

Petrov-Galerkin 기법에 의한 부정류 해석모형

한 건 연*, 이 종 태**

1. 서 론

본 연구는 개수로에서의 부정류 해석을 위하여 Saint-Venant식의 확장형인 dynamic wave 식을 기본방정식으로 하고 이를 유한요소기법에 의해 해석함으로써 점변 및 급변부정류의 다양한 흐름조건에 대하여 일관성있고 일반화한 수치모형을 개발하여 하도내에서의 정확한 흐름특성을 파악하고자 함이 주된 목적이다. 이를 위하여 유한요소기법중에서 petrov-Galerkin 방법을 이용한 수치모형을 개발하고 매트릭스 안정성 해석을 통하여 amplitude portrait와 phase portrait를 도출함으로써 감쇠특성과 위상오차를 검토하였다. 본 모형은 기존의 Bubnov-Galerkin 유한요소기법 및 Preissmann 유한차분모형등과 그 수치적 특성을 비교검토하였다. 마찰없는 수평수로 상에서의 surge 전파에 따른 급변부정류 해석을 통해서 본 연구모형의 적용성을 입증하였다.

2. Petrov-Galerkin 유한요소모형

유한요소법에서 수치해의 정확도는 기저(보간)함수와 시행함수의 선정에 달려있다. 기저함수는 어떻게 변수가 표현되는지를 결정하며 시행함수는 미분방정식이 어떻게 실행되는지를 결정한다. Bubnov-Galerkin 방법에서는 시행함수는 기저함수와 동일하나 이 방법은 이송항이 지배하는 흐름에 대해서는 어려움을 겪게 된다. 기본적인 문제는 시행함수(偶함수)가 절점과 절점간에 있는 진동의 존재를 탐지하지 못한다는 것인데, 이 진동해는 기함수(비대칭함수)인 공간미분치를 가지고 있기 때문이다.

이 문제를 해결하기 위한 하나의 방법으로서는 혼합 보간방법(mixed interpolation)을 사용하는 것인데 이는 천수방정식에 대해서 수심을 유속에 비해서 낮은 차수의 기저함수를 사용하는 것이다. 전형적으로 수심은 기본상수로써 유속은 선형함수로 사용하거나 수심을 선형함수로 유속은 2차 함수를 적용하는 것이다.

* 경북대학교 토목공학과 교수

** 경기대학교 토목공학과 교수

이 방법은 절점과 절점간의 진동으로부터 수심을 효과적으로 그 영향을 흡수할 수 있으나 그 흐름해석 결과에 큰 변화가 없는 경우에는 유속의 진동을 감소하기 위해서 추가적으로 인위적인 점성항에 의존하여야 하였다. 또 다른 하나의 방법은 시행함수를 변형하여 偶함수뿐만 아니라 奇함수를 포함하게 됨으로써 이들 진동현상이 적정한 가중조건하에서 제거될 수 있는 것이다. 이 기법은 시행함수가 기저함수와 다른 해석기법으로서 Petrov-Galerkin 방법이라고 하는데 본 연구에서는 이 기법에 의해서 해석을 실시하였다.

하천에서 흐름해석을 위한 dynamic wave 식은 다음과 같은 매트릭스 형태로 기술될 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + D = 0 \quad (1)$$

$$\text{여기서 } Q = \begin{Bmatrix} h \\ p \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ gh - \frac{p^2}{h^2} & \frac{2p}{h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{Bmatrix}$$

$$D = \begin{Bmatrix} i \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + g \frac{n^2 p^2}{h^{1/3}} - \frac{bp}{2} \end{Bmatrix}$$

$$p = uh$$

여기서 h 는 수심, u 는 유속, z_0 는 하상고, n 는 Manning의 계수, i 는 측방유출입량을 나타낸다. Petrov-Galerkin 기법은 시행함수로서 기저함수를 선택하지 않고 C^{-1} 연속조건을 가지고 상류부에서 가중된 효과(upstream weighting)를 가진 함수를 선택하였다.

$$v_i = f_i + g_i = f_i + \omega \left[A^T \frac{df_i}{dx} \right] \quad (2)$$

여기서 f_i 는 선형기저 함수이고 g_i 는 감쇠항을 처리하기 위한 함수이며, ω 는 감쇠계수이다. 식 (2)을 식 (1)에 대입하여 정리하면 식 (3)를 얻게된다.

$$\sum_{n=1}^{NE} \int_0^L v_i \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + D \right) dx = 0 \quad (3)$$

여기서 NE는 요소의 수이다. 식 (3)은 비선형 연립방정식이므로 Newton-Raphson 기법에 의해 그 해를 구할 수 있다.

3. 선형안정도 해석

선형안정도 해석의 결과가 선형화된 dynamic wave 식에 대해서 수치 기법의 진폭과 위상특성치를 조사하기 위하여 사용되었다. 해석의 유형은 Fourier type(또는 von Neumann) 으로서 설명될 수 있다. 이것은 선형 해석이기 때문에 비선형에 관련된 불안정성을 예측할 수 없고, 미분형 경계조건도 고려할 수 없으나 이러한 해석은 다양한 수치 기법의 비교를 위한 기초로 뿐만 아니라 특별한 방법에 대한 어떤 문제의 적절한 이산화 과정을 결정하기 위해서도 아주 중요한 수단이 될 수 있다. 이제 진폭 매트릭스 $[G]$ 를 식 (4)와 같이 정의한다.

$$\{Q\}^{n+1} = [G]\{Q\}^n \quad (4)$$

여기서 $[G]$ 는 수치기법의 진폭 및 위상특성을 나타내고 있다. 진폭 매트릭스 $[G]$ 에 내한 두개의 고유치들은 두개의 특성 전파속도에 상응하는 것이다. 이론적 감쇠비 D_i 와 파속비 R_i 는 각각 식 (5), (6)과 같다.

$$D_i = [Re(\gamma_i)^2 + Im(\gamma_i)^2]^{1/2} \quad (5)$$

$$R_i = -\frac{1}{\alpha Cr(Fr \pm 1)} \tan^{-1} \left[\frac{Im(\gamma_i)}{Re(\gamma_i)} \right] \quad (6)$$

여기서 γ_i 는 진폭매트릭스의 고유치로서, α 는 $\alpha \Delta x$, $Re(.)$ 는 실수부, $Im(.)$ 는 허수부를 나타내고 있다. 여기서 음의 부호는 역행파에 대응하며 양의 부호는 진행파에 대응한다.

진행파와 역행파에 대해서 Fr수가 0일 때 조사된 다양한 기법들을 비교하였다. 이 경우 파장당 10개 절점의 값이 Cr수의 함수로서 이론적 감쇠와 상대 파속을 비교하기 위해서 선택되어졌다. 유한요소기법은 Cr수가 100까지에 대해서 $10 \Delta x$ 파에서의 어떤 감쇠가 없음을 알 수 있었고 Preissmann 기법은 또한 0.5의 Cr수까지 $10 \Delta x$ 파에 대해서 비감쇠적이나 Cr수가 5이상이면 감쇠정도가 과다하게 나타남을 알 수 있었다. 유한요소기법은 모든 Cr수에 대해서 좋은 위상 정확도를 보여주고 있는데, 이는 부정류 문제에 있어서 적합한 값으로 제시될 수 있겠다.

Preissmann 기법의 위상 정확도는 $10 \Delta x$ 파가 $Cr \leq 1$ 에서는 너무 빨리 전파되고 $Cr \geq 1$ 에서는 너무 느리게 전파된다는 점에서 흥미로운 결과를 제시한다. 이것은 양호한 진폭과 위상 정확도가 이 기법을 가지고 실행할 수 없다는 것을 의미한다. 따라서 Preissmann 기법은 petrov-Galerkin 기

법과 같은 정확도를 가지기 위해 좀더 세분화된 계산망을 요구하는 것으로 나타났다.

그림 1과 2는 짧은 파장 $4\Delta x$ 파에서 각 기법들의 감쇠도를 Cr수에 따라 확인해 보았다. Bubnov-Galerkin 기법은 역시 Cr수에 관계없이 비감쇠도를 나타내고 있으며 Preissmann 기법은 Cr수의 증가에 따라 과대하게 감쇠하는 경향이 있었다. 즉, petrov-Galerkin 기법은 짧은 파장에서의 감쇠도와 장파장으로 갈수록 비감쇠도의 복원력이 뛰어나 선택적인 감쇠가 매우 큰 것을 알 수 있었다. Preissmann 기법은 감쇠도는 크지만 장파장에서의 비감쇠도의 복원력이 Cr 수가 클수록 감소하였고 Bubnov-Galerkin 기법은 전 영역에서의 비감쇠특성으로 인해 짧은 파장에서 해의 불안정성을 초래할 수 있었다.

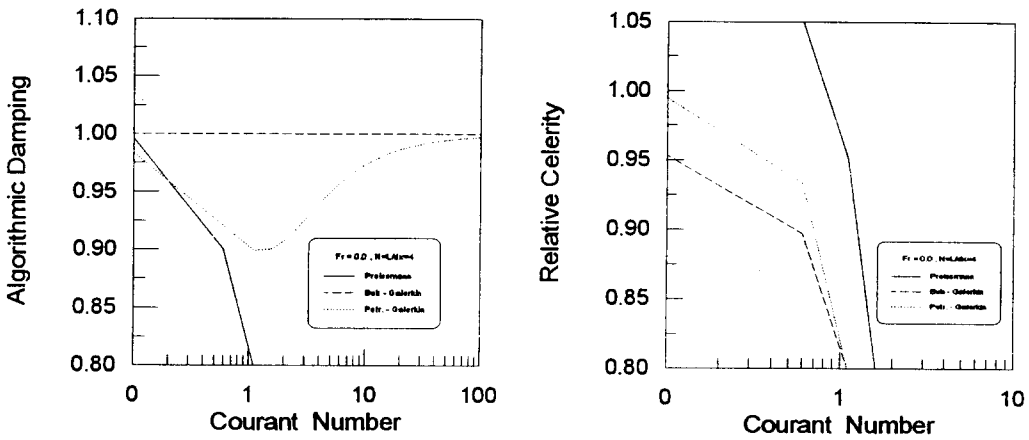


그림 1

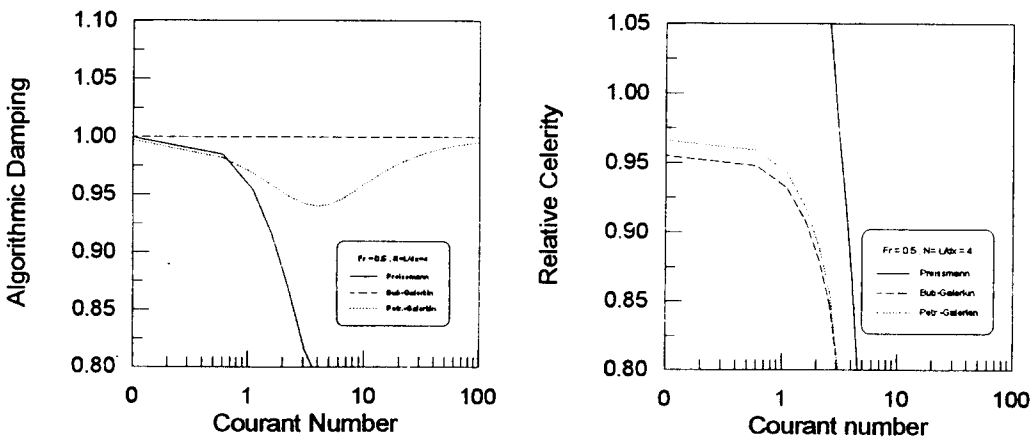


그림 2

4. Surge 전파해석

마찰없는 수평수로 상에서 수공구조물의 급격한 개방이나 폐쇄로부터 나타나는 surge는 유한요소기법의 계산능력을 엄격하게 평가할 수 있는 하나의 예가 될 수 있다. 이 경우에 0.03 m간격을 가지고 있는 48개의 요소가 해석에서 사용되었다. 초기수심은 1 m, 유량은 0으로 하였다. 시간 $t=0$ 에서 유량이 $1 \text{ m}^3/\text{sec}$ 로 증가하여 그 결과로 surge가 일정한 속도로 정수구간을 통해서 전파하였다. 주어진 경계 조건은 상류단에서 유량이, 하류단에서는 수심이 부여되었다.

그림 3은 감쇠계수를 0.0258로 취하고 시간가중치가 0.6일 경우에 시간 및 거리에 따른 surge의 3차원적인 형상을 도시하고 있다. 이 경우 surge는 실제의 현상을 급격한 종단형상에 있어서 잘 재현하고 있는 것으로 판단되었다. 시간 가중치의 영향에 따라 surge 선단부의 감쇠가 뚜렷하였으며 시간가중치가 1.0일 경우에는 과도한 확산의 영향으로 불연속 구간이 10 여개 절점에 걸쳐 나타나 2개 절점에서 나타나는 최적의 경우를 잘 재현하지 못하였다.

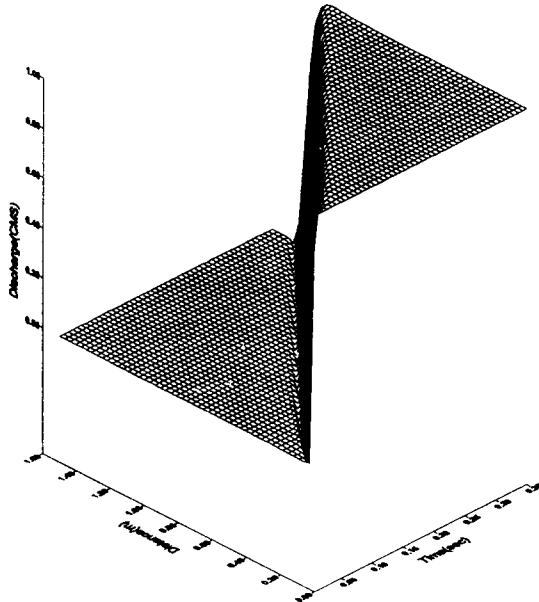


그림 3

5. 결 론

본 연구는 개수로에서의 점변 및 급변부정류에 대한 유한요소모형을 개발하고 선형안정도 해석을 실시한 것이다. Dynamic wave식을 기본방정식으로 하고 이를 C^{-1} 연속조건을 만족하고 upstream weighting을 도입한 시행함수를 이용하여 petrov-Galerkin 법에 의해서 해석하였다.

Petrov-Galerkin기법에 의한 유한요소모형에 대해서 매트릭스 안정성 해석을 실시하였고 amplitude portrait와 phase portrait를 통하여 수치안정특성을 분석하였다. Petrov-Galerkin기법은 단파장에서 감쇠도와 장파장에서의 비감쇠도의 복원력이 뛰어나 $2\Delta x$ 파에 대한 선택적인 감쇠가 매우 우수한 것을 알 수 있었다. Preissmann기법은 감쇠도는 크지만 장파장에서의 비 감쇠도의 복원력이 Courant 수가 클수록 감소하였고 Bubnov-Galerkin기법은 전 영역에서의 비 감쇠특성으로 인해 짧은 파장에서 해의 불안정성을 초래할 수 있는 특성을 나타냈다.

Petrov-Galerkin기법에 의한 surge의 전파에 대한 해석결과는 해의 안정도, 수렴성 등에 있어서 크게 개선된 계산결과를 보여주고 있었으며 급격한 선단부를 합리적으로 재현하여 해석적인 해와도 잘 일치되고 있으므로 본 연구모형의 급변부정류에 대한 적용성을 확인할 수 있었다.

< 참 고 문 헌 >

- Abbott, M. B., and Basco, D. R. (1989). *Computational Fluid Dynamics*. Longman Scientific and Technical. pp. 194-282.
- Alam, M. M., and Bhuiyan, M. A. (1995). "Collocation finite element simulation of dam-break flows." *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 118-128.
- Froehlich, D. C. (1990). "Hermite-Galerkin model for dam-break floods." *Proc. of 1990 Nat. Conf on Hyd. Eng.*, ASCE, pp. 557-562.
- Hicks, F. E., and Steffler, P. M. (1992). "Characteristic dissipative Galerkin scheme for open channel flow." *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, Vol. 118, No. 2, pp. 337-352.
- Katopodes, N. D. (1984). "A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow." *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450-466.
- Malcherek, A., and Zielke, W. (1994). "Upwinding and characteristics in FD and FE methods." in *Computer Modeling of Free-Surface and Pressurized Flow*. Kluwer Academic Publishers, pp. 173-204.