

점성댐퍼를 갖는 엔진 축계의 안정성 해석 및 비선형 비틀림강제진동

°박용남* · 하창우** · 김의간*** · 전효중***

A Study on the Stability Analysis and Non-linear Forced Torsional Vibration for the Engine Shafting System with Viscous Damper

Y.N. Park* · C.W. Ha** · U.K. Kim*** · H.J. Jeon***

ABSTRACT

The non-linear torsional vibrations of the propulsion shafting system with viscous damper are considered. The motion is modeled by non-linear differential equations of second order. The equivalent system is modeled by two mass softening system with Duffing's oscillator. The steady state response of a equivalent system is analyzed for primary resonance only. Harmonic balance method as a non-linear vibration analysis technique is used. Jump phenomena are explained. The primary unstable region obtained by the Mathieu equation is investigated. Both theoretical and measured results of the propulsion shafting system are compared with and evaluated. As a result of comparisons with both data, it was confirmed that Duffing's oscillator can be used as a analysis method in the modeling of the propulsion shafting system attached viscous damper with non-linear stiffness.

1. 서 론

중·고속엔진의 축계 비틀림진동은 크랭크축 선단에 점성댐퍼를 장착하여 제어하는 경우가 많다. 점성댐퍼는 댐퍼 케이싱과 관성링 사이의 좁은 틈에 고점도의 실리콘유가 충전된 구조로 되어 있으며, 운전중에는 관성링과 케이싱의 상대운동으로 실리콘유에 전단 저항력이 발생하여 비틀림 감쇠력이 증가하는 기능을 갖는다.¹⁾ 점성댐퍼를 갖는 엔진 축계를 등가진동계로 모델링할 때 일반적으로 점성댐퍼는 점성감쇠만 있다고 가정한다.

그러나, Iwamoto 등은 점성댐퍼 내의 실리콘유는 댐퍼 케이싱과 관성링의 상대속도에 비례한 감쇠력 외에 진동수가 높게 되면 위상지연을 가져와 변위에 비례하는 강성도 존재함을 보고하였다.²⁾ 이 연구에서 그는 실리콘유의 복소점도를 진동점도계로 측정하여, 감쇠력은 허수부인 탄성효과도 포함된 복소수 형태로 계산하는 것이 바람직하다고 보고하고 있다. 또한, 진동수가 높은 고속엔진에서 실리콘유의 동점도가 3.0×10^5 cSt 보다 큰 경우에는 복소감쇠의 실수부인 감쇠계수는 작아지고, 허수부인 변위 비례형 강성계수가 오히려 증가하여 탄성스프링에 가까운 특성을 갖는 것을 확인하였다.

Hayama도 점성댐퍼의 유체역학적 특성을 경계

* (사)한국선급 기관기술부

** 한국해양대학교 한나라호

*** 한국해양대학교 기계시스템공학부

층 이론으로 해석하여, 감쇠력을 가지며, 이에 따라 강성효과도 존재함을 보고하고 있다.³⁾ 그러나 이들의 연구는 점성댐퍼 자체의 특성에 관한 것이며, 점성댐퍼를 갖는 엔진 축계의 비틀림진동은 선형으로 해석하였다.

필자들이 점성댐퍼를 갖는 중·고속 엔진 축계의 비틀림진동을 측정하여 분석한 결과, 비선형 진동의 일종인 도약현상이 발생하고 있음을 확인하였다.(Fig. 5 참조) 이는 점성댐퍼가 Iwamoto와 Hayama가 보고한 것과 같이 각변위에 비례하는 강성계수 외에 각변위의 3승에 비례하는 비선형 강성도 함께 갖고 있어, 이 결과 Duffing진동계의 특성을 보이는 것으로 판단된다.

비선형 진동은 중첩의 원리가 적용되는 선형계와는 달리 운동방정식이 비선형 미분방정식으로 되므로, 이를 이론적으로 해석하는 데에는 어려움이 있다. 대개는 선형에 근거한 근사해법에 의존하는 것이 일반적이며, 조화균형법(harmonic balance method), 섭동법(perturbation method)이 주로 이용되고 있다.^{4,5)}

본 연구에서는 점성댐퍼를 갖는 엔진 축계를 2 질점계의 비선형 Duffing진동계로 모델링하여 비선형 운동방정식을 유도한다. 그리고 엔진 축계의 비선형 비틀림강제진동을 해석하기 위한 전산 프로그램을 개발하고, Mathieu 방정식을 이용하여 축계의 안정성을 해석한다. 또한 실제 엔진 축계의 비틀림진동을 측정하고 계산결과와 비교하여 본 연구에서 제안한 비선형 비틀림강제감쇠진동 해석법의 타당성을 확인하고자 한다.

2. 엔진 축계의 비선형 등가진동계

점성댐퍼(Fig. 1)를 부착한 엔진축계를 집중질량계로 모델링하면 Fig. 2와 같이 된다. Fig. 2에서 C^* 는 복소감쇠계수를 의미하며, Iwamoto의 연구결과를 적용하여 정리하면 식(1)과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 C^* &= K\mu^* = K(\mu' + \frac{G'}{j\omega}) \\
 &= K\mu' - j\frac{KG'}{\omega} = c - j\frac{k_d}{\omega} \\
 \mu^* &: \text{복소점도}, \omega : \text{각속도}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

복소점도 μ^* 는 실리콘유 동적특성에 의한 동적 절대점성계수 μ' 와 동적 전단탄성계수 G' 로

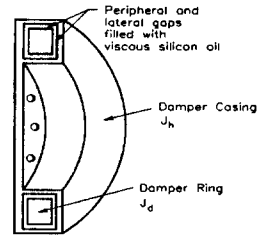


Fig. 1 Sectional assembly of viscous damper

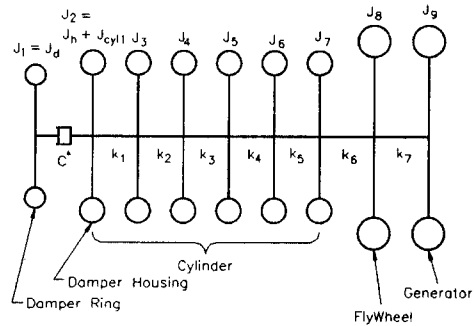


Fig. 2 Equivalent mass system for propulsion shafting.

이루어지며 온도 및 진동수의 영향을 받는다. K 는 점성댐퍼의 크기에 의하여 정하여지는 값이다.

식(1)에서 c 는 복소감쇠의 실수부로 감쇠계수를, k_d 는 허수부로 점성댐퍼의 강성계수를 나타낸다.

점성댐퍼를 갖는 엔진 축계의 비틀림진동을 측정된 결과, 비선형 진동현상의 일종인 도약현상이 발생하고 있음을 확인하였다. 이는 식(1)의 복소감쇠의 허수부인 강성계수가 Iwamoto의 식(1)에 의한 선형 강성계수 k_d 외에 각변위의 3승에 비례하는 비선형 강성계수 β 도 함께 갖고 있는 것을 의미한다. 즉, 실리콘유의 점도가 높은 점성댐퍼를 갖는 축계의 비틀림진동은 Duffing진동계를 적용하여 해석하는 것이 바람직함을 알 수 있다.

따라서, 비선형 복원력은 식(2)와 같이 각변위에 비례하는 선형 복원력과 각변위의 3승에 비례하는 비선형 복원력의 합으로 나타낼 수 있다.

$$f(\phi_r) = k_d \phi_r + \beta \phi_r^3 \tag{2}$$

엔진 축계에서 크랭크축의 비틀림강성은 점성댐퍼의 비틀림강성보다 상당히 크므로, 1절 비틀림진동에 대해서는 크랭크축의 비틀림강성을 무시하고 등가 2질점계로 모델링하여도 해석 결과는 크게 차이가 없을 것으로 생각된다. 따라서 점성댐퍼에 대한 복원력을 식(2)로 가정하고 엔진 축계를 2질점 등가계로 모델링하면 Fig. 3과 같이 된다. 여기서 J_d 는 점성댐퍼 관성링의 관성모멘트를, J_e 는 엔진 전체의 관성모멘트를, T_0 는 엔진의 기진력을 의미한다.

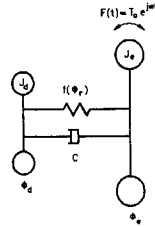


Fig. 3 Two mass system with non-linear torsional stiffness

3. 비선형 비틀림강제진동 해석

Fig. 3의 2질점계에 대한 비선형 운동방정식을 유도하면 식(3)과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} J_e \ddot{\phi}_e + c \dot{\phi}_r + k_d \phi_r + \beta \phi_r^3 &= T_0 e^{j\omega t} \\ J_d \ddot{\phi}_d - c \dot{\phi}_r - k_d \phi_r - \beta \phi_r^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\phi_r = (\phi_e - \phi_d)$$

이 식은 일반적인 선형 미분방정식에 비선형 비틀림강성계수 항인 $\beta \phi_r^3$ 이 추가된 비선형 미분방정식으로 된다. 식(3)의 해를 구하기 위하여 조화균형법을 적용하면, 식(4)와 같이 상대 각진폭 Φ_r 에 대한 6차방정식이 유도되며, 위상각 φ_r 은 식(5)와 같이 된다. 식(4)를 해석하면 불안정 영역에서는 Φ_r^2 에 관한 3개의 실근이, 안정 영역에서는 1개의 실근이 존재하게 된다. 이를 구별하는 판별계수 D 는 식(6)과 같이 유도된다.

$$\frac{9}{16} \beta^2 \Phi_r^6 + \frac{3}{2} \beta \left(-\frac{\omega^2 J_d J_e}{J_d + J_e} + k_d \right) \Phi_r^4 + \left\{ \left(-\frac{\omega^2 J_d J_e}{J_d + J_e} + k_d \right)^2 + \omega^2 c^2 \right\} \Phi_r^2 - \left(\frac{J_d}{J_d + J_e} \right)^2 T_0^2 = 0 \quad (4)$$

$$\varphi_r = \sin^{-1} \frac{\omega c \Phi_r}{\left(\frac{J_d}{J_d + J_e} \right) T_0} \quad (5)$$

$$D = \frac{1728}{531441 \beta^6} [243 \beta^2 J_d'^4 T_0^4 + 48 \beta J_d' T_0^2 (k_d - \omega^2 J') \{ (k_d - \omega^2 J')^2 + 9 \omega^2 c^2 \} + 64 \omega^2 c^2 \{ (k_d - \omega^2 J')^2 + \omega^2 c^2 \}^2] \quad (6)$$

$$J_d' = J_d / (J_d + J_e), \quad J' = J_d' J_e$$

또한, 엔진과 점성댐퍼 관성링의 각진폭 Φ_e , Φ_d 는 Φ_r 의 각 영역에 대하여 각각 식(7), (8)과 같이 된다.

$$\Phi_e = \frac{1}{J_e + J_d} \left\{ \frac{T_0}{-\omega^2} + J_d \Phi_r \right\} \quad (7)$$

$$\Phi_d = \frac{1}{J_e + J_d} \left\{ \frac{T_0}{-\omega^2} - J_d \Phi_r \right\} \quad (8)$$

이상의 결과로 부터 $\beta < 0$ 인 경우의 비선형 진동진폭 Φ_r 의 진동특성은 가진진동수 ω 를 0으로 부터 점차 증가시키면 Fig.4에서와 같이 1-2-3-3'-4로 되고, ω 를 점차 감소시키면 4-3'-2'-2-1의 곡선을 따르는 것을 알 수 있다. 즉 증속의 경우에는 3-3' 구간에서, 감속의 경우에는 2'-2 구간에서 도약현상이 발생하게 되므로, 2'-3 구간이 불안정한 영역으로 된다. $\beta > 0$ 인 경우에도 도약현상이 발생하는 불안정 영역은 존재하고 방향은 반대로 된다.

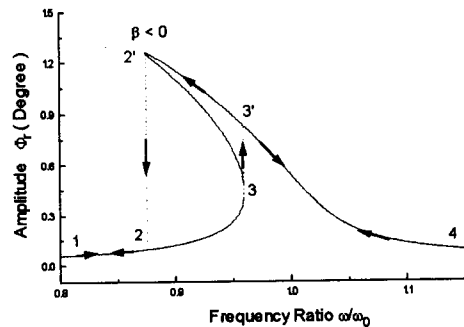


Fig. 4 Jump phenomenon of system with non-linear soft spring ($\beta < 0$).

4. 안정성 해석

식(3)의 기진력 $T_0 e^{j\omega t}$ 의 실수부를 취하고 주기 $\tau = \omega t$ 라 하여 정리하면 식(9)와 같이 된다.

$$\omega^2 J' + c\omega\phi_r' + k_d\phi_r + \beta\phi_r^3 = T_1 \cos \tau \quad (9)$$

여기서 ϕ_r', ϕ_r'' 는 ϕ_r 의 주기 τ 에 대한 1차 및 2차 도함수이며 $T_1 = T_0 J_d / (J_e + J_d)$ 이다.

해의 안정성을 구하기 위하여 ϕ_r 을 식(10)과 같이 나타내어 식(9)에 대입하면 변분방정식이 유도된다. 여기서 v 의 2차항 이상을 무시하면 식(11)과 같은 Mathieu 방정식이 된다.

$$\phi_r(\tau) = \Phi_r \cos \tau + v(\tau) \quad (10)$$

$$v'' + 2\zeta v' + (\delta + 2\epsilon \cos 2\tau)v = 0 \quad (11)$$

$$\zeta = \frac{c}{2J'\omega}, \quad \delta = \frac{2k_d + 3\beta\Phi_r^2}{2J'\omega^2}, \quad \epsilon = \frac{3\beta\Phi_r^2}{4J'\omega^2}$$

$\zeta = \epsilon\hat{\mu}$ 로 놓고, v 와 δ 를 식(12)와 같은 급수로 전개하여 ϵ^0, ϵ^1 항만을 고려하면 식(13), (14)와 같은 미분방정식이 유도된다.

$$v(\tau; \epsilon) = v_0(\tau) + \epsilon v_1(\tau) + \epsilon^2 v_2(\tau) + \dots$$

$$\delta = \delta_0 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \dots \quad (12)$$

$$\ddot{v}_0 + \delta_0 v_0 = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{v}_1 + \delta_0 v_1 = -(\delta_1 - 2\cos 2\tau)v_0 - 2\hat{\mu}\dot{v}_0 \quad (14)$$

식(13) 및 (14)에서 영년항(secular term)을 제거하고 δ 를 구하면 천이곡선에 대한 식(15)가 구하여지며, ϵ, δ 및 ζ 를 식(15)에 대입하면 식(16)과 같이 Φ_r 에 관한 4차식이 유도된다.

$$\delta = 1 \pm (\epsilon^2 - 4\zeta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$27\beta^2\Phi_r^4 + 48\beta(k_d - J'\omega^2)\Phi_r^2 + 16(k_d - J'\omega^2)^2 + 16c^2\omega^2 = 0 \quad (16)$$

이상과 같이 진동진폭 Φ_r 의 천이곡선을 구하면 계의 안정성을 구할 수 있다.

5. 실제 엔진축계에 대한 비선형 비틀림 진동 측정 및 해석

5.1 실제 엔진 축계의 비틀림진동 측정

점성댐퍼를 갖는 실제 엔진 축계의 비틀림진동 진폭을 점성댐퍼 케이싱에서 측정하였다. 대상엔진은 점성댐퍼외에는 비선형성이 거의 없는 발전기 원동기를 선정하였다. 엔진의 사양은 Table 1과 같다. 비틀림진동 측정은 FFT분석기(CF360), 비접촉식 비틀림진동메타(BK2335), 차수 트랙킹필터(CF0382) 등의 기기를 사용하였다.

측정에 사용한 엔진이 4행정 6기통이므로 주위협차수는 3차가 된다. Fig. 5에 점성댐퍼 케이싱에서 측정된 3차 비틀림 진동진폭을 보인다. 이 그림에서 점선은 엔진의 회전수를 증가시키면서, 실선은 회전수를 내리면서 측정된 결과이다.

이를 검토하여 보면 공진점 근처에 불안정영역이 존재하게 되며, Duffing진동계의 전형적인 특성인 도약현상이 1266~1304 rpm의 구간에서 확실하게 나타나고 있다. 또한, 엔진의 회전수를 내리면서 측정된 진동진폭이 회전수를 올리면서 측정된 값보다 약 1.5배 큰 것을 알 수 있다.

Table 1. Specification of engine

Type	4 Stroke cycle diesel engine
No. of cylinder	6
Stroke×Bore	165 mm × 137 mm
Output	367 PS × 1800 rpm
P _{mi}	12 bar
Conn. rod ratio	0.3
Rec. mass/Cyl.	5.4 kg
Firing order	1-5-3-6-2-4
Constant of damper	7.42 m ³

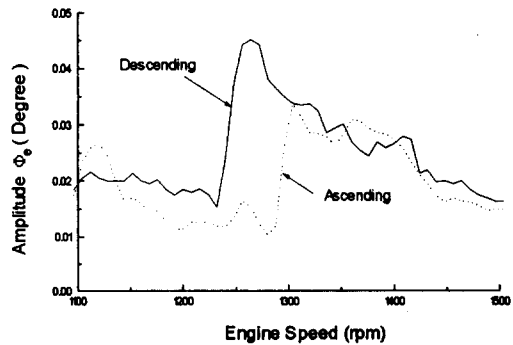


Fig. 5 Measured torsional amplitude on the damper casing (3rd order).

5.2 실제 엔진 축계의 모델링

실제 엔진 축계를 Fig. 3과 같이 모델링하여 비선형 비틀림강제진동을 해석하였다. 실제 엔진 축계 및 댐퍼링의 관성모멘트 J_e, J_d 는 각각 $6.747 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, 0.182 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 로 되며 등가관성모멘트 J' 는 $0.177 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 로 된다. Iwamoto의 연구결과를 적용하여 동적전단탄성계수 G' 를 구하면 $4.26 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ 로 되며, 댐퍼정수 K 는 7.42 m^3 로 된다. 이상의 결과를 식(1)에 대입하면 k_d 는 $0.317 \times 10^5 \text{ Nm/rad}$ 로 된다. 점성댐퍼의 실리콘유 동점도가 $6.0 \times 10^5 \text{ cSt}$ 로 상당히 높기 때문에 복소감쇠의 실수부인 감쇠계수 성분은 작게 되고 허수부인 강성계수가 증가하게 된다. 감쇠비 ζ 는 0.01로 취하였다. 비선형 강성계수 β 의 값은 이론적으로 유도하는 것이 곤란하여 측정결과로 추정하였다. 즉, Fig. 5의 측정된 진동진폭의 불안정영역구간에 대해 β 의 불안정 조건을 검토하여 β 값을 추정하였다. 본 엔진축계에서 불안정영역이 존재하는 β 값은 $-0.20596 \times 10^8 \text{ Nm/rad}^3$ 로 된다.

5.3 실제 엔진 축계의 안정성 해석

실제 엔진축계에 대해 안정성을 해석하였으며, 그 결과를 Fig. 6 및 Fig. 7에 보인다. Fig. 6은 앞에서 구한 값들을 식(16)에 대입하여 천이곡선을 구하고, 비틀림 진동진폭 ϕ_r 의 안정 및 불안정영역을 그린 것이다. 불안정 영역은 천이곡선을 경계로 하여 좌측 상부에 보이는 빗금친 부분이 된다.

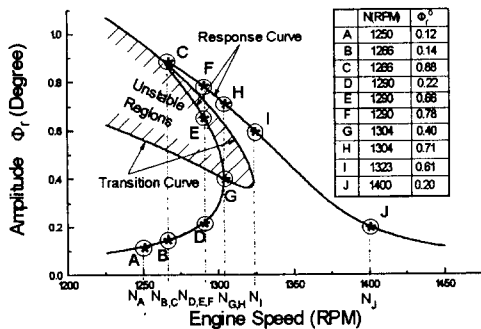


Fig. 6 Torsional amplitude and transition curve versus engine speed (3rd order).

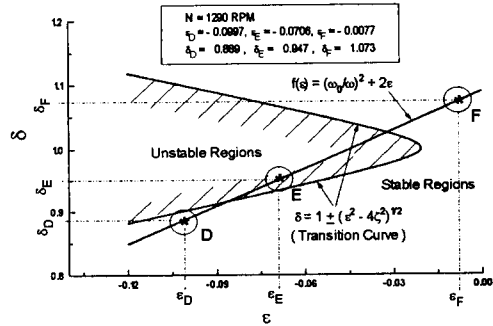


Fig. 7 Transition curve using Mathieu equation and $f(\epsilon)$ at 1290rpm.

불안정 영역내에 있는 E점의 엔진회전수 1290 rpm에 대한 진동진폭 D, E 및 F의 안정성을 평가하기 위하여, Mathieu방정식의 천이곡선과 (ϵ, δ) 평면에서의 $f(\epsilon)$ 의 관계를 계산하였으며, 이 결과를 Fig. 7에 보인다. 이를 검토하여 보면 D, F는 안정한 영역에 있고, E는 불안정한 영역에 있음을 알 수 있다. 즉 엔진회전수 1266 ~ 1304 rpm구간은 불안정 영역에 해당한다.

5.4 실제 엔진 축계에 대한 비선형 비틀림 진동 해석

이상의 결과를 실제의 엔진 축계에 적용하여 비선형 비틀림강제진동을 계산하였으며 이를 Fig. 8 ~ 10에 보인다. Fig. 8은 측정된 엔진의 주위험차수인 3차에 대한 상대진폭 ϕ_r 을, Fig. 9는 이에 대한 위상지연각 ϕ_r 을, Fig. 10은 엔진 전체의 진동진폭 ϕ_e 에 대하여 강제진동을 해석한 결과이다.

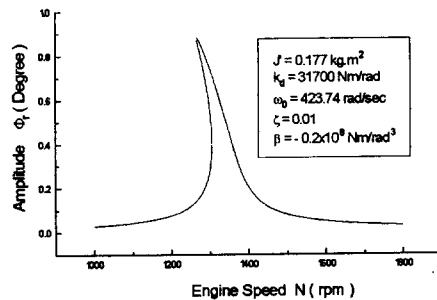


Fig. 8 Relative torsional amplitude ϕ_r versus engine speed (3rd order).

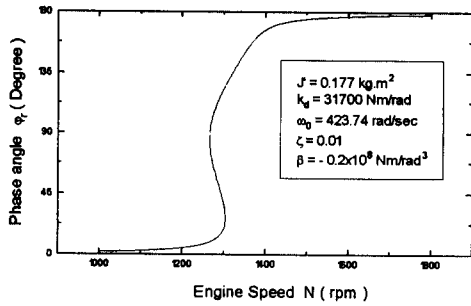


Fig. 9 Phase angle φ_r versus engine speed (3rd order).

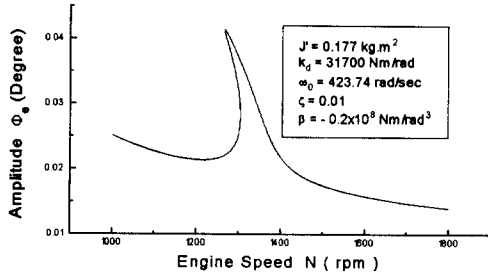


Fig. 10 Torsional amplitude ϕ_e on the free-end side of crankshaft versus engine speed (3rd order).

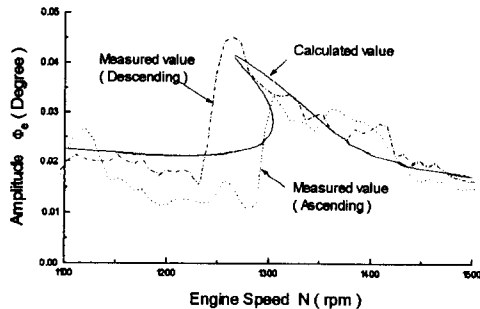


Fig. 11 Calculated and measured torsional amplitudes on the damper casing (3rd order).

이들 그림을 검토하여 보면 비선형 진동진폭은 선형 3차 위험회전수인 1346 rpm을 기점으로 좌측으로 구부러진 공진 특성을 보이고 있다. 위상곡선도 선형진동과 다른 양상을 보인다. Fig. 11에 점성댐퍼 케이싱에서 측정된 비틀림 진동진폭과 해석 결과를 보이며, 이들은 거의 일치하고 있다

6. 결 론

점성댐퍼가 장착된 엔진 축계를 2질점 Duffing 진동계로 모델링하여 비선형 비틀림강제진동과 안정성을 해석하였다. 또한, 본 연구에서 제안한 비선형 해석법을 실제 엔진 축계에 적용하고, 측정치와 비교하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 점성댐퍼의 내부에 충전된 실리콘유의 동점도가 3.0×10^5 cSt 이상이 되면, 점성댐퍼를 등가진동계로 치환할 때 감쇠계수와 강성계수를 함께 고려하여야 한다.
- (2) 엔진축계의 비틀림진동을 제어하기 위하여 고점도를 갖는 점성댐퍼를 채택한 결과, 이 축계의 비틀림진동은 Duffing진동계의 비선형특성인 도약현상이 발생하였다.
- (3) 비선형 2질점 비틀림진동계의 강제진동을 해석하였으며, 진동진폭이 불안정영역을 갖는 판별계수를 제안하였다.
- (4) Mathieu 방정식의 $\varepsilon - \delta$ 곡선과 천이곡선을 계산하여 엔진축계의 안정성을 해석하였다.
- (5) 비선형 강성계수 β 의 이론해석 및 다질점계에 대한 비선형 강제진동 해석법의 개발이 앞으로의 과제로 판단된다.

참 고 문 헌

1. 清水春樹, “ト-ショナルビスカスダンパ”, 内燃機關, 第30卷 第3號, 1991, 3, p.33.
2. 岩本昭一外 2人, “往復動内燃機關における粘性ねじり振動ダンパ作動油の設計計算法(續報)-ダンパ作動油粘度の選定法”, 設計製圖, 第19卷 第112號, 1984, 7, p.33.
3. 葉山眞治, “オイルダンパ内粘性力の振動數存在性について”, 日本船用機關學會誌, 第22卷 第8號, 1987, 8, p.59.
4. 棋木義一, “非線形振動論”, 共立出版(株), 1958.
5. B. RAVINDRA and A. K. MALLIK, “Stability Analysis of a nonlinearly damped Duffing Oscillator”, Journal of sound and vibration, 171(5), 1994, p708.