Langevin Equation for the Probability Density Function Method to Subsurface Solute Transport

조용준 ★

1. 서 론

지난 30여년동안 급속히 진행된 산업화와 그에 따른 경제집중, 인구유입등으로 인해 서울은 그 유래를 찾아볼 수 없을 정도로 거대해져 각종 infra structure의 지속적인 확충은 영원히 서울이 안아야 할 숙제이며 그 중 양질의 수자원 확보 및 공급은 물이 생명과 직결된다는 사실과 경제적 풍요로 급격히 높아진 삶의 질에 대한 기대치를 고려할 때 여러 infra structure중 선결해야 할 과제이다. 수도권에 집중된 경제집중 및 상대적으로 풍요한 문화적 혜택으로 인해 그동안의 꾸준한 분산정책에도 불구하고 앞으로도 수도권의 인구 흡인력은 상당히 지속된다고 봤을 때 연 강수량이 1100 MM 로 비교적 풍부한 수자원을 보유하고 있으나 연 총 304 억 T 의 강수량중 지표수유출량의 67.1 % 인 121 억 2 천만 T 이 7 - 9 월 사이에 집중되어 있어 회수율을 높이지 못하는 한 현재의 공급량으로는 곧 한계에 도달할 것으로 보여 그 대책이 시급히 요망된다 하겠다. 그러나 현재 한강수계에서의 지표수 개발은 지가상승 등으로 인해 그 특성상 하류쪽에 위치할 수 밖에 없는 다목적 댐의 개발은 거의 한계에 이르러 소수력 댐 정도만이 거론되고 있는 실정이며 그동안의 지가상승으로 인해 개발비용도 막대하다. 또한 한강수계의 공단이나 축산단지에서 무분별하게 방류되는 오염물질로 인해 심각하게 오염된 지천으로부터의 유입을 막기위해 그 중 오염도가 심한 왕숙천에서 잠실 수중보 하류부 까지의 轉換水路의 설치등에 막대한 예산을 투입할 예정이다. 이에 반해 지표수와 보완관계에 있는 지하수는 개발비용이 상대적으로 저렴하고 수질이 뛰어난 최후의 가용수자원으로서 이제 그 개발 시점에 도달했다고 판단된다. 총강수량의 회수율은 우기시 해양으로 유하되는 홍수파를 自由帶水層에 강제涵養하여 저수함으로써 높일 수 있고 自由帶水層에 추가적으로 저수된 물은 지하수의 극히 적은 유동성으로 인해 장기간에 걸처 식수 혹은 갈수기 때 악화되기 쉬운 하천수질을 개선하는 데 활용될 수 있다. 自由帶水層을 水槽로써 활용하여 총강수량의 회수율을 높이는 방법은 장시간의 지체시간으로 인해 방사능물질의 감소, 대수층을 구성하는 고립자의 吸着기능과 이온교환작용을 통한 정화작용등으로 인한 수질향상 효과도 기대할 수 있고 지하공간의 활용이란 측면에서 한강수계에의 적용을 적극적으로 고려해야 할 것이다. 그러나 지하수의 특성상 한번 유독물질이나 분해가 불가능한 오염물질에 노출되면 복구가 불가능 하거나 상당한 기간을 요하기 때문에 수질관리에 상당한 주의가 필요하며 과도한 양수시 지반의 침하, 과도한 涵養시 지반의 액상화등의 문제가 수반됨으로 自由帶水層의 개발에 앞서 自由帶水層을 통한 오염물질의 확산거동, 自由帶水層 水頭와 오염물질의 확산거동, 지반침하 와 배수와의 상관관계등에 대한 정확한 평가가 선행되어야한다. 自由帶水層을 통한 오염물질의 확산거동에 가장 큰 영향을 미치는 인자는 非均質한 투수계수로써 공간상 극심한 변화양상을 보이는데 이는 帶水層을 구성하는 입자들의 형성과정에 기인한다. 투수계수에 내재한 불확실성으로 인해 지하수 유동 또한 無作爲적이며 이러한 지하수 유동의 무작위성이 帶水層을 통한 오염물질의 확산거동에 대해 미치는 영향에 대해서 많은 연구가 이루어저 비교적 현실에 근접한 완성도 높은 모형도 제안된 바 있으나 현지조사를 통해 취득할 수 있는 투수계수의 정보는 제한적일 수 밖에

★ 서울시립대학교 공과대학 토목공학과 조교수

없어 오염농도의 예측에는 상당한 오차가 수반된다. 따라서 자유대수층을 통한 오염물질의 확산거동의 해석에는 통계적 기술방법이 동원된다. 확산거동에 대한 고전적 모형은 질량보전의 개념에서 유도된 이송확산방정식을 들 수 있다. 밀도와 유속항의 미소 변동량의 고차 moment가 비교적 작다는 사실을 근거로 섭동이론을 사용하여 이송확산방정식의 농도와 유속항을 평균치와 미소변동량의 和로 표현하고 이송확산방정식에 대한 기대값을 취하면 밀도와 유속의 1st moment에 대한 지배방정식을 얻을 수 있으나 이과정에서 유속미소변동에 의한 오염입자의 분산을 나타내는 추가적인 변량이 도입된다. 이러한 Closure 문제에 대한 해결방법은 유속미소변동에 의한 오염입자의 분산은 평균농도의 구배에 비례한다는 비교적 간단한 Fick's Law [Freeze 1975, Sagar 1978, Smith and Freez 1979, Gutjahr and Gelhar 1981, Dettinger and Wilson 1981, Dagan 1982, Townley and Wilson 1985] 에서부터 미소유속변동에 의한 오염입자의 분산량과 상이한 두 지점의 미소유속변동량간의 상관관계를 나타내는 공분산에 대한 추가전인 이송확산방정식에서 유속미소변동에 의한 오염입자의 분산량을 평가하여 문제를 close하는 방법까지 다양하다 [Mclaughlin and Wood 1988]. 비교적 많은 연구가 이루어진 Fick's law 의 장점은 비교적 간단하여 계산량 자체가 그리 많지 않다는 점이며 Fick's law가 성립되기 위한 이론적 근간은 오염입자의 분산이 경과시간에 따라 선형적 증가하고 Gaussian 분포를 따라야 한다는 점이며 분산이 시간에 따라 선형적으로 증가한다는 가정을 기초로 일정한 거시적분산계수 [spatially invariant macrodispersivity coefficient]의 적절한 평가방법 산출에 그동안의 연구가 집중되어 왔으나 분산량은 일정한 것이 아니라 오염원으로부터의 이송거리의 함수이고 이러한 경우 오염입자는 Gaussian 분포를 따르지 않는다는 현지 측정 결과가 자주 보고되고 있다 [Sudiky 1979]. 이에 반해 미소유속변동에 의한 오염입자의 분산량과 상이한 두 지점에서의 미소유속변동량간의 상관관계를 나타내는 공분산에 대한 추가전인 이송확산방정식으로부터 미소유속변동에 의한 오염입자의 분산량을 평가하여 문제를 close하는 방법은 분산의 시간에 따른 선형적 증가 와 Gaussian 분포라는 가정의 도입 없이 수행되어 정확성이라는 점에서 비교할 수 없을 정도로 우수하나 지하수 유동장과 연계된 두 개의 편미분방정식에 대한 수치해석이 불가피하여 계산량은 상당히 증가한다는 단점이 있다. 본연구에서는 미소유속변동량에 의한 오염입자의 분산량과 유속의 공분산을 기술하기위해 이송확산방정식을 도입하는 방법과 같은 정도의 정확성을 유지하면서 계산량이라는 면에서는 유리한 probability density function [이하 PDF]을 이용한 해석방법개발을 위한 기초연구로서 Lagrange 좌표계에서 오염입자의 거동에 대한 추계학적 모형인 Langevin equation 을 제안하고자 한다.

2. 기본방정식

自由帶水層을 통한 오염물질의 확산거동에 가장 큰 영향을 미치는 인자는 공간상 극심한 변화를 보이는 非均質한 투수계수로써 이러한 불규칙성은 帶水層을 구성하는 입자들의 형성과정에 기인하는 데 自由帶水層을 통한 오염물질의 이송 확산현상에 대한 기본방정식은 다음과 같고 [Bear 1979]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i c) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_j}\right] = 0 \tag{1}$$

여기서 $c(x_i, t)$는 공간 vector x_i와 시간 t의 함수인 오염물질의 농도, D_{ij}는 분자 분산계수, $v_i(x_i, t)$ 는 유속을 나타내며 해석영역이 2차원이라면 아래첨차 i = 1, 2 이고 반복된 아래첨자에 대해서는 화가 수행된다 [이하, 편의상 (x_i, t)는 생략]. 방정식 (1)의 무작위변량을 아래과 같이 평균값과 이 평균값으로부터의 微小變動量의 和로 나타내고

$c = \langle c\rangle + c'$

$v_i = \langle v_i\rangle + v_i'$

방정식 (1) 에 대해 기대값을 취하면 다음과 같은 평균농도 $\langle c\rangle$ 에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다

$$\frac{\partial\langle c\rangle}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\langle v_i\rangle\langle c\rangle)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_{ij}\frac{\partial\langle c\rangle}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}[\langle v_i'c'\rangle]=0 \tag{2}$$

여기서 $\langle v_i'c'\rangle$ 는 미소유속변동량에 의한 오염입자의 분산량 혹은 유속미소변동량과과 오염농도간의 상관관계를 지칭하는 공분산으로 해석할 수 있다.

3. Langevin equation

방정식 (2)에서 평가기법에 많은 이견을 야기하는 것은 미소유속변동량에 의한 오염입자의 분산량 $\langle v_i'c'\rangle$ 이고 이항은 결국 convection 에 의해 기인한다. 좌표계를 Lagrangian으로 전환할 경우 convection은 substantial derivative 항을 통해 Fick's Law 流의 가정의 추가적인 도입 없이도 자연스럽게 해석할 수 있고 어떠한 가정의 도입도 필요치 않기 때문에 상당한 정도도 기대된다. Langevin equation은 가장 기본적인 추계학적 모형으로 미소유속변동량을 v_i', Lagrangian integral time scale을 T 로 지칭했을 경우 오염입자의 이송속도성분에 대한 stochastic differential equation 형태의 Langevin equation은 다음과 같다

$$dU(t) = -U(t)dt/T + (2u'^2/T)^{1/2}dW(t) \tag{3}$$

. 식 (3)에서 $W(t)$는 Wiener process이다. 방정식 (3)을 유한차분 기법을 사용하여 근사하면 아래와 같고

$$U(t+\triangle t) = U(t)-U(t)\triangle t/T + (2u'^2\triangle t/T)^{1/2}\xi \tag{4}$$

여기서 ξ는 1st 와 2nd moment 가 각각 0과 1인 Gaussian 무작위변량 이다 [$\langle\xi\rangle = 0$, $\langle\xi^2\rangle = 0$] 따라서 Wiener process의 증분 $dW(t)$는 1st moment가 0 이고 2nd moment가 dt인 Gaussian 무작위변량으로 해석할 수 있다. 시간 t_0 에서의 초기조건으로 $U(t_0)$ 가 1st moment가 0 이고 2nd moment가 u'^2 인 Gaussian 무작위변량으로 주어진 경우 $U(t)$의 자기상관함수 $\rho(\tau)$ 는 방정식 (4)에서 다음과 같이 주어지며

$$\rho(\tau) = \langle U(t+\tau)U(t)\rangle / u'^2 = 1-|\tau|/T \fallingdotseq e^{-|\tau|/T} \tag{5}$$

Lagrangian integral time scale T 는 다음과 같다

$$T = \int \rho(\tau)d\tau$$

4. Numerical results

추계학적 미분방정식에 대한 근사적분중 Euler scheme 을 사용하여 방정식 (3)을 적분하면 다음과 같고

$$U_{n+1} = U_n - U(t)/T\cdot\triangle n + (2u'^2/T)^{1/2}\cdot\triangle W_n$$

여기서

$n = 0, 1, \cdots, N-1$

$\triangle_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ds$, $\triangle W_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_s$

Wiener process의 증분 $\triangle W_n$ 은 [0, 1] 사이에 균등분포하는 난수 P_n, Q_n 으로부터 모의발생시킬 수 있는 데 Box-Muller transformation을 사용하면 다음과 같다

$$\triangle W_n = [-2\triangle n \log P_n]^{1/2} \cos(2\pi Q_n)$$

. 그림 (1)은 Langevin equation의 수치해석으로 구한 특정오염입자의 분산속도에 대한 sample이고 그림 (2)는 $\tau = 0.1$ 인 경우 sample 분산속도에 대한 auto correlation function이다. 지하수유동장이 uniform flow인 경우 오염입자의 sample trajectory는 그림 (3)에 도시하였다.

4. 결론

거의 한계에 이른 한강수계에서의 지표수 개발로 인해 상당한 인구흡인력을 계속유지될 경우 증가될 원수수요에 대한 대처방안은 서울이 시급히 해결해야할 문제로써 본 연구에서는 이에 대한 해결방안으로 양질한 원수의 안정적인 확보, 부수적인 수질개선효과등 을 기대할 수 있고 지상댐의 추가적인 건설에 비교해서 부지수요에 대한 부담도 경미한 홍수파자유대수층 강제함양을 제시하고자 한다. 이에 대한 기초연구로써 자유대수층을 통한 오염입자의 이송확산거동에 대한 기존의 Fick 모형보다 정도면에서 우수한 PDF 방법에 필수적인 Langevin 모형을 제안한다.

감사

본 연구는 1994년 서울시립대 기성회 학술연구조성비에 의해서 수행된 것으로 상기 기관에 감사드립니다.

5. 참고문헌

Bear, J. 1979 Hydraulic of Growndwater, McGraw-Hill, New York

Dettinger, M. D., and J. L. Wilson 1981 First Order Analysis of Uncertainty in Numerical Model of Groundwater Flow 1. Mathmatical Development, Water Resour. Res., 17(1), 149-161

Freeze, R. A. 1975 A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Nonuniform Homogeneous Media, Water Resour. Res., 11(5), 725-741

Gelhar, L. W., A. L. Gutjahr and R. L. Naff 1981 Reply on Comments on Stochastic Analysis of Macrodispersion in a Stratified Aquifer, Water Resour. Res., 17(6), 1739-1740

Mclaughlin, D. B. and E. F. Wood 1988 A Distributed Parameter Approach for Evaluating the Accuracy of Ground Water Flow, Water Resour. Res 24(7), 1048-1060

Sagar, B. 1978 Galerkin Finite Element Method for Analyzing Flow Through Random Media, Water Resour. Res 14(6), 1035-1044

Smith, L. and F. W. Schwartz 1981 Mass Transport 2. Analysis of Uncertainty in Prediction, Water Reourse. Res, 17(2), 351-369

Sudicky, E. A. 1986 A Natural Gradient Experiment on Solute Transport in a Sand Aquifer: Spatial Variability of Hydraulic Conductivity and Its Role in The Dispersion Process,

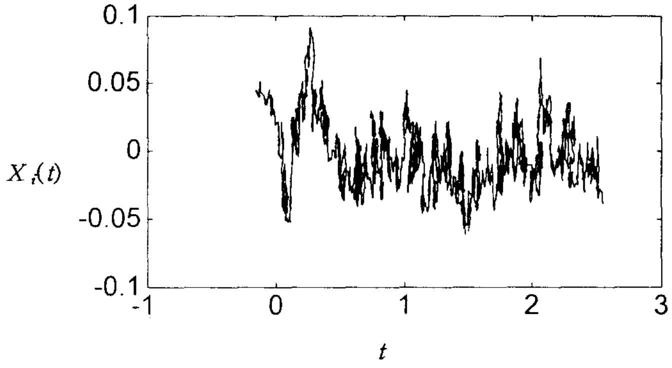

Fig. 3 Sample trajectory of specific solute particle

Water Reourse. Res, 22(13), 2069-2082

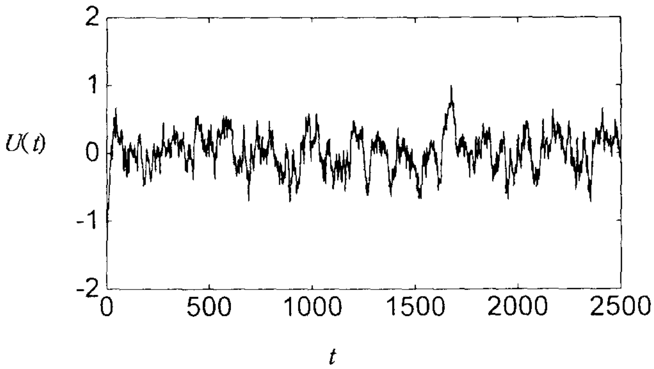

Fig.1 Sample of the convection velocity obtained as the solution of the Langevin equation

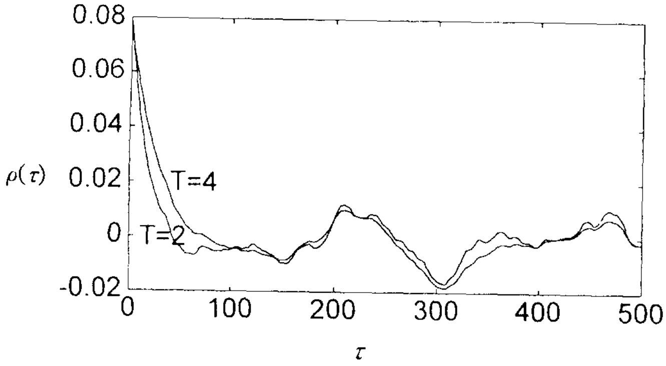

Fig.2 Autocorrelation Function of sample convection velocity