

중동력을 받는 진동계의 케이오틱 거동 연구

이 재 영* · ○ 장 안 배**

Chaotic Response of a Double Pendulum Subjected to Follower Force

Jae-Yeong Lee and Ahn-Bae Jang

Key Words : Phase Space (위상공간), Attractor (끌개), Fourier-Spectrum (푸리에 스펙트럼), Strange-Attractor (기이한 끌개), Fractal (프랙탈), Equilibrium Point (평형점), Dynamic Buckling Loads(동적 좌굴 하중), Poincare map (포앵카 맵), Sensitivity to Initial Conditions (초기조건에 대한 민감성)

ABSTRACT

In this study, the dynamic instabilities of a nonlinear elastic system subjected to follower force are investigated. The two-degree-of-freedom double pendulum model with nonlinear geometry, cubic spring, and linear viscous damping is used for the study. The constant and periodic follower forces are considered.

The chaotic nature of the system is identified using the standard methods, such as time histories, phase portraits, and Poincare maps, etc.. The responses are chaotic and unpredictable due to the sensitivity to initial conditions. The sensitivities to parameters, such as geometric initial imperfections, magnitude of follower force, and viscous damping, etc. is analysed. The strange attractors in Poincare map have the self-similar fractal geometry. Dynamic buckling loads are computed for various parameters, where the loads are changed drastically for the small change of parameters.

1. 서론

대부분의 자연계 및 공학적 계들은 비선형계이므로 이들의 거동 또한 비선형으로 기술해야 하나, 일반적으로 비선형계의 해를 해석적으로 구하기가 불가능하므로 비선형 항들을 무시하거나, 선형화시켜 근사해를 구하는 방법들이 대신 사용되어져 왔다. 그러나 비선형계에서는 케이오틱 거동과 같은 선형계에서는 볼 수 없는 거동이 나타날 수 있기 때문에(1,2) 근사해법으로 구한 해가 비선형계의 거동을 정확하게 나타낸다고 볼 수 없다. 근대에 와

서 공학계에서의 케이오틱 거동을 해석하고자 하는 연구 및 실험들이 수행되고 있지만, “초기조건에 대한 민감성(sensitivity to initial conditions)” 등과 같은 케이오틱 거동의 특성들로 인해 계의 장기적 거동의 예측은 불가능하며 수치계산으로도 정확한 해를 구하기란 어려운 일이다(3). 실험장치 및 시편이 필연적으로 갖게 되는 초기불완전성(initial imperfection)으로 인해 실험을 통해서도 계의 정확한 거동을 예측하기란 불가능하다(4). 따라서 비선형계의 케이오틱 거동에 관한 연구는 거동의 특성 규명과 파라미터들에 대한 민감도 해석, 안정성에 관한 수치해석 등이 관심사가 되고 있다.

탄성계의 동적 거동해석에 관한 연구는 파라미터의 변화에 따른 좌굴하중 해석, 고유치 분석을 통

* 정회원, 군사과학기술원 무기공학과 교수

** 군사과학기술원 무기공학과

한 안정성 해석, 초기조건에 대한 민감도 해석 등이 주를 이루어 왔다. 비보존력이 작용하는 탄성계의 안정성에 관한 경우는 1960년 대에 Bolotin(5)에 의해 집약되었으며, 그 후 Wu, Leipholz(6) 등의 학자에 의해 많은 연구가 이루어져 왔다. 비보존종동력(nonconservative follower force)을 받는 탄성체의 안정성 해석은 좌굴 후(post-buckling) 불안정성에 관한 연구를 제외하고는 거의 선형계에 관한 연구들 이었다. 한편, 비선형 보존 탄성계의 동적 안정성 해석은 국내외의 많은 학자들에 의해 수행되었고, 비선형 비보존 탄성계의 안정성에 대한 연구는 Kounadis(7,8)에 의해 최근에 연구된 바 있다. Moon 등(2)은 일단 고정 탄성체에 자기력이 작용할 때의 케이오틱 거동을 연구하였으며 탄소성체의 케이오틱 거동에 대한 연구는 이재영, Symonds(3,9) 등이 에너지법을 사용하여 소성변형에 기인하는 케이오틱 거동을 규명하고 계의 거동을 예측하기 위한 연구를 수행한 바 있다. 하지만, 종동력을 받는 비선형 탄성계의 케이오틱 거동에 대한 본격적 연구는 시도된 바 없으므로, 본 연구에서는 기하학적,재료적 비선형성을 갖는 탄성계의 케이오틱 거동을 연구하기 위하여 2-자유도계 모델, 즉, 더블 펜듈럼에 일정 또는 주기적 형태의 종동력이 작용하는 경우의 거동을 연구하고자 한다. 이를 위해 Phase portrait, Poincare map, Fourier-spectrum, Time history 등과 같은 표준적인 방법들을 이용하여 케이오틱 거동을 규명하고 상공간에서의 동특성 연구와 초기조건에 대한 민감성 해석 및 계의 장기적 거동을 해석하고자 한다.

2. 이중 진자의 수학적 모델

끝단에 종동력이 작용하는 이중진자의 수학적 모델과 종동력의 형태가 Fig. 1에 각각 도시되어 있다. Fig.1(a)에서 모델은 각각 길이가 l 이고 각 봉의 끝에는 집중질량(lumped mass)이 있는 무게 없는 강체로 구성된 더블펜듈럼으로, 변형 전 수직선과 봉 BC, AB가 이루는 초기각도는 각각 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 이고 변형 후 각도는 각각 θ_1, θ_2 이다. 봉의 끝단 A에는 종동력이 작용하며 종동력의 작용방향은 $n\theta_2$ 이고 여기서, n 은 방향제어 상수이다. B와 C에 위치한 스프링은 3차 비선형 탄성 비틀림 스프링들로서 복원모멘트는 다음과 같다.

$$\text{Spring C : } \frac{M_C}{k} = z_1 + \delta_1 z_1^2 + \gamma_1 z_1^3$$

$$\text{Spring B : } \frac{M_B}{k} = (z_2 - z_1) + \delta_2(z_2 - z_1)^2 + \gamma_2(z_2 - z_1)^3 \quad (1)$$

여기서, $\theta_1 - \varepsilon_1 = z_1$, $\theta_2 - \varepsilon_2 = z_2$ 를 각각 나타내며 k 는 선형스프링 상수, δ_i 와 γ_i ($i=1,2$)는 각각 비선형 스프링 상수를 나타낸다.

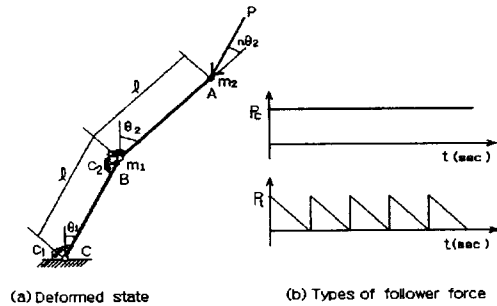


Fig. 1 Mathematical model of double pendulum

식(1)에서 γ_i 와 δ_i 의 값에 따라 계는 비선형 탄성 2, 3차 모델로 전환 가능하다. 즉, $\gamma_i=0$ 이고 δ_1, δ_2 모두가 '0' 이 아닌 경우의 계는 비선형 탄성 2차 모델이 되고 반대 경우는 비선형 탄성 3차 모델이 된다. C와 B에 위치한 감쇠는 선형 점성감쇠(linear viscous damping)로 각각 $c_1\dot{\theta}_1, c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ 이다. 계에 공급된 총 일을 W , 에너지 소산(energy-dissipation)을 D , 운동에너지와 탄성에너지를 각각 K, U 라 하면 계의 에너지 변화 δE 는 다음과 같다.

$$\delta E = \delta K + \delta U + \delta D - \delta W = 0 \quad (2)$$

여기에서, 운동에너지 K 는

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 [2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2] \end{aligned} \quad (2-1)$$

이며, 탄성에너지 U 는

$$\begin{aligned} \frac{U}{k} &= \int \left(\frac{M_C}{k} + \frac{M_B}{k} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{3} \delta_1 z_1^3 + \frac{1}{4} \gamma_1 z_1^4 + \frac{1}{2} (z_2 - z_1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \delta_2 (z_2 - z_1)^3 + \frac{1}{4} \gamma_2 (z_2 - z_1)^4 \quad (2-2) \end{aligned}$$

이다. 에너지소산 D 와 계에 공급된 총 일 W 는 각각

$$\begin{aligned} D &= \int [c_1 \dot{\theta}_1 + c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (2-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \int P ds = \int P v dt = \int_{t_1}^{t_2} (P_x v_x + P_y v_y) dt \\ &= p \int_{t_1}^{t_2} [\cos(1-n)\theta_2 (\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \\ &\quad - \sin(1-n)\theta_2 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)] dt \end{aligned}$$

이며, 여기서 $d\theta = \dot{\theta} dt$, $p = Pl/k$ 이다. (2-4)

운동방정식을 유도하기 위해 다음과 같은 Lagrange의 운동방정식을 이용한다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} = Q_i \quad (3)$$

여기서, $i=1,2$ 를 나타내며 Q_1 과 Q_2 는 각각

$$Q_1 = p \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2], \quad Q_2 = p \sin n\theta_2 \quad (4)$$

을 의미한다. 식 (2)와 (4)를 식(3)에 대입하면 $i=1$ 인 의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 I^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 I^2 [\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2)] + m_2 I^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \delta_1 z_1^2 \\ + \gamma_1 z_1^3 + z_1 - (z_2 - z_1) - \delta_2 (z_2 - z_1)^2 - \gamma_2 (z_2 - z_1)^3 \\ + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - p \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 무차원화 시키기 위해 다음과 같은 무차원 변수들을 사용하면

$$\theta(\tau) = \theta(\tau), \quad \tau = t \sqrt{\frac{k}{m_2 I^2}}, \quad \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau},$$

$$m = \frac{m_1}{m_2}, \quad \zeta_i = \frac{c_i}{N km_2}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\tau} \sqrt{\frac{k}{m_2 I^2}}$$

무차원화된 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (1+m) \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ - (z_2 - z_1) + z_1 + \delta_1 z_1^2 + \gamma_1 z_1^3 - \delta_2 (z_2 - z_1)^2 \\ - \gamma_2 (z_2 - z_1)^3 + (\zeta_1 + \zeta_2) \dot{\theta}_1 - \zeta_2 \dot{\theta}_2 \\ - p \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2] = 0 \quad (5-1) \end{aligned}$$

식 (3)에서 $i=2$ 인 경우는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} m_2 I^2 [\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + (z_2 - z_1) + \delta_2 (z_2 - z_1)^2 \\ + \gamma_2 (z_2 - z_1)^3 + \zeta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - p \sin n\theta_2 = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

다시 위의 식을 무차원화 시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (z_2 - z_1) \\ + \delta_2 (z_2 - z_1)^2 + \gamma_2 (z_2 - z_1)^3 + \zeta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \\ - p \sin n\theta_2 = 0 \quad (6-1) \end{aligned}$$

식 (5-1)과 (6-1)을 수치적분하여 계의 거동을 구하고자 한다. 그러나 구조동역학 문제에서 해가 안정적으로 수렴하기 위해서는 수치적분에 사용되는 시간증분은 $2/\omega_{\max}$ 보다 작아야 됨이 Belytschko 등(10)에 의해 연구된바 있다. 따라서 선형 자유진동계에 대한 운동방정식으로 부터 $m=2$ 에 대한 고유진동수를 구하면 ω_{\max} 는 1.8306으로 $2/\omega_{\max}$ 의 값은 1.0925로서 본 연구에서 사용된 시간증분 0.02 sec는 이 값보다 충분히 작은 값이다. 한편, Reinhall(11)등은 본래의 미분방정식이 케이오틱 거동을 포함하고 있지 않더라도 수치적분에 사용된 시간증분이 상대적으로 큰 경우에는 계가 케이오틱 거동을 나타낼수 있음을 연구하였으나, 본 연구에서 사용된 시간증분은 이러한 가능성을 배제하는 충분히 작은 값이다.

3. 일정한 종동력에 대한 거동 해석

본 절에서는 식(5-1)과 (6-1)에서 종동력의 크기가 일정하게 작용할 때 계에 발생할 수 있는 케이오틱 거동을 표준적인 방법을 통해 규명하고자 한다.

Table 1에는 종동력이 보존력으로 작용하는 경우 ($n=1$)에, 초기변위각(ϵ) 및 감쇠비(ζ)의 변화에 대한 동적좌굴하중(P_D)들이 계산되어 있다.

Table 1에서 알 수 있는 바와 같이 B점의 초기 변위각 ϵ_2 가 -0.034에서 -0.0342로 미소 변화함에

Table 1. Dynamic buckling loads for a system with $n=1, \gamma_i=0, \delta_1=-2.5, \delta_2=-0.75, m=2, \epsilon_1=0.05$

초기 변위 (ϵ_2)	동적좌굴하중 (P_c)			
	$\zeta=0.0$	$\zeta=0.0001$	$\zeta=0.001$	$\zeta=0.01$
-0.030	0.29147	0.29165	0.29264	0.30137
-0.031	0.29482	0.29495	0.29610	0.30576
-0.032	0.29839	0.29853	0.29981	0.31063
-0.034	0.30638	0.30657	0.30819	0.32264
-0.0342	0.83965	0.94969	1.06213	
-0.0345	0.83805	0.94900	1.06095	
-0.036	0.83011	0.94570	1.05509	

따라 동적좌굴하중이 급격히 변화하였다. 이는, 파라미터의 변화에 대한 계의 거동의 예측이 불가능함을 보여주고 있다.

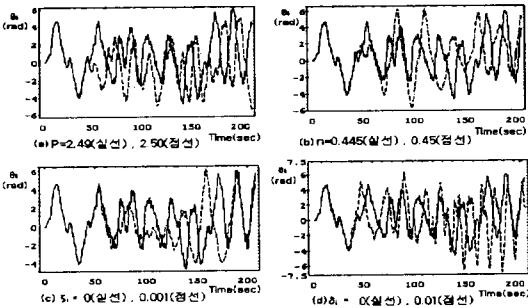


Fig. 2 Time histories for $P_c=2.49, \delta_i=\gamma_i=0, n=0.445, m=2, \epsilon_1=0.05, \epsilon_2=-0.03, \zeta_i=0$

파라미터의 변화에 대한 거동의 민감도를 보여주는 time history 들이 Fig. 2에 예시되어 있다. Fig 2(a)는 종동력 크기 F 의 미소변화, 2(b)는 방향제어상수 n 의 미소 변화, 2(c)는 감쇠비 ζ 의 미소변화, 2(d)는 2차 스프링 상수 δ 의 미소변화에 대한 time history들을 나타낸 것으로 파라미터의 미소 변화에 따라 시간이 경과함에 따라 전혀 다른 거동을 나타내며, 이는 케이오틱 거동의 특징인 초기조건에 대한 민감성을 나타낼 뿐만 아니라 거동의 불규칙적인 변화에 따른 계의 단기적, 장기적 거동의 비예측성을 나타내고 있다.

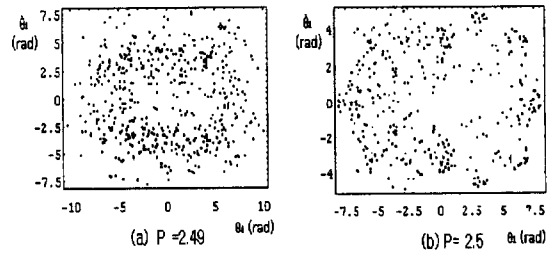


Fig. 3 Poincaré maps corresponding to Fig.2(a)

Fig. 3(a),(b)는 각각 Fig. 2(a)의 실선과 점선의 경우에 해당되는 Poincaré map으로서 그림에서과 같이 하중의 미소변화에 대해 Poincaré map은 서로 다른 프랙탈 구조를 갖고 있음을 알 수 있다.

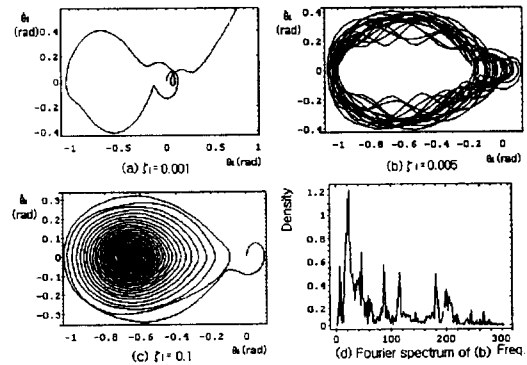


Fig. 4 Phase portraits and Fourier spectrum for conservative system ($n=1$) with $P_c=1.23, \delta_1=-2.5, \delta_2=-0.75, \gamma_i=0, m=2, \epsilon_1=0.05, \epsilon_2=-0.03$

Fig. 4는 감쇠비 ζ 의 변화에 대한 위상도(phase-portrait)의 변화를 나타낸 그림으로 4(a)는 $\zeta=0.001$ 인 경우로 1 cycle 후 발산을 하고 있으며, 4(b)는 $\zeta=0.005$ 인 경우로 복잡한 위상도를 나타내는데, 이는 거동이 케이오틱임을 나타낸다. Fig. 4(c)는 $\zeta=0.1$ 인 경우로 중앙의 평형점(equilibrium-point)으로 수렴하는데 이는 거동이 주기적임을 나타낸다. Fig. 4(d)는 4(b)에 대한 푸리에 스펙트럼으로 넓은 밴드의 주파수 영역은 거동이 케이오틱임을 나타낸다.

4. 주기적 종동력에 대한 거동 해석

본 절에서는 종동력 P_t 가 주기적으로 작용 할 때 계에 발생할 수 있는 케이오틱 거동에 대한 특성을 규명하고자 한다. 여기서 주기력의 형태는 Fig. 1(b)에 나타난 바와 같은 삼각하중 형태이며 작용 주기는 1 초로 하였다.

Table 2에는 주기적인 종동력이 보존력($n=1$)과 비보존력($n=0.8$)으로 작용하는 경우에, 초기변위 각(ε) 및 감쇠비(ζ)의 변화에 대한 동적좌굴하중(P_L)들이 계산되어 있다. Table 2에서 알 수 있는 바와 같이 $n=1$ 인 경우는 B점의 초기 변위각 ε_2 가 -0.037 에서 -0.0375 로, $n=0.8$ 인 경우는 ε_2 가 -0.039 에서 -0.0392 로 미소 변화됨에 따라 동적좌굴하중의 급격한 도약(jumping)이 나타나고 있다.

Table 2 Dynamic buckling loads for tri-step follower force with period '1', $\gamma_i=0$, $\varepsilon_1=0.05$, $\delta_1=-2.5$, $\delta_2=-0.75$, $m=2$, $n=1$, and values of parentheses are $n=0.8$

초기 변위 (ε_2)	동적좌굴하중 (P_L)				n	$\varepsilon_2=-0.03$ $\zeta=0.001$
	$\zeta=0$	$\zeta=0.001$	$\zeta=0.01$	n		
-0.031	0.57693	0.58656	0.62376	0.1	1.52933	
-0.033	0.59470	0.61911		0.3	1.07363	
		(0.65281)				
-0.035	0.61398	0.63735		0.5	0.82137	
-0.037	0.65420	0.66070		0.7	0.67950	
		(0.66915)				
-0.0375	1.02109	1.32832	1.89665	0.8	0.64133	
-0.039	1.00433	1.31721	1.89169	1.0	0.57908	
		(0.67783)				
-0.0392	1.00210	1.31574				
		(1.70168)				

이로 부터 파라메터의 변화에 대한 계의 거동의 예측 불가능성과 초기조건의 변화에 대한 민감성을 알 수 있다.

Fig. 5는 하중이 보존력($n=1$)으로 작용하는 경우에 파라메터들의 변화에 대한 거동의 민감성을 보여주기 위한 time history들로 4(a)는 종동력 P_t 의 미소변화, 5(b)는 방향제어상수 n 의 미소변화, 5(c)는 2차 스프링계수 δ 의 미소변화에 거동이다.

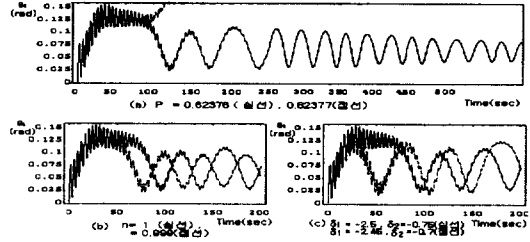


Fig. 5 Time histories for $P_t=0.62376$, $\gamma_i=0$, $m=2$, $n=1$, $\zeta_i=0.01$, $\delta_1=-2.5$, $\delta_2=-0.75$, $\varepsilon_1=0.05$, $\varepsilon_2=-0.031$,

Fig. 5(a)에서는 거동이 초기에는 케이오틱 거동을 나타내지만 시간이 경과함에 따라 감쇠에 의해 케이오틱 특성은 감소되고 주기적인 거동을 나타낸다. 한편 Table 2에서 나타난 바와 같이 $\zeta=0.01$, $\varepsilon_2=-0.031$ 인 경우의 동적좌굴하중은 0.62376이다. 여기서 하중의 크기가 $F=0.62376$ 에서 0.62377로 미소증가함에 따라 거동은 거동 초기에 발산하며 이는 초기조건의 미소변화에 대한 동적불안정성을 잘 나타내고 있다. Fig. 5(b)와 (c)에서도 파라메터들이 미소변화함에 따라 전혀 다른 거동을 나타냄을 알 수 있으며, 따라서 케이오틱 계의 초기조건에 대한 민감성과 장기적 거동의 예측 불가능성을 나타내고 있다.

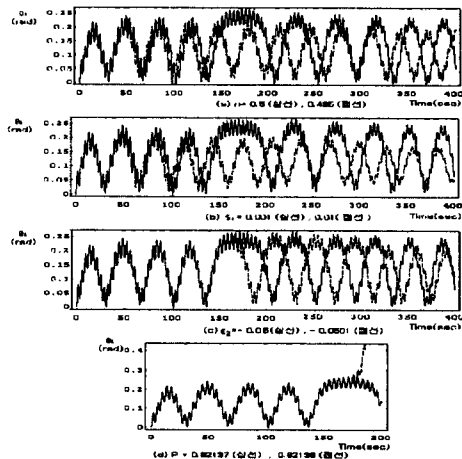


Fig. 6 Time histories for $P_t=0.82137$, $\gamma_i=0$, $m=2$, $n=0.5$, $\delta_1=-2.5$, $\delta_2=0.75$, $\varepsilon_1=0.05$, $\varepsilon_2=-0.03$, $\zeta_i=0.001$

Fig. 6은 하중이 비보존력($n=0.8$)으로 작용하는 경우로서 Figs. 6(a)~(d)는 각각 방향제어상수 n , 감쇠비 ξ , 초기 변위각 ε , 2차 스프링 상수 δ 의 미소변화에 대한 time history들이다. 여기서도 파라미터들이 미소변화함에 따라 시간에 대해 전혀 다른 거동을 나타냄을 알 수 있으며, 특히 Fig. 6(d)은 하중의 크기가 미소 증가함에 따라 거동이 발산하고 있음을 나타내고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 기하학적, 구조적 비선형성을 갖는 2자유도계 이중 진자에 종동력이 작용하는 경우의 케이오틱 거동을 연구하였다. 종동력은 크기가 일정하게 작용하는 경우와 주기적으로 작용하는 경우로 나누어 연구되었다. 식 (5-1)과 (6-1)에서 계는 $\gamma_i(z_2 - z_1)^3$, $\theta_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$, $\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ 등과 같은 비선형항을 갖고 있어 케이오틱 거동의 원인이 되고 있다.

크기가 일정한 종동력이 작용하는 경우, 기타의 파라미터들이 동일하다면 감쇠비가 크고 질량비가 작을수록 동적좌굴하중은 큰 값을 갖지만 급작스러운 도약(jumping)등은 거동의 예측을 불가능하게 했다. Poincare map, time history, phase portrait 등을 통하여 계의 케이오틱 특성을 규명하였으며, time history들을 통해 초기조건에 대한 민감성을 예시하였다. 한편 비보존계의 동적좌굴하중은 보존계의 경우보다 크게 나타났으나, 보존계의 경우와 마찬가지로 파라미터가 미소 변화함에 따라 동적좌굴하중이 급격히 변함을 알 수 있었다.

종동력이 주기적으로 작용하는 경우, 종동력이 일정하게 작용하는 경우와 마찬가지로 케이오틱 거동이 나타났으며 동적좌굴하중은 동일한 조건에서 일정 종동력이 작용하는 경우와 보존계의 경우보다 비보존계의 경우에 크게 나타났으며, 좌굴하중의 도약, 초기조건에 대한 민감성 등도 나타냄을 알 있다.

참고문헌

(1) Thompson, J.M.T., and Steward, H.B., Non-linear Dynamics and Chaos, John Willy & Sons, Chichester, 1986.

(2) Moon, F.C., Chaotic Vibrations, Wiley, New York, 1987.

(3) Lee, J-Y, Symonds, P.S., and Borino, G., Chaotic Response of a 2DOF Elastic-Plastic Beam Model to Short Pulse Loading, ASME J. of Applied Mechanics, pp. 711-721, 1992.

(4) Li, Q. M., and Yan, G.T., Experimental Results of "Counterintuitive Behavior" of Thin Clamped Beams Subjected to Projectile Impact, Int. J. of Impact Engineering, Vol. 11, pp. 341-348, 1991.

(5) Bolotin, V.V., Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, Oxford, 1963.

(6) Leipholz, H., Stability of Elastic Systems Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.

(7) Kounadis, A.N., Chaotic Phenomena in the Nonlinear Dynamic Stability of Discrete Damped or Undamped Systems under Step Loading, Int. J. of Nonlin. Mech., Vol. 26, pp. 301-311, 1991.

(8) Kounadis, A.N., Avraam, T., and Mallis, J., On the Reliability of Classical Divergence Instability Analyses of Ziegler's Nonconservative Model, Computer Methods in Appl. Mech. and Engng. 95, pp. 317-330, 1992.

(9) Symonds, P.S., and Lee, J-Y, Anomalous and Unpredictable Response to Short Pulse Loading, in Recent Advances in Impact Dynamics of Engineering Structure, ASME, New York, AMD-Vol. 105, pp. 31-38, 1989.

(10) Belytschko, T., Holmes, N. and Mullen, R., 1975, "Explicit Integration-Stability, Solution Properties, Cost," in Finite element Analysis of Transient Nonlinear Structural Behavior, ASME, New York, AMD-Vol. 14, pp. 1-22.

(11) Reinhall, P.G., Caughey, T.K. and Storti, D.W., Order and Chaos in a Discrete Duffing Oscillator: Implications on Numerical Integration, ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 56, pp. 162-166., 1989.