최적관경 산정

유 동 훈* 원 유 승**

1. 서 론

그동안 펌프동력과 유출률로부터 관경을 산정할 때 주어진 조건에 대하여 관경을 적당히 가정한 다음, 계산을 수행하여 가정한 관경과 계산된 관경의 차이가 유효한 범위안에 들지 않을 경우 관경을 조정하여 만족한 결과를 얻을 때까지 반복계산하였다. 유(1995)는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 지수함수 형태의 관마찰계수 산정식을 제시하였으며, 이로부터 관경을 양해법으로 산정하는 방법을 제시하였다. 이 연구결과를 이용하면 비용을 고려한 최적관경도 시산을 거치지 않고 바로 산정할 수 있으며, 기존의 관 마찰계수 산정식들에 비해 수리특성을 적절히 고려할 수 있는 장점이 있다.

최소 비용으로 수평관을 설계하기 위한 요소는 초기 투자비용으로써 펌프장 시설비와 관 설치비, 그리고 이와 같은 시설의 운영 및 유지를 위한 펌핑 에너지 등의 유지비용을 들 수 있다. 일반적으로 관경이 크면 필요한 동력이 작아 펌프용량이 작아도 되는 반면 관경이 작으면 관의 비용은 저렴하나 마찰손실의 증가로 대용량의 펌프가 요구된다. 따라서 관 설치비와 펌핑 에너지 비용의 합을 최소로 하는 최적관경을 산정할 필요가 있으며, 이는 관경에 대해 미분함으로써 산정할 수 있다. 그러나 간단한 수평관에서조차도 마찰계수의 미분이 쉽지 않고, 설령 미분하였다 하더라도 관경에 대하여 일괄적인 정리가 용이하지 않는 어려움이 있어 반복계산해야하는 단점이 있다. Hathoot(1984)는 Colebrook-White식을 이용하여 최적관경 산정법을 제시하였으며, 이는 층류일 때만 양해법으로 해를 구할 수 있고, 난류일 때는 시산을 통해 해를 구해야 한다. 반면에 Blasius의 지수함수 형태를 이용하면 최적관경의 산정에 있어 이러한 단점들을 쉽게 해결할 수 있었다.

2. 목적함수

(1) 관설비 비용

관의 비용은 관의 단위중량(γ_p)과 단위길이당 관 중량을 비용으로 환산하기 위한 계수 C_1을 이용하여 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$K_p = \pi d t \gamma_p C_1 \tag{1}$$

여기서 K_p는 관 설비비용이며, d는 관경, t는 관 두께, C_1은 비용/N이며, 단위는 [비용 $kg^{-1}m^{-1}s^2$]이다. 또한 관의 두께 t는 관경에 비례하여 증가하므로 관경에 따라 달라진다. 즉,

---

* 아주대학교 토목설계공학과 부교수

** 아주대학교 토목공학과 대학원 석사과정

$$t = C_2 d \tag{2}$$

C_2는 관 두께와 관경의 관계에 대한 비례상수이고, 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 관의 비용을 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$K_p = C_1 C_2 \gamma_p \pi d^2 \tag{3}$$

즉, 관의 종류가 결정되면 C_1과 C_2를 결정할 수 있으며, 단위길이당 관의 비용 K_p는 관경만의 함수가 되며 이는 관경의 제곱에 비례한다.

(2) 펌핑에너지 비용

요구유량(Q), 물의 단위중량(γ), 펌프효율(η)등이 주어졌을 때, 펌프동력(P)은 다음과 같이 산정된다.

$$P = \frac{\gamma Q h_f}{\eta} \tag{4}$$

식 (4)에서 마찰손실수두(h_f)는 Darcy-Weisbach 공식으로부터 구할 수 있으며, 이는 다음과 같이 표현된다.

$$h_f = f \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} \tag{5}$$

여기서 f는 Darcy의 관마찰계수, l은 관 길이, V는 평균유속이며, 평균유속 V를 연속방정식으로부터 요구유량(Q)으로 대치하여 식 (4)에 대입하여 다음식을 얻을 수 있다.

$$P = \frac{8 f \gamma Q^3}{g \eta \pi^2 d^5} \tag{6}$$

P는 단위길이당 동력이고, 관의 단위길이당 펌핑에너지로 비용함수를 나타낼 수 있으며, 비례계수 C_e를 도입하면 다음과 같다.

$$K_e = \frac{8 f \gamma Q^3 C_e}{g \eta \pi^2 d^5} \tag{7}$$

C_e는 [비용 $kg^{-1} m^{-2} s^3$]의 단위를 가지며, 총 비용은 관 설비비용과 펌핑에너지 비용의 합으로 표현할 수 있다.

(3) 총비용 계산

총비용(K_{tu})은 전술한 바와 같이 관 설비비용과 펌핑에너지 비용을 합하여 산정할 수 있으며

관의 성질과 제반조건이 주어지면 관경과 마찰계수의 함수로 표현된다. 즉,

$$K_{tu} = K_p + K_e$$
$$= C_1 C_2 \gamma_p \pi d^2 + \frac{8 f \gamma Q^3 C_e}{g \eta \pi^2 d^5} \tag{8}$$

식 (8)은 비제약 최적화문제이고, 최적관경 d는 마찰계수 f의 산정여부에 따라 쉽게 결정됨을 알 수 있으며, 이는 마찰계수 f가 최적관경 d의 산정에 중요한 변수임을 시사한다.

(4) 최적관경 산정

제약조건이 없는 목적함수 식 (8)을 관경 d에 대해 편미분을 하고, 관경에 대하여 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$d = \left[\frac{4 C_e \gamma Q^3}{\pi^3 C_1 C_2 \gamma_p g \eta} \right]^{1/7} \left[5f - \frac{\partial f}{\partial d} d \right]^{1/7} \tag{9}$$

식 (9)에서 관경에 대한 마찰계수의 편미분항 $\frac{\partial f}{\partial d}$는 흐름조건에 따라 다른 값 즉, 레이놀즈수 또는 조고비(d/k_s)로 표현되는 흐름특성에 의존함을 알 수 있다. 이는 마찰계수 산정 형태에 따라 시산 또는 양해적으로 구할 수 있으며, 유동훈(1995)의 지수함수 형태의 마찰계수 산정식을 이용한 최적관경 산정 방법을 논하였다.

3. 지수함수 형태의 마찰계수 산정식을 이용한 최적관경의 산정

층류, 천이층류, 완난류에 있어 지수함수 형태의 마찰계수 산정식은 단지 레이놀즈수의 함수이며, 관경 d에 대한 편미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial d} = -\alpha\beta \left(\frac{4Q}{\pi \nu} \right)^{\beta} d^{-\beta-1} \tag{10}$$

식 (10)에서 α, β는 상수이며, 각각의 흐름특성에 맞는 값은 유동훈(1995)의 논문에 자세히 제시되어 있으며, 식 (10)을 식 (9)에 대입하면 최적관경 d는 다음과 같은 형태로 정리할 수 있다.

$$d = \left[\frac{4 C_e \gamma Q^3}{\pi^3 C_1 C_2 \gamma_p g \eta} \right]^{1/(7+\beta)} \left[\alpha \left(\frac{4Q}{\pi \nu} \right)^{\beta} (5+\beta) \right]^{1/(7+\beta)} \tag{11}$$

식 (11)로 부터 유동훈(1995)가 도입한 S-E 관계식과 동일한 형태로 도출할 수 있다.

$$S = \varepsilon E^{\xi} \tag{12}$$

$$S = \frac{\nu d}{Q} \tag{13}$$

$$E = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\eta C_1 C_2 s_g Q^4 g}{C_e}\right)^{1/7} \tag{14}$$

$$\varepsilon = \left[\frac{\alpha(\beta+5)4^{1+\beta}}{\pi^{3+\beta}}\right]^{-\xi/7} \tag{15}$$

$$\xi = -\frac{7}{7+\beta} \tag{16}$$

식 (14)에서 s_g는 관의 단위중량과 물의 단위중량의 비인 비중이며 $s_g = \gamma_p / \gamma_w$이다.

전난류에 있어서 지수함수 형태의 관마찰 산정식은 조고비의 함수이며 이의 편미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial d} = \beta_k \left(\frac{\alpha_k}{k_s^{\beta_k}}\right) d^{\beta_k - 1} \tag{17}$$

식 (17)을 식 (9)에 대입하여 관경에 대해 정리하면 최적관경 d를 산정하는 식을 얻을 수 있다.

$$d^{7-\beta_k} = \frac{4 C_e \gamma Q^3}{\pi^3 C_1 C_2 \eta \gamma_p g} \frac{\alpha_k}{k_s^{\beta_k}} (5-\beta_k) \tag{18}$$

식 (18)을 식 (12)와 동일한 형태인 S-E의 관계식으로 도출하면 계수 ε과 지수치 ξ는 다음과 같다.

$$\varepsilon = \left[\frac{4\alpha_k(5-\beta_k)}{\pi^3}\right]^{-\xi/7} K^{-\beta_k/(7-\beta_k)} \tag{19}$$

$$\xi = -\frac{7}{7-\beta_k} \tag{20}$$

식 (19)에서 K는 상대조도와 관련된 무차원수이며 $\nu k_s / Q$이다.

천이난류 구간에서 마찰계수는 레이놀즈수와 조고비의 함수이며 이를 편미분하여 최적관경 산정식을 얻을 수 있으며 이는 식 (15)와 식 (16)에 흐름특성에 맞는 α, β를 식 (12)에 대입하고, $d_k = S/K$의 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 형태의 산정식을 얻을 수 있다.

$$S = \varepsilon E^{\xi} = 0.672\,K^{4/75}\,E^{-14/15} \tag{20}$$

이상의 계수 ε, 지수치 ξ와 경계조건을 정리하면 표 1에 제시된 바와 같다. 또한 표 1에 정리된 수치를 이용하여 E에 대한 S의 변이분포를 그림 1에 제시하였다.

표 1 관경산출을 위한 관경레이놀즈 역수의 산정식

수리특성분류	경 계 조 건 식	ε	ξ
층 류	$E<909.7$	1.7205	-7/6 (-1.167)
천 이 층 류	$907.7<E<1892.8$	0.4007	-35/37 (-0.946)
완 난 류 I	$1892.8<E<6.10\times10^{4}$	0.7771	-28/27 (-1.037)
완 난 류 II	$6.10\times10^{4}<E<1.6\times10^{6}$	0.6777	-42/41 (-1.024)
완 난 류 III	$1.6\times10^{6}<E<3.2\times10^{8}$	0.6211	-56/55 (-1.018)
완 난 류 IV	$3.2\times10^{8}<E<5.4K^{-0.5}$	0.5782	-70/69 (-1.014)
천 이 난 류	$5.4K^{-0.5}<E<14.3K^{-0.5}$	$0.6717K^{4/75}$	-14/15 (-0.933)
전 난 류 I	$14.3K^{-0.5}<E<10.77K^{-0.476}$	$0.7493K^{1/22}$	-21/22 (-0.955)
전 난 류 II	$14.3K^{-0.5}<9.78K^{-0.452}<E$	$0.7007K^{1/29}$	-28/29 (-0.966)

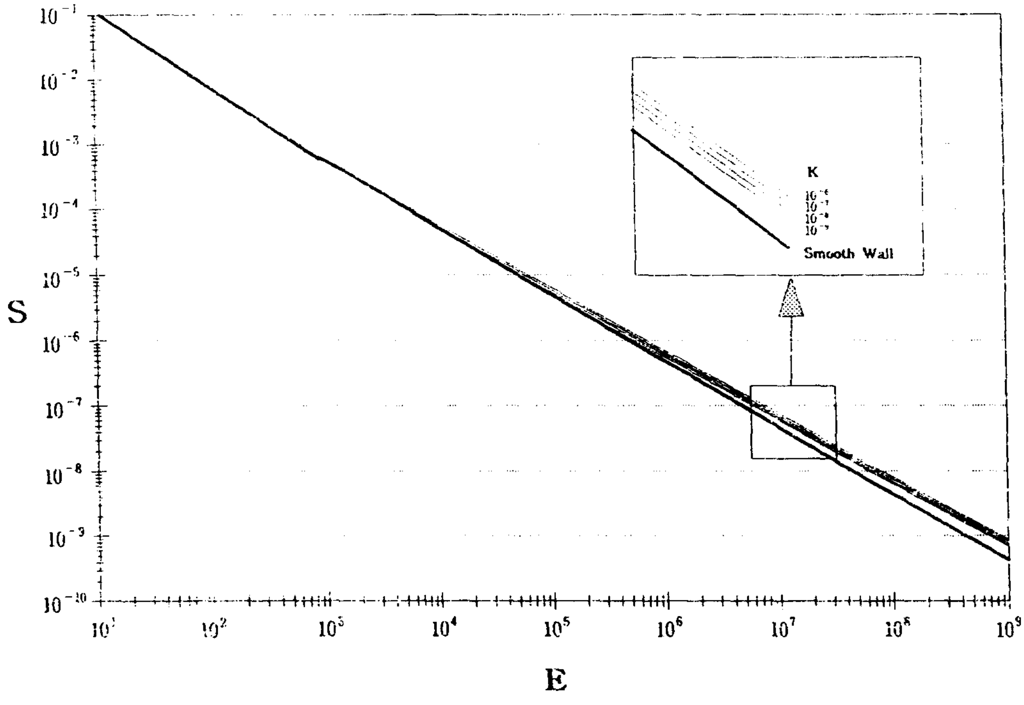

그림 1. 동력-유출 무차원수에 대한 레이놀즈 역수의 변이

4. 결 론

지수함수 형태의 마찰계수 산정식을 이용하여 마찰계수를 산정하고, 총 비용에 대한 편미분을 취하는 최적관경 산정법에 대해 다루었다. 즉 총 비용의 요소를 관 설치비와 펌프장 시설비가 포함된 펌핑에너지로 설정하고, 이들의 합을 목적함수로 취하여 비제약최적화 문제로 취급하였다. 관경에 대한 총 비용의 편미분이 0이 되는 최소 관경 산정식의 형태는 비용이 포함되지 않은 경우(유, 1995)와 같게 레이놀즈수의 역수(S)와 동력-유출 무차원수(E)의 관계로 유도할 수 있으며, 각각의 흐름 특성에 따라 계수(ε, ξ)를 결정할 수 있었다. 즉 요구유량(Q), 관길이(ℓ), 등가조고(k_s), 동력(P) 등이 주어졌을 때 비용을 최소로하는 최적관경을 시산하지 않고 양해법으로 산정하는 방법을 제시하였다.

참 고 문 헌

유동훈, 균일조도관의 양해법 설계 기준식, 한국수자원학회지, 28-5, pp. 175-189, 1995

Hathoot, H., Minimum-Cost Design of Horizontal Circular Pipelines, J. Transportation Eng., ASCE, May, 1984.