$

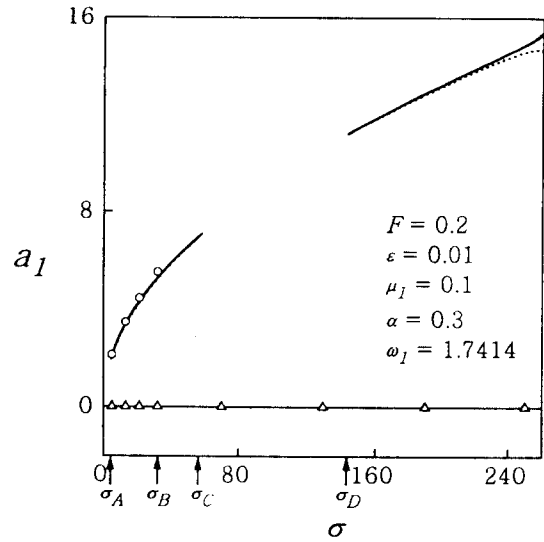


Fig. 3 Variation of the amplitude of subharmonic responses with the detuning parameter  $\sigma$ .

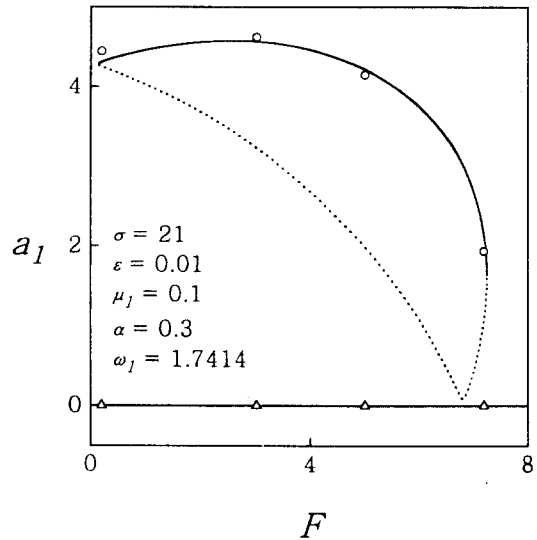


Fig. 4 Variation of the amplitude of subharmonic responses with the amplitude of the excitation  $F$ .

$\alpha = \{0.01, 0.1, 0.3\}$ 이며, 이 때 고유진동수는

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1.7414, 4.7751, 7.8920)$ 이다.

식 (10), (11)과 안정성 판별기준을 이용하여 정상상태응답의 진폭을 이탈변수  $\sigma$ 와 가진진폭  $F$ 의 함수로 Fig. 3과 4에 나타내었다. 여기서 실선과 점선은 각각 안정한 응답과 불안정한 응답을 나타낸다. 진폭이 0이 아닌 응답(nonzero-amplitude response)은 한 쌍이 존재하며, 이중 하나는 안정하고 다른 하나는 불안정하다. 진폭이 0인 응답(zero-amplitude response)은 안정하기 때문에 많게는 두 개의 안정한 응답이 존재할 수 있다. 이 경우 정상상태 응답은 전적으로 초기조건에 달려 있다. 이 두 그림에서  $\Delta$ 와  $\circ$ 는 유한차분법으로 구한 수치해로서 각각, 공진진폭이 0인 응답과 0이 아닌 응답을 나타낸다.

Fig. 3은 saddle node 분기 즉, 응답곡선의 기울기가 무한대가 되는 분기가 세 곳( $\sigma_A, \sigma_C, \sigma_D$ )에서 발견되고 있다. 진폭이 0인 응답 때문에 이 분기에서는 점프현상이 발생함을 말해 주고 있다. 또한, 이 그림의 결과는  $\sigma$ 가 증가함에 따라 진폭이 0이 아닌 응답의 진폭이 계속 증가함을 보여주는데 이 것은 물리적으로 명백히 타당성이 없는 결과임을 알 수 있다. 왜냐하면 이탈변수  $\sigma$ 가 증가함에 따라 가진진동수  $\Omega$ 가 증가하여  $\omega_3$  ( $\sigma = 266.8$ 에 해당)에 근접하게 되므로 저조화공진의 효과는 사라져야만 하기 때문이다. 미리 예상한 바와 마찬가지로, 유한차분법에 의한 수치해는 매우 제한된 영역( $\sigma_A < \sigma < \sigma_B$ )에서만 다중시간법에 의한 근사해가 타당성이 있음을 보여 주고 있다. 물론 제한된 이탈변수의 범위 내에서만 존재할 수 있다는 공진응답의 특징이 잘 알려져 있으므로, 이 근사해의 결점이 치명적이라고 할 수는 없겠지만 Lee와 Hsu<sup>(6)</sup>를 비롯한 많은 주공진연구에서, 다중시간법에 의한 근사해가 이탈변수의 제한된 영역에서만 공진응답이 존재함을 잘 예측한 점과는 크게 대조적이다.

Fig. 4는  $F$ 가 어느 값을 초과하면 가진진폭  $F$ 가 증가함에 따라 공진응답의 진폭이 감소함을 보여주고 있는데 이 현상은 이 계가 비선형제임을 감안하더라도 매우 특이한 현상이다. 즉 이 공진 응답  $a_1$ 의 거동은 식 (8)에서 알 수 있듯이  $A$ 가

$F$ 에 비례하는 비공진응답의 거동과는 판이한 것이다. Fig. 3과는 달리 이 그림에서는 근사해가 수치해와 잘 일치함을 보여 주고 있다.

Fig. 5와 6은  $\sigma=21$ 이고  $F=0.2$ 인 경우에  $x=1$ 에서의 정상상태변형의 시간이력(time history)을 보여주고 있는데 이들은 각각 공진진폭이 0이 아닌 응답과 0인 응답에 해당하는 것이다. Fig. 5(a)와 Fig. 6(a)는 서로 다른 초기조건을 사용하여 구한 수치해이며 이로부터 비공진 변형을 뺀 결과가 Fig. 5(b)와 Fig. 6(b)에 나타나 있다. 여기서  $G(x, \omega_1)=1$ 임을 고려하면 Fig. 5(b)와 Fig. 6(b)에 나타난 변형의 진폭은 근사해  $a_1$ 과 비교되는 진폭으로서 Fig. 3과 4의  $\Delta$ 와  $\circ$ 으로 각각 표시된다. 따라서 Fig. 3과 4의  $\Delta$ 와  $\circ$ 는 엄밀한 의미에서 수치해라기보단, 이들을 얻는 데 해석해의 일부(비공진 해)가 사용되었다는 측면에서 반수치해라고 할 수 있다.

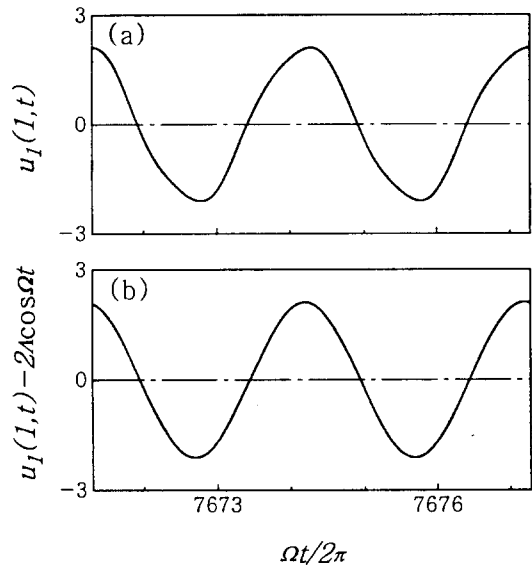


Fig. 5 Time histories corresponding to the steady-state stable deflection with nonzero resonance amplitude ( $\sigma=21, F=0.2, \epsilon=0.01, \mu_1=0.1, \alpha=0.3$  and  $\omega_1=1.7414$ ): (a) total deflection (b) resonance deflection.

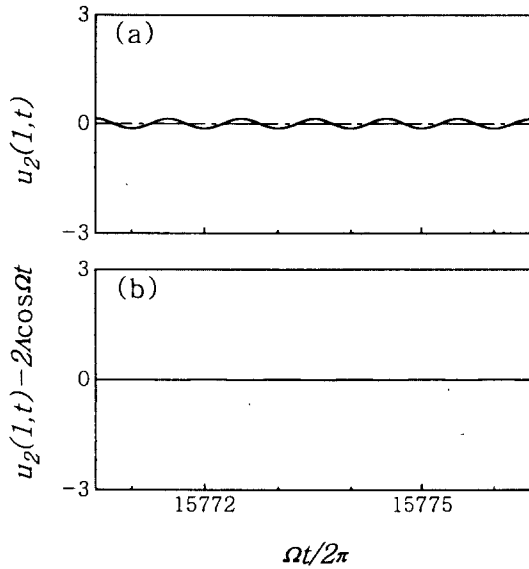


Fig. 6 Time histories corresponding to the steady-state stable deflection with zero resonance amplitude ( $\sigma=21$ ,  $F=0.2$ ,  $\epsilon=0.01$ ,  $\mu_1=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  and  $\omega_1=1.7414$ ): (a) total deflection (b) resonance deflection.

Fig. 5(b)와 Fig. 6(a)에 나타난 변형의 주기가 각각 가진주기의 3배와 1배임을 보여 주고 있는데, 이 점은 식 (5)와 (6)의 근사해가 진폭뿐만 아니라 진동수도 잘 예측하고 있음을 말해 주고 있다.

## 5. 결론

구조물의 부공진(副共振: secondary resonance) 응답을 위한 다중시간해의 타당성을 조사하기 위하여, 한쪽 경계는 고정되어 있고 다른쪽 경계에는 조화가진력이 작용하는 한편 비선형스프링으로 구속된 봉을 선택하였다. 선형편미분방정식과 비선형경계조건으로 주어지는 이 경계치문제의 다중시간해는 3차의 저조화공진 즉  $\Omega \approx 3\omega_n$  ( $\Omega$ 는 가진진동수,  $\omega_n$ 은 계의  $n$ 번째 고유진동수)인 경우, 이탈변수가 증가함에 따라 진폭이 계속 증가하는 공진응답이 존재함을 보여주었는데 유한차분법을 사용하여 이 경계치문제를 해

석한 결과, 이탈변수의 매우 제한된 영역에서만 이 근사해의 타당성이 있음을 확인하였다.

## 참고문헌

- (1) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interaction in Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, pp. 279-292.
- (2) Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 1015-1022.
- (3) Nayfeh, A. H. and Asfar, K. R., 1986, "Response of a Bar Constrained by a Nonlinear Spring to a Harmonic Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, pp. 1-15.
- (4) Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F., 1987, "The Finite Difference Method in Partial Differential Equations", *John Wiley & Sons*.
- (5) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", *McGRAW-HILL*.
- (6) Lee, W. K. and Hsu, C. S., 1994, "A Global Analysis of an Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 171, pp.335-359.