

원환판의 접수진동 해석에 대한 실험적 연구

한상보*, 꺾문규**, ⁰송장규, 김윤환***

Experimental Analysis of Vibration of Annular Plate in Contact with Water

Sangbo Han, Moon Kyu Kwak, Jang Kyu Song, Yun Hwan Kim

ABSTRACT

The natural frequencies of annular plates in contact with water were theoretically derived and its validity was checked by experiments. The experimental frequency response functions of the annular plates were obtained using the impact hammer method. Comparison of the FRF obtained using the impact hammer and the FRF using shaker attached showed that the former was better than the latter due to the mass effect and additional constraint from the instrumentation. It was found that the experimentally extracted natural frequencies of annular plates in contact with water were in good agreement with those of theoretical values.

1. 서론

기계 및 구조물의 진동 문제를 해결하기 위한 선행 지식으로서 구조 부재의 동역학적 특성에 대한 이해가 이루어져야 하는데, 일반적 구조 부재들의 진동학적 특성들은 거의 공기 중에서의 거동을 대상으로 하고 있다. 그러나, 기계 내부에 유체가 존재 하거나, 또는 유체 내부에서 작동하는 기계들의 진동 해석을 위하여는 구조 부재들이 접촉 또는 작동하고 있는 유체의 존재를 고려하여 특성을 파악하여야만 한다. 본 연구는 구조 부재가 유체 속에서 진동을 일으킬 때, 그 특성이 공기 중의 거동과 다르다는 사실을 바탕으로 기계 구조물에 흔히 사용되는 원형 판재가 물과 접촉하고 있을 경우 그 진동 특성, 특히 고유진동수의 값이 어떻게 변하는지를 정량적으로 파악해 보고자 한다.

접수 판재에 관한 기존의 연구들은 원판 외부가 대단히 단단한 벽이라는 경계조건에 대한 경우에 한정되어 있다. 이러한 이론적 연구의 결과는 물에 잠긴 원판 또는 자유로운 표면에 위치한 원판에는 적용되지 못한다. 왜냐하면 외부 경계조건이 단단한 벽이라는 조건과 다르기 때문이다. Kwak and Kim[1]은 이 문제에 주목하였고 Hankel 변환 기술을 사용함으로써 혼합된 경계 문제를 풀었다.

구멍 뚫린 원환판은 흔히 한쪽 또는 양면에 접수하는데 얇은 벽으로 된 구조물의 고유 진동수는 무거운 유체의 존재로 인해 크게 영향을 받는다. 그러므로 유체와 접촉한 원환판에 대한 연구는 실제적 관심거리이다. 우리가 알고 있는 이에 대한 연구는 Amabili and Frosali[2], Amabili[3]등에 기인하며 특히 물에 완전히 잠기거나 또는 유체 표면에 위치한 원환판의 고유 진동수를 계산하기에 편리한 실험적 계수가 Amabili[3]의 연구에 주어졌다.

최근 Kwak[4]는 한쪽면이 접수이고 무한 강체에 지지된 등글게 구멍뚫린 원환판의 자유 진동에

한상보* : 경남대학교 기계설계학과
꺾문규** : 동국대학교 기계공학과
⁰송장규 : 경남대학교 대학원
김윤환*** : 경남대학교 대학원

대한 연구에서 진공중에서의 판의 고유 진동수는 무차원 부가수 질량계수(non-dimensionalized added virtual mass incremental)인자와 가정된 모드 방법을 사용하여 접수 진동하는 판의 주파수에 관계됨을 알 수 있었다. 또한 자유 유체 표면에 위치한 원환판에 대한 NAVMI 인자는 축대칭 모드에 대해서는 Kwak and Kim[1]에 의해서, 모든 모드에 대해서는 Kwak[4]에 의해 계산되었으며, 또한 무한 강체벽의 원형 구멍에 위치한 원환판이 Hankel 변환의 특성을 사용한 Amabili and Kwak[5]에 의해 연구되었다.

본 논문에서는 이러한 인자들을 사용해서 도출된 이론치의 타당성을 검증하기 위하여 연강으로 제작된 실제 원환판의 접수 진동에 대한 실험을 통하여 이론적 결과의 타당치를 검증하고자 한다.

2. 이론적 배경

Fig. 1과 같이, 두께 h 이고 밀도 ρ_p , 내경 a_1 , 외경 a_2 인 얇은 원환판이 진공상태에서 진동한다고 하자. 또한 판은 탄성이며 균질하고 등방재질로 되어 있다고 가정하며 전단변형이나 회전관성은 무시한다. 판의 횡변위 w 에 대한 운동방정식[6]은

$$D\nabla^4 w + \rho_p h \partial^2 w / \partial t^2 = 0 \quad (1)$$

으로 주어지며 여기서 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 은 판의 굽힘강도이다. ν 와 E 는 포와송비와 영률이다. 또한, 극좌표 r, θ 에서의 라플라스 연산자는 다음식과 같이 주어 진다.

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r + (1/r^2) \partial^2 / \partial \theta^2 \quad (2)$$

방정식(1)의 해를 찾는 데 있어서의 고전적인 방법은 변수분리법에 근거를 두고 있다. 축대칭 경계 조건의 경우에 해는 다음의 형태를 취한다.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn}(r) \cos(m\theta) f_{mn}(t) \quad (3)$$

여기서

$$W_{mn}(r) = A_{mn} J_m(\lambda_{mn} r / a_2) + B_{mn} Y_m(\lambda_{mn} r / a_2) + C_{mn} I_m(\lambda_{mn} r / a_2) + D_{mn} K_m(\lambda_{mn} r / a_2) \dots (4)$$

이며, m, n 은 직경방향 진동 절선과 반경방향 진동 절선의 수이고, $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$, 은 경계 조건에 의해 결정되어지는 모드형상수이다.

J_m, Y_m 은 각각 제1차, 2차 Bessel 함수이며, I_m, K_m 은 각각 제1차, 2차 변형 Bessel 함수로 모우드화된다. λ_{mn} 은 경계조건에 의해 결정되는 주파수인자인데 주파수인자 λ_{mn} 은 진공상태에서의 원주파수 ω_{mn} 과 관련된다.

$$\omega_{mn} = (\lambda_{mn}^2 / a_2^2) \sqrt{D / \rho_p h} \quad (5)$$

λ_{mn} 의 값은 9개의 경계조건과 $\nu = 0.3$ 에 대해서 참고[7]에 3개의 중요한 수치로 도표화 되었다.

주파수인자 $\lambda_{mn}, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ 은 이 연구에 대해서 보다 정확한 해를 취하기 위해서 연구자가 직접 계산한 것이다. 계산을 단순화하기 위해서 모우드상수를 다음과 같이 직교화 하였다.

$$\int_a^1 W_{mn}^2(r) r dr = 1 \quad (6)$$

여기서, $a = a_1 / a_2$ 은 내외경 반지름의 비이다.

Assumed - Modes Approach

한쪽면이 접수되어 있고 내경 및 외경이 자유 경계조건인 원환판의 자유진동을 고려하자. 이때 접수진동의 진동형은 진공상태에서의 진동형과 큰 차이가 없는 것으로 가정한다. 따라서, 접수상태에서의 원환판의 진동형은 공기 중에서의 진동형 방정식 (3)으로 주어질 수 있다. 이 가설은 Amabili[3]가 접수된 원환강판에 대해서 실험적으로 검사하였다. 사실상 고유 진동수가 수중에서 큰 값으로 감소한다 할지라도 진동형은 단지 작은 변화가 있을 뿐이다. 이 가설은 접수한 원환판의 진동을 연구하는데서 사용되어 진다. 이 가정을 바탕으로 접수진동중의 고유진동수와 진공상태에서의

진동수와와의 관계를 설명할 수 있다. 연성화된 진동에 대한 Rayleigh정수의 개념을 도입하면 진공상태에서 판의 고유진동수의 제곱은 판의 최대 위치 에너지 V_p 와 기준 운동에너지 T_p^* 사이의 비에 비례한다. 반면에 수중에서 고유진동수의 제곱은 판의 최대 위치 에너지와 판 과 유체의 기준 운동 에너지의 합 에 비례한다.

$$f_V^2 \propto (V_p/T_p^*)_{vacuum}, \quad f_F^2 \propto (V_p/(T_p^* + T_F^*))_{fluid} \quad \dots\dots(7)$$

이때, 진공상태와 유체에서의 진동형이 같다고 가정했기 때문에, 위치 에너지 V_p 와 운동 에너지 T_p^* 는 진공중이나 접수상태에서 그 값이 변하지 않는다. 그러므로 식(7)을 사용하면 진공에서의 고유진동수 f_V 와 유체에서의 고유진동수 f_F 사이의 다음 관계가 얻어진다.

$$f_F = f_V/\sqrt{1+\beta_{mn}} \quad (8)$$

여기서 β_{mn} 는 AVMI 인자이다[1,4]. 이 인자는 구조물의 진동에 의하여 야기된 유체의 운동에너지와 판 자체의 기준 운동에너지 사이의 비로 주어지며

$$\beta_{mn} = T_F^*/T_p^* \quad (9)$$

다음과 같이 무차원으로 표시할 수 있다.

$$\beta_{mn} = \Gamma_{mn} (\rho_F/\rho_P) (a_2/h) \quad (10)$$

식(10)에서 ρ_F , ρ_P 는 각각 유체와 판의 밀도이며 Γ_{mn} 은 무차원화된 NAVMI인자[1,4]인데, 이 값은 유체장의 속도포텐셜을 구하는 과정에서 Hankel 변환을 통한 이중 적분방정식의 해의 형태로 주어지며 최종적인 형태는 식 (11)과 같이 표현되는데, 자세한 식의 전개는 참고문헌 [8]에 주어져 있다.

$$\Gamma_{mn} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s \Gamma(1+m+s)}{2I(2+s) I(1+m)} \int_r^1 r^{m+1} \cdot W_{mn}(r) {}_2F_1(1+m+s, -1-s, 1+m, r^2) dr \quad \dots\dots(11)$$

3. 실험 장치 및 방법

접수 진동 중인 원환판의 고유진동수를 실험적으로 추출해 보기 위하여 4가지 종류의 원환판에 대한 실험을 행하였으며 각 원환판의 제원은 Table 1과 같다.

접수 진동의 실험에 따른 경계 조건 구현의 어려움으로 인하여 실험은 양단 자유의 경우에 국한시켰다.

접수 진동의 실험은 높이 1.5m, 직경 1.2m의 원통형 수조에 원환판의 두께의 반이 물 속에 잠수 되도록 면사로 지지하여 자유단 경계 조건이 구현 되도록 하였다. 원환판의 두께, 직경 및 진동 변위에 비하여 원통형 수조의 크기는 반사파의 영향이 무시될 수 있으리라 판단되며, 원환판의 전 면적에 대하여 접수 길이가 반 물수체로 유지될 수 있도록 하기 위하여 세심한 주의를 기울였다.

접수 원환판의 고유 진동수 계측을 위하여 사용된 가진 방법은 충격 해머를 이용하였는데, 가진기를 부착 시킬 경우 계측 장비의 질량 효과가 나타날 것을 우려하기도 하였지만, 원환판의 경우 접수 상태에서의 수평 유지에 큰 어려움이 있다는 점 때문에 원판의 경우 (Plate A)를 제외하고는 가진기 부착 실험을 행하지 못하였다.

원환판에 부착된 실험 측정 장비는 질량이 1.9 gram인 가속도계(PCB 303 A03)로써, 원환판의 질량(최대 1.16Kg, 최소 0.872Kg)과의 비가 최대 2.2% 정도로 가속도계의 부착으로 인한 질량 증대 효과를 최소화 시켰다. 가속도계 및 충격 해머로부터의 신호는 B&K 3550 FFT 신호 분석기를 통하여 주파수 응답함수를 계산하는데 사용되었으며 분석 대상 주파수 대역은 1.6 KHz까지로 제한하였다.

원환판의 주파수 응답함수는 진동 모드 계측을 위하여 Fig. 2와 같이 반경 방향 및 직경 방향으로 균등하게 분포된 24개의 절점에 대하여 계측하였다. 주파수 응답함수 계측시 가속도계는 모든 실험에 대하여 절점 R3C1에 고정시켰으며, 충격점을 달리함으로서 각각의 원환판에 대하여 총 24개의 주파수 응답함수를 계측 하였으나 본 논문에서는 고유진동수 만을 고려 대상으로 하기로 한다.

실험에 사용된 장비의 배치도는 Fig. 3와 같다.

4. 실험 결과 및 고찰

(1) 공기 중에서의 환판에 대한 실험

접수 진동 실험에 사용된 4가지 종류의 원환판이 균질하게, 그리고 기하학적으로 정확한 원형으로 가공되었는지의 여부를 실험적으로 확인하기 위하여 공기 중에서의 각 원환판의 고유진동수를 측정하여 이론적 계산치와 비교하여 보았다. Fig. 4은 공기 중에서의 충격 해머를 사용하여 구한 주파수 응답함수 중의 하나로써, 이 주파수 응답함수로부터 추출된 원환판의 고유 진동수는 Table 2에 주어져 있다.

Table 2의 결과에 나타나 있듯이 실험 결과는 이론적 계산치와 잘 일치하고 있으며, 이를 토대로 실험에 사용된 원환판들은 이론적 모형이 제시하는 기하학적 형상을 잘 나타내고 있다고 볼 수 있다.

(2) 환판의 접수 진동 실험

충격해머를 사용하여 접수 중인 원환판에 충격을 가할 경우, 순간적으로 접수 깊이의 차이가 있게 되며, 이는 이론적인 경계 조건과 큰 차이가 있을 것으로 판단된다. 따라서, 충격 해머에 의한 접수 원환판의 진동 특성과, 수평이 유지된 상태에서 진동 중인 원환판의 진동 특성 사이에 어느 정도의 차이가 나타나게 되는지 확인하기 위하여 내경이 없는 원판에 대하여 2가지 입력 방법의 결과를 비교하였다.

Fig. 5는 원판에 가진기를 부착시킨 뒤, 랜덤 신호로 가진된 원판의 주파수 응답함수이며, Fig. 6은 입력점과 출력점은 동일하나 입력 방법이 충격해머를 사용한 경우의 주파수 응답함수이다.

두 주파수 응답함수의 형태에서 알 수 있듯이 고주파수 영역에서의 모우드 상수의 변동 값을 제외하고는 거의 두 입력 방법에 의한 주파수 응답함수의 차이가 없다는 것을 알 수 있다. 따라서, 충격 해머로 행한 실험이 이론해에서 대표하는 원환판의 경계 조건에 완전히 일치하지는 않는다 하더라도, 실험적 오차의 범위 내에서 이론적 경계 조건을 크게 벗어나지 않는다는 결론을 내릴 수

있다.

원환판의 내경 변화에 따른 주파수 응답 함수의 변화 양상을 알아 볼 수 있도록 4개의 원환판에 대하여 입력 절점 R3C1, 출력절점 R2C5에 대한 주파수 응답함수가 Fig. 7 - Fig. 10에 걸쳐 주어져 있다.

Fig. 7에서 Fig. 10에 걸친 각 FRF들의 큰 특징은 내부 동공이 없는 원판의 경우 각 진동형들의 모우드 상수가 뚜렷이 구별되는데 반해, 환판의 경우 각 진동형들의 모우드 상수가 거의 같은 크기로 나타난다는 것이다. 이곳은 원판의 경우 특징의 몇몇 진동 모우드가 진동 응답을 지배하는 반면, 환판의 경우 진동 응답에 대한 진동 모우드 기여도가 거의 같게 나타난다는 것이다. 이것은 특정 입출력 점에 대한 결과이기는 하지만 원판과 환판의 진동 양상을 개략적으로 판단할 수 있는 근거로 사용될 수 있다. 또한, 일반적인 예상과 달리 내부 동공의 크기가 커질수록 진동 모우드의 수가 감소하고 있다는 경향 또한 이 그림을 통해 알 수 있다.

Table 3에 접수 원판 및 접수 환판의 이론적 고유진동수(T)와 실험적 고유진동수(E)가 각 반경방향 진동 절선의 수와 직경 방향 절선의 수에 대하여 비교 되어 있는데 이는 이론적 계산의 결과가 실험적으로 검증되고 있음을 보여 주고 있다.

5. 결론

접수 원환판의 고유 진동수에 대한 이론적 계산값들의 타당성을 실험적으로 검증 하였다. 접수 원환판의 주파수 응답 함수를 충격해머를 사용하여 실험적으로 추출하는 방법이, 접수 원환판의 이론적 모형과 일치할 수 있는지에 대한 우려가 있었으나 실험적 오차 범위 내에서 이의 타당성을 인정할 수 있었다고 생각된다.

일반적 형태의 가진력에 대해 동일한 결과를 얻을 수 있는지 여부의 확인을 위하여 가진기를 부착시킨 실험이 수행되어야 하며, 이 경우 가진기의 부착 상태가 이론적 모형의 접수 상태를 유지할 수 있도록 하기 위한 특별한 방법이 강구 되어야 할 것이다.

6. REFERENCES

1. M. K. Kwak and K. C. Kim, "Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid," *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Vol. 146, pp. 381-389.
2. M. Amabili and G. Frosali, "Vibrazioni di piastre anulari immerse in un liquido," *Rapporto 4, Dipartimento di Matematica "V. Volterra", University of Ancona*, 1994
3. M. Amabili, "Modal properties of annular plates vibrating in water," *Proceedings of the First International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, 3-5 October, 1994, Ancona, Italy, pp. 421-429.
4. M. K. Kwak, "Vibration of circular plates in contact with water," *Journal of Applied Mechanics*, 1991, Vol. 58, pp. 480-483.
5. M. Amabili and M. K. Kwak, "Free vibration of circular plates coupled with liquid: revising the lamb problem," *Journal of Fluids and Structures* (submitted), 1995.
6. A. W. Leissa, "Vibration of Plates," NASA SP-160. Washington, D.C: U.S. Government Printing Office, 1969.
7. S. M. Vogel and D. W. Skinner, "Natural frequencies of transversely vibrating uniform annular plates," 1965 *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 926-931.
8. M. K. Kwak and M. Amabili, "Hydroelastic vibration of free-edge annular plates," To be appeared.

Table 1. Dimensions and properties of annular plates used in the experiment.

	Plate A	Plate B	Plate C	Plate D
outer radius	0.15m	0.15m	0.15m	0.15m
inner radius	0m	0.015m	0.045m	0.075m
thickness	0.002m	0.002m	0.002m	0.002m
E	$2.0 \times 10^{11} \text{ Kg/m}^2$			
ν	0.3			
ρ	7750 Kg/m^3			

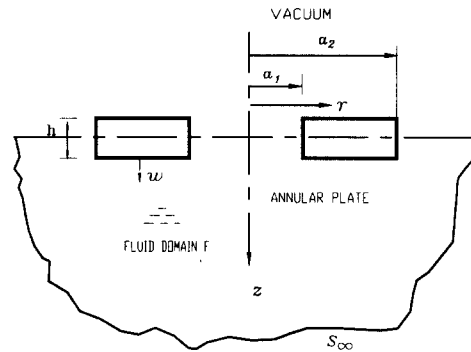


Fig.1 The annular plates and physical domain

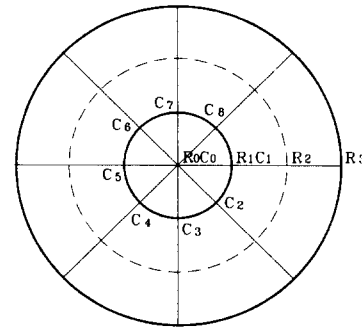


Fig.2 Node number convention for the plates used in the experiment

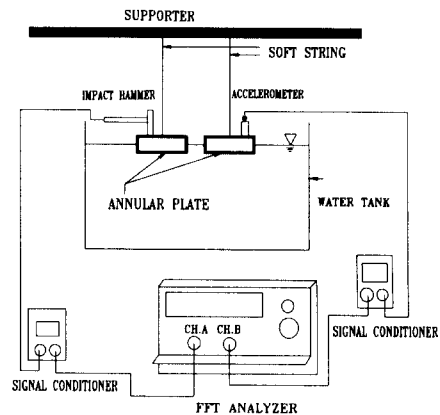


Fig.3 Schematics of Experimental Set-up

Table 2-1 Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate A in air.

s	n (unit:Hz)					
	0		1		2	
	T	E	T	E	T	E
0			206	208	878	842
1			468	454	1366	1322
2	122	130	805	784		
3	284	292	1211	1048		

Table 3-1. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate A in water.

s	n (unit:Hz)					
	0		1		2	
	T	E	T	E	T	E
0			119	128	539	528
1			290	292	951	930
2	78	80	534	528	1395	1358
3			836	826		

Table 2-2. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate B.

s	n (unit:Hz)					
	0		1		2	
	T	E	T	E	T	E
0			200	210	873	856
1			466	452	1349	1304
2	121	122	798	772		
3	284	286	1210	1168		

Table 3-2. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate B.

s	n (unit:Hz)					
	0		1		2	
	T	E	T	E	T	E
0			126	136	615	604
1			292	290	941	934
2	78	78	530	520	1377	1340
3	196	192	835	822		

Table 2-3. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate C.

s	n (unit:Hz)					
	0		1		2	
	T	E	T	E	T	E
0			191	208	1150	1120
1			418	412	1342	1304
2	112	110	753	750		
3	280	276				

Table 3-3. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate C.

s	n (unit:Hz)					
	0		1		2	
	T	E	T	E	T	E
0			132	144	851	854
1			278	280	985	994
2	72	70	501	502	1340	1338
3	193	184	805	786		

Table 2-4. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate D.

s	n (unit:Hz)			
	0		1	
	T	E	T	E
0			213	222
1			393	396
2	98	96	711	696
3	261	256	1084	1062

Table 3-4. Comparison of theoretical and experimental natural frequencies of plate D.

s	n (unit:Hz)			
	0		1	
	T	E	T	E
0			159	170
1			288	294
2	64	64	520	518
3			777	776

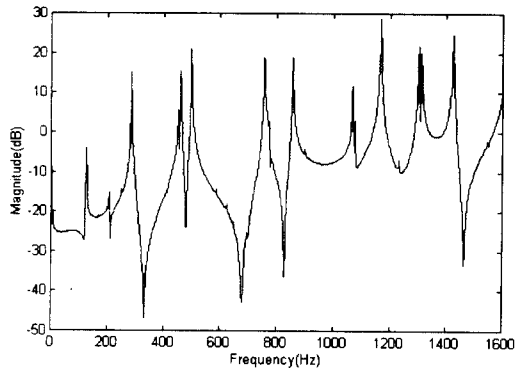


Fig.4 Magnitude of FRF of plate B in air with input R_3C_1 and output R_2C_8

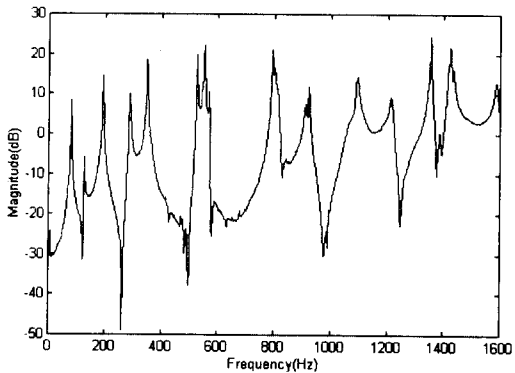


Fig.5 Magnitude of FRF excited with shaker attached at input R_3C_1 and output R_0C_0

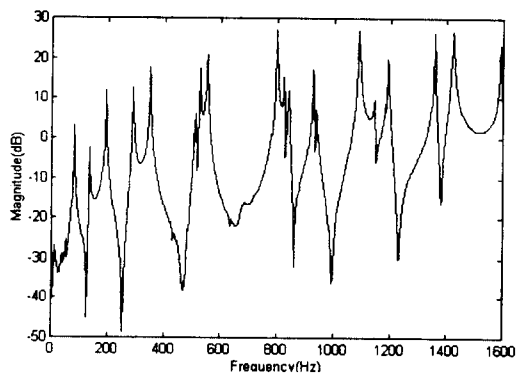


Fig.6 Magnitude of FRF excited with impact hammer at input R_3C_1 and output R_0C_0

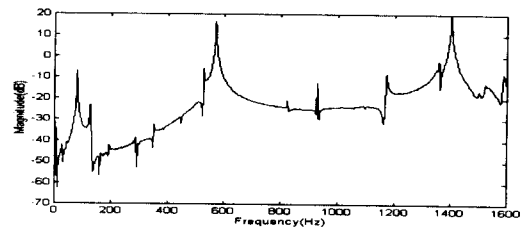


Fig.7 Magnitude of FRF of plate A in water with input R_3C_1 and output R_2C_5

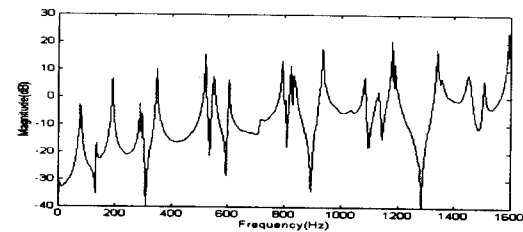


Fig.8 Magnitude of FRF of plate B in water with input R_3C_1 and output R_2C_5

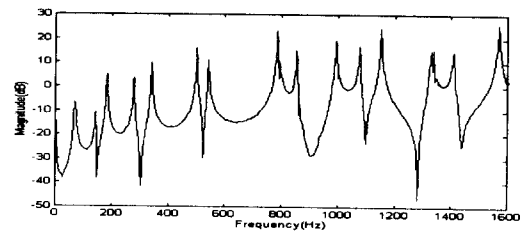


Fig.9 Magnitude of FRF of plate C in water with input R_3C_1 and output R_2C_5

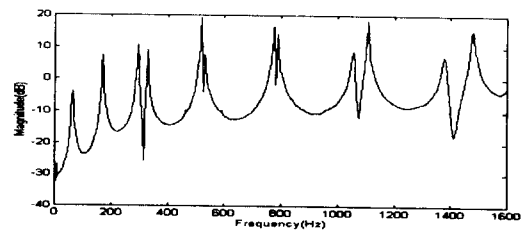


Fig.10 Magnitude of FRF of plate D in water with input R_3C_1 and output R_2C_5