

조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 혼돈운동 연구

박철희* · 홍성철** · 김태정***

Chaotic Vibration of a Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow

Chul-Hui Pak, Sung-Chul Hong, Tae-Jung Kim

Abstract

In this paper, Chaotic motions of a curved pipe conveying oscillatory flow are theoretically investigated. The nonlinear partial differential equation of motion is derived by Newton's method. The transformed nonlinear ordinary differential equation is a type of Hill's equation, which have the parametric and external excitation. Bifurcation curves of chaotic motion of the piping systems are obtained by applying Melnikov's method. Poincaré maps numerically demonstrate theoretical results and show the transverse homoclinic orbit of the chaotic motion.

1. 서론

유체가 흐르는 파이프계에 대한 연구는 내부 유체가 일정한 유속으로 흐르는 경우와 맥동하는 경우에 대하여 안정성(stability) 및 매개변수 공진(parametric resonance)등이 주로 연구되어 왔다.

파이프 계의 비선형 거동에 대한 연구들은 최근에 와서 주로 직선파이프를 중심으로 이루어지고 있다. Päidoussis, Moon⁽¹⁻³⁾ 등은 외팔보 파이프계에서 주기배가(periodic doubling bifurcation)현상을 통하여 혼돈운동이 일어남을 수치해석과 실험을 통해 입증한 바 있으나, 혼돈운동의 존재를 이론적으로 완벽하게 증명하지는 못하였다.

한편 혼돈운동에 대하여, Melnikov⁽⁴⁾는 혼돈운동이 발생함을 증명할수 있는 호모클리닉 궤도교차(transverse homoclinic orbit)의 존재를 섭동법(perturbation method)으로서 유도하였는데, 이는 혼돈운동의 존재를 이론적으로 증명할수 있는 완벽한 방법으로 알려지고 있다. Yagasaki⁽⁵⁻⁶⁾는 매개변수가진(parametric excitation)과 외부가진(external excitation)을 받는 약비선형계를 모델로, 두 가진주파수가 고유진동수의

특정비(1:2)인 경우를 모델로 구성하여 Melnikov 방법을 사용함으로써 혼돈운동이 발생영역을 이론적으로 규명하였다. Pak⁽⁷⁾등은 조화진동유동을 하며 지지부에 가진을 받는 직선파이프계를 모델로 Yagasaki와 동일한 형태의 운동방정식을 유도하였고 고유진동수와 가진주파수들의 비가 일정하지 않는 일반적인 경우에도 혼돈운동이 존재함을 Melnikov방법에 의하여 증명하여 일반화된 혼돈운동의 존재영역을 밝혔다.

비선형을 고려한 기존의 연구들은 직선 파이프계를 모델로 수행되었으나, 실제 파이프계는 곡선파이프가 함께 구성되고 있다. 따라서, 본 연구에서는 일정한 곡률을 갖는 곡선 파이프에 맥동유체가 흐르는 파이프계를 모델로 비선형 운동방정식을 유도하여 맥동유체에 의한 곡선파이프의 진동 구조를 이해하고, Melnikov 방법을 이용하여 호모클리닉 궤도의 존재 및 혼돈운동의 존재영역을 파악하여, 맥동유체가 흐르는 곡선파이프의 혼돈운동 양상을 연구하고자 한다.

2. 운동방정식

2.1 운동방정식의 유도

조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 운동방정식을 유도하기 위해 Fig.1과 같이 곡률반경이 R , 각도가 θ_0 , 파이프계를 모델링하였다.

* 정희원, 인하대학교 기계공학과

** 정희원, 한라공업전문대학 기계과

*** 인하대학교 기계공학과 대학원

$$\begin{aligned}
A_f &= \frac{D^2 r}{D t^2} \\
&\cong [(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial c \partial u}{\partial t \partial \theta} - \frac{2c \partial^2 u}{R \partial t \partial \theta} - \frac{c^2}{R}) \cos \theta \\
&\quad - (\frac{R-u}{R} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{2c \partial u}{R \partial t}) \sin \theta] \quad i \\
&+ [(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial c \partial u}{\partial t \partial \theta} - \frac{2c \partial^2 u}{R \partial t \partial \theta} - \frac{c^2}{R}) \sin \theta \\
&\quad + (\frac{R-u}{R} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{2c \partial u}{R \partial t}) \cos \theta] \quad j
\end{aligned} \quad (9)$$

파이프계의 미소요소를 Fig.4와 같이 파이프의 미소요소와 유체의 미소요소로 나누어 자유물체도를 도시할수 있다.

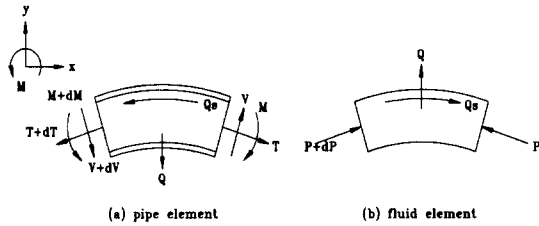


Fig.4 Free-body diagram

Fig.4에 도시한 각 요소의 평형방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s^*} (V+T) ds^* + Q + Q_s &= \rho_p A_p \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} ds^* \\
-\frac{\partial P}{\partial s^*} ds^* - Q - Q_s &= \rho_f A_f \frac{D^2 r}{D t^2} ds^*
\end{aligned} \quad (10)$$

여기서, V 는 전단력, T 는 인장력, P 는 압력(pressure force), Q 는 파이프와 유체의 상호작용력, Q_s 는 마찰력, A_p 는 파이프의 단면적, ρ_p 와 ρ_f 는 파이프와 유체의 밀도이다. 식(10)으로부터 Q 와 Q_s 를 소거하면

$$\frac{\partial}{\partial s} (V+T-P) = \rho_p A_p \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \rho_f A_f \frac{D^2 r}{D t^2} \quad (11)$$

가 된다. 식(11)의 각 항은 아래와 같이 근사식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
T &= (T_0 - EA_p \frac{ds^* - ds}{ds}) t \\
&\cong [-[T_0 - EA_p \frac{u}{R} - (T_0 - EA_p) \{ \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \\
&\quad + \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \}] \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- [T_0 (\frac{\partial u}{\partial s}) + (T_0 - EA_p) \{ \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^3 \}] \cos \theta] \quad i \\
&+ [[T_0 - EA_p \frac{u}{R} - (T_0 - EA_p) \{ \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \\
&\quad + \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \}] \cos \theta \\
&- [T_0 (\frac{\partial u}{\partial s}) + (T_0 - EA_p) \{ \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^3 \}] \sin \theta] \quad j
\end{aligned} \quad (12)$$

여기서 T_0 는 초기인장력이고, E 는 파이프의 탄성계수이다. 전단력 V 는와 압력 P 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
V &= -EI \frac{\partial}{\partial s} (\frac{ds^*}{ds} \kappa) \frac{ds}{ds^*} n \\
&\cong EI [[- \{ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \\
&\quad + \frac{3}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \} \sin \theta \\
&\quad + \{ \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{2u}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\
&\quad - 2 \frac{\partial u}{\partial s} (\frac{\partial^2 u}{\partial s^2})^2 - 2 (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \cos \theta \}] \quad i \\
&+ [\{ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \\
&\quad + \frac{3}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \} \cos \theta \\
&\quad + \{ \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{2u}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\
&\quad - 2 \frac{\partial u}{\partial s} (\frac{\partial^2 u}{\partial s^2})^2 - 2 (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \sin \theta \}] \quad j
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
P &= Pt \\
&\cong [- \{ 1 - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \} P \sin \theta \\
&\quad - \{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^3 P \cos \theta \}] \quad i \\
&+ [\{ 1 - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \} P \cos \theta \\
&\quad - \{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^3 P \sin \theta \}] \quad j
\end{aligned} \quad (14)$$

여기서 I 는 파이프의 단면2차 모멘트이다.

식(12), 식(13), 그리고 식(14)를 식(11)에 대입하여 소거한 후 고차항을 무시하면, 다음과 같은 내부유동을 포함한 비선형굽힘방정식이 얻어진다

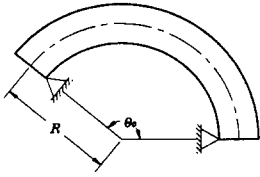


Fig.1 A curved model of a piping system.

주어진 파이프계의 운동방정식을 유도하는데 다음과 같은 가정을 하였다. 즉, 내부유체는 비압축성이고 유체의 속도분포는 단면에서 균일하며, 파이프는 평면내에서 그리고 반경방향으로만 운동을 하며, 회전관성 및 전단변형은 무시하고 파이프는 신장(extensible) 가능하다고 가정하였다.

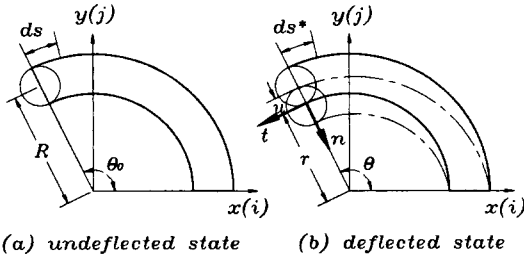


Fig.2 Definition of coordinates of a piping system

Fig.2는 변형전과 변형후의 형상을 나타낸다. 여기서 r 은 위치벡터이고, t 와 n 은 변형된 파이프의 위치 θ 에서의 접선과 법선 단위벡터 그리고 ds 와 ds^* 는 변형전과 변형후의 파이프의 미소요소의 길이이다. 이때, 위치벡터는 다음 식으로 표현된다.

$$r(s^*, t) = (R-u) \cos \theta \ i + (R-u) \sin \theta \ j \quad (1)$$

식(1)을 미분함으로써 단위 접선벡터 t 는 다음과 같이 얻어진다.

$$t = \frac{ds}{ds^*} \left[\left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} \cos \theta - \left(1 - \frac{u}{R}\right) \sin \theta \right\} i + \left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} \sin \theta + \left(1 - \frac{u}{R}\right) \cos \theta \right\} j \right] \quad (2)$$

식(2)에서 단위벡터 t 의 크기의 정의로부터 ds/ds^* 는 다음과 같이 근사적으로 유도된다.

$$\frac{ds}{ds^*} \cong 1 + \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{3u}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \quad (3)$$

따라서 접선 단위벡터의 근사식은 다음과 같다.

$$t \cong \left[\left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \cos \theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \sin \theta \right] i$$

$$+ \left[\left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \sin \theta + \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \cos \theta \right] j \quad (4)$$

또한, 곡률 κ 와 법선 단위벡터 n 은 r 을 2계 미분함으로써 곡률과 법선 단위벡터를 아래와 같이 구할수 있다.

$$\kappa \cong \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) + 2u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) - \frac{u}{2R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2 + \frac{u^2}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) - \frac{3R}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) \right\} \quad (5)$$

$$n \cong \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \sin \theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \cos \theta \right] i + \left[-\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \cos \theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \sin \theta \right] j \quad (6)$$

유체의 속도와 가속도를 구하기 위해 Fig.3과 같이 변형전과 변형후의 파이프의 내부를 흐르는 유체의 미소요소를 생각한다. Fig.3에서 c , c^* 와 A_f , A_f^* 는 각각 변형전과 변형후의 유체의 속도와 파이프 내부단면적이다.

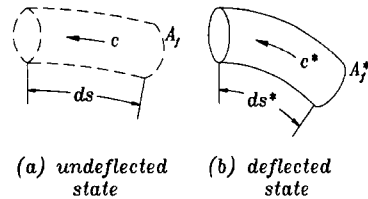


Fig.3 The fluid element

이때, 유체의 연속조건을 사용하면 파이프내의 유체속도는 다음 관계식을 갖는다.

$$c^* = \frac{A_f}{A_f^*} c = \frac{ds^*}{ds} c \quad (7)$$

유체의 속도 V_f 와 가속도 A_f 는 식(7)을 이용하여 얻는다.

$$V_f = \left[\left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \cos \theta - c \frac{(R-u)}{R} \sin \theta \right] i + \left[\left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \sin \theta + c \frac{(R-u)}{R} \cos \theta \right] j \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
EI \left\{ \frac{u''''}{R^4} + \frac{4u'u'''}{R^5} + \frac{2uu'''}{R^5} + \frac{3u''^2}{R^5} \right. \\
\left. - \frac{2u''^3}{R^6} - \frac{8u'u''u'''}{R^6} - \frac{2u'^2u'''}{R^6} \right\} \\
- (T_0 - P_0) \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) - (T_0 - P_0 - EA_p) \\
\times \left(\frac{u'^2}{2R^3} + \frac{uu''}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{u'^2u''}{R^4} \right) \\
= -(m_f + m_p) \ddot{u} \\
- m_f \left(c \frac{\dot{u}'}{R} + 2c \frac{\dot{u}}{R} + c^2 \frac{u''}{R^2} + \frac{c^2}{R} \right)
\end{aligned} \quad (15)$$

여기서, (')는 $d/d\theta$, (°)는 d/dt 를 나타내며, m_f , m_p 는 각각 유체 및 파이프의 단위 길이당 질량이다. 식(15)에 아래와 같은 Kelvin-Voigt 형태의 댐핑

$$E = E(1 + a \frac{\partial}{\partial t}) = E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \quad (16)$$

을 고려하여 대입하면 최종식이 얻어진다. 여기서, E^* 는 Ea 로 a 는 댐핑계수이다.

2.2 무차원 운동방정식

아래와 같이 소개된 무차원 변수

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \frac{u}{R}, \quad \zeta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}, \\
\bar{c} &= \sqrt{\frac{m_f}{EI}} Rc, \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}} \frac{t}{R^2}, \\
\Gamma_0 &= \frac{T_0 R^2}{EI}, \quad \Gamma_1 = \frac{EA_p R^2}{EI}, \quad \Gamma_2 = \frac{P_0 R^2}{EI}, \\
\bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}} \frac{a}{R^2}
\end{aligned}$$

를 사용하여, 각 변수의 영향을 살펴보기 위한 무차원화된 비선형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{u}''''}{\theta_0^4} + \frac{4\bar{u}'\bar{u}'''}{\theta_0^5} + \frac{2\bar{u}\bar{u}'''}{\theta_0^5} + \frac{3\bar{u}''^2}{\theta_0^5} \\
- \frac{2\bar{u}''^3}{\theta_0^6} - \frac{8\bar{u}'\bar{u}''\bar{u}'''}{\theta_0^6} + \bar{\sigma} \frac{\bar{u}''''}{\theta_0^4} \\
- \frac{2\bar{u}'^2\bar{u}''''}{\theta_0^6} - (\Gamma_0 - \Gamma_2) \left(1 + \frac{\bar{u}''}{\theta_0^2} \right) \\
- (\Gamma_0 - \Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{\bar{u}'^2}{2\theta_0^2} + \bar{u}\bar{u}'' - \frac{3}{2} \frac{\bar{u}'^2\bar{u}''}{\theta_0^4} \right) \\
= \ddot{\bar{u}} + \sqrt{\zeta} \left(\bar{c} \frac{\dot{\bar{u}'}}{\theta_0} - 2\bar{c} \frac{\dot{\bar{u}}}{\theta_0} - \bar{c}^2 \frac{\dot{\bar{u}''}}{\theta_0^2} - \bar{c}^2 \right)
\end{aligned} \quad (17)$$

2.3 Galerkin 방법과 Hill의 방정식

파이프계의 내부유동을 조화진동유동을 다루고 하므로 유속을 $\bar{c} = c_0(1 + \bar{\mu} \cos \Omega \tau)$ 라 가정한

다. 이때 c_0 는 평균유속이고 $\bar{\mu}$ 는 맥동유체의 진폭 비이며, $\bar{\mu} < 1$ 인 값이다. 또한 Ω 는 맥동유체의 진동수이다. 주어진 모델의 경계조건에 맞는 정규 모오드를 식(18)과 같이 가정하여 1차 모오드에 대하여 Galerkin 방법을 적용함으로써 상미분방정식을 얻는다.

$$\bar{u}(\bar{\theta}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\bar{\theta}) q(\tau), \quad \xi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi\bar{\theta}) \quad (18)$$

one mode approximation에 의하여 얻어진 비선형 상미분방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\ddot{q} + \delta \dot{q} + (w_0^2 - \bar{p}_1 \bar{\mu} \cos \Omega \tau) q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 \\
= \bar{\gamma} + \bar{p}_2 \bar{\mu} \cos \Omega \tau
\end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} &= \sigma \frac{\pi^4}{\theta_0^4}, \quad \bar{p}_1 = 2c_0^2 \frac{\pi^2}{\theta_0^2}, \quad \bar{p}_2 = 4\sqrt{2} \frac{c_0^2}{\pi} \\
w_0^2 &= \frac{\pi^4}{\theta_0^4} - \frac{\pi^2}{\theta_0^2} (c_0^2 - \Gamma_0 + \Gamma_2) \\
\alpha_2 &= 2\sqrt{2} \frac{\pi}{\theta_0^2} (\Gamma_1 - \Gamma_0 + \Gamma_2) - 8\sqrt{2} \frac{\pi^3}{\theta_0^4} \\
\alpha_3 &= \frac{3\pi^4}{4\theta_0^4} (\Gamma_1 - \Gamma_0 + \Gamma_2) - \frac{2\pi^6}{\theta_0^6} \\
\bar{\gamma} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (c_0^2 - \Gamma_0 + \Gamma_2)
\end{aligned}$$

이때, $0 < \varepsilon \ll 1$ 인 작은 매개변수 ε 을 생각하여, 식(19)에서 $\bar{\delta} = \varepsilon \delta$, $\bar{\mu} = \varepsilon \mu$ 라 하자. 또한 좌표를 $y = q + \alpha_2/3\alpha_3$ 로 치환하면, 다음과 같이 변형된 운동방정식이 된다.

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + \varepsilon \delta \dot{y} + (w^2 - \varepsilon \bar{p}_1 \mu \cos \Omega \tau) y + \alpha_3 y^3 \\
= \gamma + \varepsilon \bar{p}_2 \mu \cos \Omega \tau
\end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
w^2 &= w_0^2 - \frac{\alpha_2^2}{3\alpha_3^2}, \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 \frac{\alpha_2}{3\alpha_3} \\
\gamma &= \bar{\gamma} - \frac{2\alpha_2^3}{27\alpha_3^2} + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3} w_0^2
\end{aligned}$$

3. 고정점과 호모클리닉 궤도

3.1 고정점

식(20)의 변형된 운동방정식을 상태공간(state space)으로 표현하면,

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= u = v \\
\dot{v} &= -w^2 u - \alpha_3 u^3 + \gamma + \varepsilon \{ \mu (\bar{p}_1 u + \bar{p}_2) \cos \Omega \tau - \delta v \}
\end{aligned} \quad (21)$$

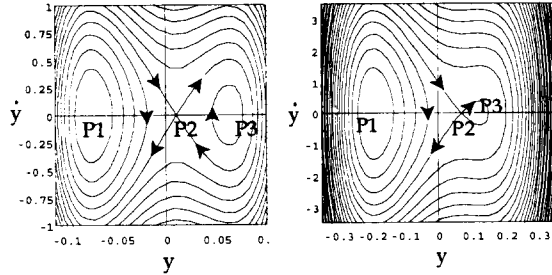
이 된다. 식(21)에서 $\epsilon = 0$ 이면 완전적분가능한 해밀턴계(integrable Hamiltonian system)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -w^2u - \alpha_3u^3 + \gamma \end{aligned} \quad (22)$$

이며, 이때 판별식 D 가 아래와 같은 조건

$$D = \left(\frac{w^2}{3\alpha_3}\right)^3 + \left(\frac{\gamma}{2\alpha_3}\right)^2 < 0$$

일 때, Fig.5와 같이 세 개의 고정점 $p(u,v)$ 가 존재한다.



(a) $\theta_0 = \pi/3, C_0 = 2.0, \Gamma_1 = 800$ (b) $\theta_0 = \pi/2, C_0 = 1.5, \Gamma_1 = 800$
Fig.5 Phase portrait of Eq.(22)

Fig.5 에서와 같이 $p_1(u_1, 0)$ 과 $p_3(u_3, 0)$ 는 중심(center)이고 $p_2(u_2, 0)$ 는 하이퍼볼릭안장점(hyperbolic-saddle)이며, 세 개의 고정점 $u_1, u_2, u_3 (u_1 < u_2 < u_3)$ 는 다음과 같은 3차방정식의 근이다.

$$\alpha_3u^3 + w^2u^2 - \gamma = 0 \quad (23)$$

식(22)의 해밀턴에너지(Hamiltonian energy)는 다음과 식으로 된다.

$$H(u, v) = \frac{\alpha_3}{4}u^3 + \frac{w^2}{2}u^2 - \gamma u + \frac{v^2}{2} \quad (24)$$

3.2 호모크리닉 궤도

안장점 $p_2(u_2, 0)$ 의 해밀턴에너지수위(energy level)는 식(24)로부터 다음으로 표시된다.

$$H(u_2, 0) \equiv H_0 \quad (25)$$

식(25)는 두 개의 호모크리닉 궤도 x_{c+}, x_{c-} 와 안장점 p_2 로 구성되고, 식(25)를 이용하여 식(22)를 적분하면 호모크리닉 궤도 $x_{c\pm}(\tau)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$u_{\pm}(\tau) = \pm \frac{2r_1r_2}{(r_1 - r_2)\cosh ar \pm (r_1 + r_2)} + u_2 \quad (26)$$

$$v_{\pm}(\tau) = \mp \frac{2ar_1r_2(r_1 - r_2)\sinh ar}{\{(r_1 - r_2)\cosh ar \pm (r_1 + r_2)\}^2}$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } r_1 &= -2u_2 + \sqrt{2k}, r_2 = -2u_2 + \sqrt{2k}, \\ a &= \sqrt{-\alpha_3r_1r_2/2}, k = -u_2^2 - w^2/\alpha_3 \end{aligned}$$

4. Melnikov 해석

4.1 Melnikov 이론

이 이론⁽⁴⁾은 특정한 계에서 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명할수 있는 방법으로 그 과정을 간략히 살펴보기로 한다. 이 방법은 아래의 가정을 포함하는 계에 대하여 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \epsilon g(x, t) \\ x &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \end{aligned} \quad (27)$$

이때, 식(27)에서 $\epsilon = 0$ 이면 식(27)은 해밀턴계

$$u = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad v = -\frac{\partial H}{\partial u} \quad (28)$$

가 되고 해밀턴계인 식(28)은 Fig.5와 같이 안장점 p_2 에 대한 호모크리닉 궤도 $x_{c\pm}(u_{\pm}(t), v_{\pm}(t))$ 를 갖는다.

이와같은 계에서 $\epsilon (> 0)$ 이 매우 작은 경우, 섭동된 안정매니폴드 $W^s(p_2^*)$ (stable manifold), 섭동된 불안정매니폴드 $W^u(p_2^*)$ (unstable manifold), 섭동된 안장점 p_2^* 은 비섭동된 안정매니폴드 $W^s(p_2)$, 비섭동된 불안정매니폴드 $W^u(p_2)$, 그리고 비섭동된 안장점 p_2 의 근방에서 존재하게 되고, 이때 $W^s(p_2^*)$ 와 $W^u(p_2^*)$ 의 거리함수 $d(t_0)$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$d_{\pm}(t_0) = \frac{\epsilon M_{\pm}(t_0)}{|f[x_{c\pm}(t_0)]|} + O(\epsilon^2) \quad (29)$$

분자항 $M_{\pm}(t_0)$ 를 Melnikov 함수라 부르며 다음식으로 정의 된다.

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f[x_{c\pm}(t)] \wedge g[x_{c\pm}(t), t + t_0] dt \quad (30)$$

여기서, $f \wedge g = f_1g_2 - f_2g_1$ 이다.

$M_{\pm}(t_0)$ 가 단순영(simple zero)이면 $d_{\pm}(t_0)$ 또한 단순영으로서, 이것은 $W^s(p_2^*)$ 와 $W^u(p_2^*)$ 가 교차함을 의미하고 이러한 궤도교차의 발생이 Smale - Birkoff 호모크리닉 이론에 따라 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명하게 된다.

4.2 Melnikov 함수

식(21)에 Melnikov 이론을 적용하여 Melnikov

함수를 구하면 다음과 같다.

$$M_{\pm}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\pm} [\bar{p}_1 \mu \cos \Omega(\tau + \tau_0) u_{\pm}(\tau) + p_2 \mu \cos \Omega(\tau + \tau_0) - \delta v_{\pm}(\tau)] d\tau \quad (31)$$

식(31)을 유수정리(residue theorem)를 이용하여 적분하면 Melnikov 함수는 다음과 같다.

$$M_{\pm}(\tau_0) = \pm \frac{4\mu\pi\Omega \sin(\Omega\tau_0)}{\sqrt{\alpha_3} \sinh(\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{\alpha_3\rho})}} (\pm M_1 - M_2) - \delta c_1^2 \frac{\sqrt{\alpha_3}}{8} M_3 \quad (32)$$

여기서,

$$c_1 = r_1 - r_2, \quad c_2 = r_1 + r_2, \quad \rho = \sqrt{-r_1 r_2}$$

$$\phi_0 = \cos^{-1}(c_2/c_1), \quad \phi_0^+ = \phi_0, \quad \phi_0^- = \pi - \phi_0,$$

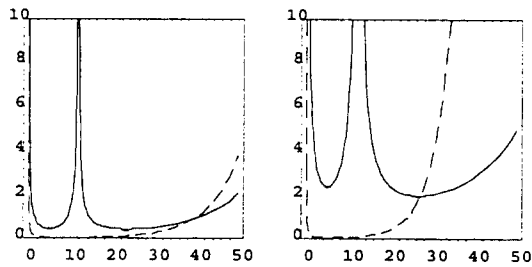
$$M_1 = \bar{p}_1 \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha_3}} \cosh(\frac{2\Omega\phi_0^+}{\sqrt{\alpha_3\rho}}), \quad M_2 = P_2 \sinh(\frac{2\Omega\phi_0^+}{\sqrt{\alpha_3\rho}})$$

$$M_3 = \frac{2\rho}{3} + (\frac{c_2}{c_1})^2 \mp c_2 \tan^{-1}(\frac{c_1 \mp c_2}{2\rho})$$

이때, Melnikov 함수가 단순영이 될 조건식은 다음과 같다.

$$\frac{\mu}{\delta} > \left| \frac{\alpha_3 c_1^2}{32\Omega\pi} \frac{M_3}{(\mp M_1 + M_2)} \sinh(\frac{2\Omega\pi}{\sqrt{\alpha_3\rho}}) \right| \quad (33)$$

Fig.5 (a), (b)와 같은 조건에서 조건식(33)의 영역을 $\Omega - \mu/\delta$ 평면상에 빗침자 (+)와 (-)를 각각 실선과 점선으로 그리면, Fig.6과 같은 혼돈운동이 존재하는 호모클리닉 분기곡선(homoclinic bifurcation diagram)을 $\Omega - \mu/\delta$ 평면상에서 얻을 수 있고 이 분기곡선의 위 영역에서 혼돈운동은 존재한다. Fig.6 에서와 같이 혼돈운동의 존재영역이 이론적으로 규명되었으므로 수치해석을 통하여 그 결과를 검증하고자 한다.

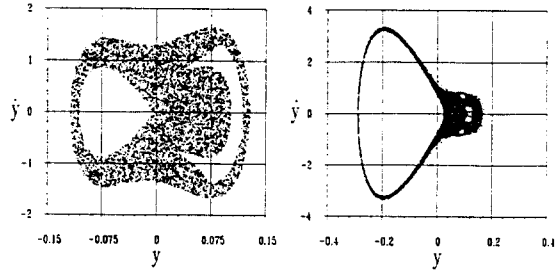


(a) $\theta_0 = \pi/3, C_0 = 2, \Gamma_1 = 800$ (b) $\theta_0 = \pi/2, C_0 = 1.5, \Gamma_1 = 800$

Fig.6 The homoclinic bifurcation diagram

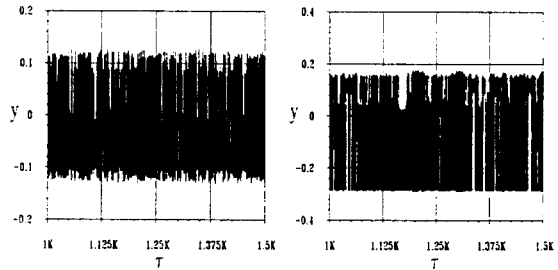
5. 수치해석

Fig.6의 조건에서 포앙카레 사상(Poincaré map)과 시간응답(time response)을 통하여 혼돈운동의 존재를 고찰하였다. 호모클리닉 분기곡선 상단영역에서 초기조건에 따라 여러 다른 주기해(periodic solution)를 볼 수 있으며, 호모클리닉 궤도교차를 Fig.7, Fig.8과 같이 포앙카레 사상과 시간응답에서 확인할 수 있었다.



(a) $\theta_0 = \pi/3, C_0 = 2.0, \Gamma_1 = 800, \mu = 0.4, \bar{\delta} = 0.001, \Omega = 13$ (b) $\theta_0 = \pi/2, C_0 = 1.5, \Gamma_1 = 800, \mu = 0.5, \bar{\delta} = 0.0001, \Omega = 25$

Fig.7 Poincaré map



(a) $\theta_0 = \pi/3, C_0 = 2.0, \Gamma_1 = 800, \mu = 0.4, \bar{\delta} = 0.001, \Omega = 13$ (b) $\theta_0 = \pi/2, C_0 = 1.5, \Gamma_1 = 800, \mu = 0.5, \bar{\delta} = 0.0001, \Omega = 25$

Fig.8 Time response

6. 결론

본 연구에서는 조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 혼돈운동에 대하여 연구되었다. 이 연구를 통하여 호모클리닉 궤도의 존재와, Melnikov 방법을 적용한 호모클리닉 궤도교차 및 혼돈운동의 존재영역을 이론적으로 규명할 수 있었으며, 수치해석을 통해 호모클리닉 궤도교차를 확인할 수 있었다.

본 연구의 결과는 곡선파이프계의 비선형거동, 혼돈운동 및 유체유발진동을 이해하므로써 파이프계를 구성하는 변수들의 설계범위를 제안할 수 있다.

후 기

본 연구는 1994년도 교육부 학술 연구조성비 (기계공학 : ME 94-D-09)에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- (1) Páidoussis, M. P. and F. C. Moon, 1988, "Nonlinear and Chaotic Fluid-Elastic Vibration of a Flexible Pipe Conveying Fluid", Journal of Fluid and Structures, Vol. 2, pp. 567~591.
- (2) Páidoussis, M. P., G. X. Li, and F. C. Moon, 1989, "Chaotic Oscillations of the Autonomous System of a Constrained Pipe Conveying Fluid", Journal of Sound and Vibration, Vol. 135, pp. 1~19.
- (3) Páidoussis, M. P., G. X. Li, and R. H. Rand, 1991, "Chaotic Motion of Constrained Pipe Conveying Fluid", Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 1~19.
- (4) Melnikov, V. K., 1963, "On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations," Trans. of the Moscow Mathematical Society, Vol.12, pp.1~56.
- (5) Yagasaki, K., M. Sakata, and K. Kimura, 1990, "Dynamics of a Weakly Nonlinear System subjected to Combined Parametric and External Excitation," Journal of Applied mechanics, Vol.57, pp.209~217.
- (6) Yagasaki, K., 1991, "Chaos in a Weakly Nonlinear Oscillator with Parametric and External Resonances," Journal of Applied mechanics, Vol.58, pp.244~250.
- (7) 박철휘, 홍성철, 정욱, 1996, "조화진동유동을 포함한 직선파이프계의 혼돈운동연구," 한국소음진동공학회, 제6권, 제2호, pp. 233~244.