침강 속도

유 동 훈 [*]　　　임 학 수 [**]

1. 서 론

기존 유사량산정식에 있어 대부분 침강속도와 종말속도를 혼용하여 사용하여 왔다. 그러나 침강속도는 낙하하는 물체의 위치마다 상당한 차이를 보이고 중력가속도의 영향을 받아 낙하하면서 점차 증가하며 최종침강속도인 종말속도에 이르러 일정해진다. 특히 부유사량산정에 있어서 낙하하는 물체의 속도는 침강속도이므로 종말속도를 사용하면 정확한 값을 구할 수 없다. 그러므로 침강속도의 정확한 산정은 토사이동량 산정에 있어서 매우 중요하다.

유동훈(1995a)은 반복법으로 구한 종말후루드수 F 의 분포로부터 정밀한 종말속도 산정식을 개발한 바 있다. 한편 우효섭(1995)은 Gibbs나 Watson 등의 경험식으로 침강속도를 산정할 것을 추천한 바 있다. 이에 대하여 유동훈(1995b)은 종말속도와 침강속도가 분명히 다름을 밝혔으며, 이에 따라 침강속도의 이론식 개발을 추진하게 되었다.

구속 없는 정지유체속에서 낙하하는 물체의 침강속도는 유체의 고유 성질인 밀도와 점성계수, 입자의 밀도와 크기, 중력으로부터 기인하는 입자의 가속도 등에 의해서 결정되고 낙하시 입자의 가속도에 의한 힘, 항력과 부력이 중력과 평형을 이루며 초기의 큰 가속도에 의하여 점점 침강속도가 커지고 가속도가 0에 이를 때 최종 침강속도인 종말속도에 다다른다.

침강속도의 산정을 위해 무차원수인 후루드수를 도입하고 종말후루드수대 침강후루드수의 비인 침강속도 증가율을 도입하였다. 침강후루드수를 시간으로 미분하여 종말후루드수로 나누면 Riccati 형 전미분방정식으로 도출되며 침강속도 증가율(ξ)은 낙하시간과 입경고유주파수 (f)의 함수로 해를 구할 수 있다.

2. 항력계수

유체 속에서 물체에 작용하는 항력은 다음과 같은 식으로 산정한다.

$$F_D = \frac{1}{2}\rho C_D A w^2 \tag{1}$$

* 아주대학교 환경·도시공학부 토목설계공학과 부교수
** 아주대학교 환경·도시공학부 토목설계공학과 학사과정

여기서 F_D 는 항력, ρ는 유체의 밀도, C_D 는 항력계수, A 는 투사단면적, w 는 유체 또는 움직이는 물체의 속도이다. 구형물체의 경우 항력계수는 레이놀즈의 함수이다. 항력계수에 대한 많은 식이 있지만 그 중 단일 식으로 표현되고 전구간에서 사용가능한 Dallavalle의 식을 사용한다. 즉,

$$C_D = \alpha + \frac{\beta}{R} \tag{2}$$

여기서 입경레이놀즈수 $R = \frac{w\phi}{\nu}$, ϕ 는 구형체의 입경, ν 는 유체의 점성계수, α = 0.4, β = 24 이다.

3. 침강속도 증가율 유도

낙하하는 물체의 항력을 식 (1)로 산정할 때 침강속도 w 는 다음과 같은 힘의 평형식으로 산정된다.

$$\rho_s(g-a)\frac{\pi}{6}\phi^3 = \rho g\frac{\pi}{6}\phi^3 + \frac{1}{2}\rho C_D w^2\frac{\pi}{4}\phi^2 \tag{3}$$

상기식에서 ρ_s 는 낙하물체의 밀도, a 는 낙하하는 물체의 가속도, ϕ 는 낙하하는 물체의 입경, g 는 중력가속도이다. 식 (3)으로부터 무차원수를 도입하면 다음 식으로 표현된다.

$$F^2 = \frac{4}{3C_D}\left\{1 - \frac{s}{s-1}\frac{a}{g}\right\} \tag{4}$$

여기서 F 는 상대밀도 후루드수 (Densimetric Froude Number) 또는 침강 후루드수로서

$$F = \frac{w}{\sqrt{(s-1)g\phi}}$$

이며 s 는 상대밀도로서 $s = \rho_s/\rho$ 이다. 식 (4)에서 침강속도가 0 일 때 입자의 가속도 a 와 종말상태에 이를 때의 침강후루드수 F 즉 종말후루드수 F_t (Terminal Froude Number) 는 각각 다음과 같다.

$$a = \frac{s-1}{s}g, \qquad F_t = \sqrt{\frac{4}{3C_D}}$$

식 (4)에서 가속도 a 대신 침강속도를 시간으로 미분하여 대입하고 항력계수에 식 (2)를 대입하면 다음과 같다.

$$F^2 = \frac{4}{3(\alpha + \beta R^{-1})} \left[1 - \sqrt{\frac{s^2\phi}{(s-1)g}\frac{dF}{dt}}\ \right] \tag{5}$$

상기식에서 후루드수 F 에 대한 레이놀즈수 R 의 비인 무차원수 N 을 사용하고

$$N = \frac{R}{F} = \frac{\sqrt{(s-1)g\phi^3}}{\nu}$$

침강속도 후루드수를 시간으로 미분하면 다음과 같이 산정된다.

$$\frac{dF}{dt} = \sqrt{\frac{(s-1)g}{s^2\phi}}\ [1 - 0.3\,F^2 - 18\,N^{-1}F\ ] \tag{6}$$

상기식은 다음과 같이 간단히 표기할 수 있다.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{f}{F_t}\ [1-0.3\,F_t^2\xi^2 - 18N^{-1}F_t\xi] \tag{7}$$

여기서 ξ 는 침강속도 증가율로 칭하며 $\xi = F/F_t$ 이고, f 는 입경고유주파수라고 칭하며 다음과 같다.

$$f = \sqrt{\frac{(s-1)g}{s^2\phi}}$$

또한 식 (7)은 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$\frac{d\xi}{dt} = f_F\{1 - A\xi^2 - B\xi\} \tag{8}$$

위식에서 $A = 0.3F_t^2$ 이고, $B = 18\,N^{-1}F_t$ 이며 $f_F = \frac{f}{F_t}$ 이다.
침강속도 증가율은 시간 t = 0 일 때 ξ = 0 이고, t = t_t 즉 종말상태에 도달할 때 ξ = 1이 된다. 여기서 종말후루드수는 침강속도 증가율이 1이 되고 침강속도 증가율의 미분 값이 0 이므로 다음의 양해법산정식으로 바로 구해진다.

$$F_t = \frac{1}{N}\,[\sqrt{3.33N^2 + 900} - 30] \tag{9}$$

상기식은 항력계수를 식 (2)와 같은 단순한 형으로 표기하여 구한 종말후루드수 F_t 이다.

그러나 침강 후루드수는 위와 같이 바로 구할 수 없다. 식 (8)은 침강속도 증가율의 2차 전미분방

정식이며 이러한 형태의 식은 Riccati 形의 미분방정식으로서 다음과 같이 풀 수 있다. Riccati 형 전미분 방정식에 대하여 침강속도 증가율을 다음과 같이 가정한다.

$$\xi = \frac{K}{u}\frac{du}{dt} \tag{10}$$

식 (10)을 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{K}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{K}{u}\frac{d^2u}{dt^2} \tag{11}$$

위식에서 u 와 K 는 다음과 같다.

$$u = e^{\int \frac{\xi}{K} dt}, \qquad K = \frac{1}{(f_F A)}$$

또한 식 (10)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d\xi}{dt} = f_F\left\{1 - A\frac{K^2}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - B\frac{K}{u}\frac{du}{dt}\right\} \tag{12}$$

따라서 식 (11)과 식 (12)는 동일하며, 연립하여 방정식을 풀면 침강속도 증가율은 다음과 같이 양해법으로 표기된다.

$$\xi = \frac{M_1 + M_2\delta}{A(1+\delta)} \tag{13}$$

$$M_1 = \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 + 4A})$$
$$M_2 = \frac{1}{2}(-B - \sqrt{B^2 + 4A})$$
$$\delta = -\frac{M_1}{M_2}\exp[-f_F t(M_2 - M_1)]$$

위의 침강속도 증가율 양해 산정식을 이용하여 침강체의 입자크기별 침강속도를 구해 그림 1에 도시해 보았다.

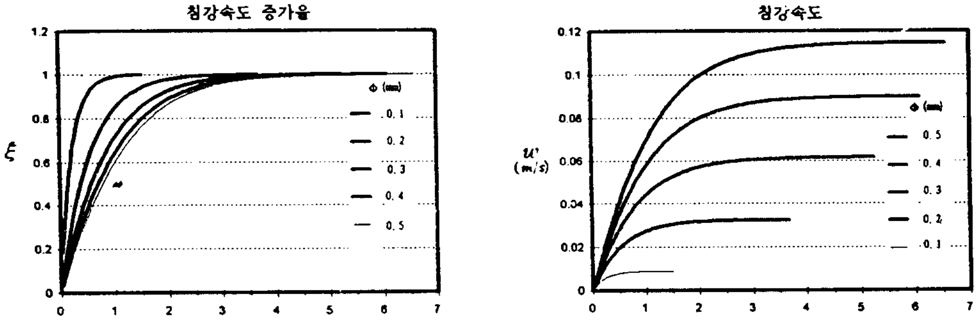


그림 1 낙하하는 구체의 침강속도 증가율과 침강속도

침강속도 증가율은 종말속도시간 T에 이르러서 1이 되므로 식 (13)으로부터 다음과 같이 종말속도시간을 바로 산정할 수 있다.

$$T = \frac{F_t}{f(M_2 - M_1)} \ln\left[\frac{M_2(A-M_1)}{M_1(A-M_2)}\right] \tag{14}$$

4. 평균침강속도 증가율

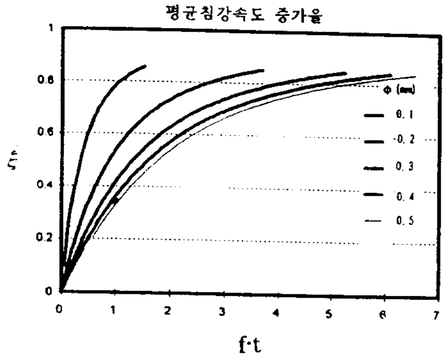
낙하하는 물체의 침강속도를 시간으로 적분하면 낙하거리를 산정할 수 있고 산정된 거리를 다시 시간으로 나누면 평균침강속도를 구할 수 있다. 평균침강속도를 종말속도로 나눈 값이 평균침강속도 증가율이 된다. 낙하시간이 종말속도 도달시간에 이르지 않았을 때 거리는

$$l = \int_0^t \xi\, w_t\, dt \tag{15}$$

여기서 l 은 낙하거리이고 t 는 낙하시간, w_t 는 종말속도이다.
식 (15)를 전개하고 총낙하거리를 시간으로 나누면 평균 침강속도를 구할 수 있으며, 이를 종말속도로 나눈 값은 다음과 같이 평균침강속도 증가율이 된다.

$$\overline{\xi} = \frac{1}{A}\left\{ M_1 + \frac{F_t}{tf} \ln\left(\frac{1 - \mu e^{-qt}}{1 - \mu} \right)\right\} \tag{16}$$

여기서 $\overline{w}$ 은 평균침강속도, $\mu = \frac{M_1}{M_2}$, $q = f_F(M_1 - M_2)$ 이고 $\overline{\xi}$ 은 평균침강속도 증가율이다. 그림 2에 낙하하는 구형체의 평균침강속도 증가율과 평균 침강속도를 도시해 보았다.



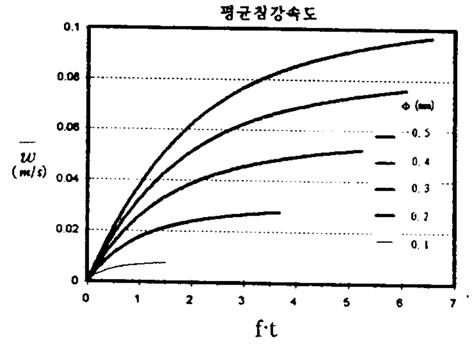


그림 2 낙하하는 구체의 평균침강속도 증가율과 평균침강속도

5. 결 론

구형체의 침강속도를 양해법으로 산정하는 침강속도 증가율 산정식 (13)을 개발하였다. 그림 1에 도시된 바와 같이 침강속도 증가율은 시간의 경과에 따라 기울기가 감소하며 종말속도에 이르러서 증가율이 1이 됨을 알 수 있다.

종말상태에서는 입자의 중력이 부력과 항력의 합이 같아지는 평형상태에 도달하여 더 이상의 입자가속도가 존재하지 않는다. 그러나 종말속도에 도달하기 전에 입자의 가속도에 의하여 입자에 대한 중력 값이 작아진다. 그러므로 침강속도는 낙하하면서 점차 감소하는 입자가속도를 고려해야 한다. 낙하가속도를 고려한 침강속도 양해법식으로부터 유체의 점성계수, 침강체의 입경과 비중 등이 주어지면 침강속도 증가율을 산정하고 이 값으로 침강 후루드수를 구해 침강속도는 바로 산정된다.

이제까지 침강속도 대신 종말속도를 사용해 얻은 부유사량을 침강속도 산정식을 사용함으로서 더욱 정확한 산정 값을 얻을 수 있을 것으로 기대된다. 단 위의 침강속도 증가율은 시간에 대한 함수이므로 실제적용시 거리에 대한 함수로 바꿀 필요가 있는데 시간에 대한 거리의 비가 침강속도이므로 이를 적용하면 된다.

참 고 문 헌

1. 우효섭, 1995, 구형체의 종말속도에 대한 토의, 대한토목학회 논문집, 15-4, pp.1093-1094
2. 유동훈, 1995a, 구형체의 종말속도, 대한토목학회 논문집, 15-1, pp.157-163
3. 유동훈, 1995b, 구형체의 종말속도 토의에 대한 회답, 대한토목학회 논문집, 15-4, pp.1094-1096