

상용관 유출률의 양해법 산정

유 동 훈* 강 찬 수**

1. 서 론

경사진 상용관에 펌프를 작동시켜 유체를 유송하는 경우에 대한 유출률을 산정하고자 할 때 기존의 방법으로는 상당한 반복과정을 거쳐야 하며, 그러한 수행과정을 거쳐서도 산정하고자 하는 해에 쉽게 접근하지 못하는 경우도 빈번하다. 또한, 상용관은 관내 마찰흐름 특성인 균일조도관과 판이하게 다르기 때문에 유출률 산정시 오차를 최소화하기 위해서는 보다 정확하고 합당한 마찰계수 산정식의 이용이 절대적으로 필요하다.

상용관 관로설계시 유출률을 산정하는 문제에 있어 양해법으로 해를 구하고자 하는 연구는 이미 여러 연구자들이 시도한 바 있다. 대표적으로 Simon(1986)은 이디오피아의 Asthana가 유량을 직접 구할 수 있는 관계도표를 작성하였음을 밝힌 바 있으며, 영국의 수리시험소(Hydraulic Laboratory, 1990)는 상용관 관로 설계시 임의 조건에 대하여 관경, 유량 등을 직접 구할 수 있는 표를 작성하여 제시한 바 있다. 그러나 이들의 연구결과는 대부분이 표나 그림으로 제시되어 있어 이용의 불편성과 비교적 큰 오차 유발의 가능성을 내포하고 있다. 또한 대부분 근본적인 모순점을 갖고 있는 Colebrook-White식을 상용관 마찰계수 산정의 기준식으로 이용하였으며, 자연경사관에 펌프동력을 추가하였을 경우에 대한 일반적인 조건을 전혀 고려하지 않았다. 이러한 점들로 미루어 기존의 방법들은 여러 가지 개선해야 할 문제점이 많은 것으로 사료된다.

이에 유동훈(1995a, 1996)은 상용관 마찰계수를 보다 합당하게 산정하기 위해 마찰계수 평균법을 개발하여 제시하였으며, 상용관 관로 해석의 1차적인 단계로 균일조도 동력경사관에 대하여 양해법 산정식을 개발하였다. 본 연구는 균일조도 동력경사관에 대한 양해법 산정을 토대로 이루어졌으며, 마찰계수 평균법에 의한 상용관 마찰계수 산정식을 적용하여 일반적인 경우의 상용관에 대하여 유출률을 산정하는 양해법 산정식을 유추하였다.

2. 균일조도 동력경사관의 유출률 산정

본 절은 관경, 관의 길이, 관내 조고, 지형경사와 펌프동력이 주어져 있는 균일조도관의 관내 통과 유출률을 산정하는 문제이다. 이 경우 기본 지배방정식은 다음과 같은 펌프동력을 산정하는 식이다.

$$P = \rho g Q \left(f \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} - i l \right) \quad (1)$$

여기서, P는 펌프의 동력, Q는 유출률, d는 관경, l은 관길이, k_s 는 조고, i는 경사, V는 평균유속, ρ 는 유체의 밀도, g는 중력가속도, f는 관마찰계수를 나타낸다.

* 아주대학교 환경·도시공학부 토목설계공학과 부교수

** 아주대학교 환경·도시공학부 토목설계공학과 학사과정

그림 1에는 대표적으로 P_r 은 0.2인 경우 β 는 -1/4을 사용하였을 때 여러 μ_r 과 μ_i 의 변이에 따른 η 의 정밀해와 근사해가 비교되어 있다. 여기서 η 의 정밀해는 식 (25)를 반복시산 과정으로 풀어 구한 수치이며, 근사해는 식 (26)과 제시된 표 2를 이용하여 구한 수치이다. 도시된 바와 같이 두 수치해는 차이를 구분할 수 없을 정도로 매우 근접함을 알 수 있다. 주목할 점은 μ_i 가 -3 보다 작은 경우 η 의 수치가 μ_r 의 변이와 관계없이 일정하다는 점과 μ_i 가 -3 이상인 경우는 μ_r 의 증가에 따라 η 의 수치가 감소한다는 점이다.

4. 결론 및 토의

경사진 상용관에 펌프가 작동하는 경우에 대하여 유출률을 산출하기 위한 양해법 근사식을 개발하였다. 균일조도관인 경우에 대한 양해법 근사식 개발을 위하여 유동훈(1995b, 1996)은 동력-관경수 B , 레이놀즈-경사후루드수 N 과 이들 무차원수의 조합형태인 N_B 를 도입하였다. 이를 토대로 일반적인 경우의 상용관에 대하여서도 이들 무차원수를 이용하였으며, 또한 마찰계수 평균법에 의한 상용관 마찰계수 산정식을 적용함으로써 매끈한 면과 거칠은 면의 마찰계수 분포율을 포함한 무차원수 μ_r 과 μ_i 를 도출하였다. 결과적으로 레이놀즈수의 증폭률 η 를 산정하는 식이 음해법의 형태로 구해지는데 계산된 결과의 분포형태를 파악한 후 네개의 구간으로 나누어 양해법 근사식을 개발하였다. 이로써 상용관의 유출률을 산정함에 있어서 반복과정을 거치지 않고 정확한 해를 직접 구할 수 있게 되었다. 또한, 반복 시산하여 구한 정밀해와 비교하여 양해법 근사해는 대부분의 조건에서 거의 일치하는 결과를 보였으며 큰 오차는 발생하지 않았다.

상용관의 경우는 마찰계수의 분포가 균일조도관과 판이하게 다르기 때문에 보다 정확한 상용관 마찰계수 산정을 위하여 유동훈(1995a)이 제시한 마찰계수 평균법을 적용하였다. 마찰계수 평균법은 유와 원(1995)에 의해서 Colebrook(1938)이 수집한 상용관 마찰계수의 분포와 잘 일치함이 확인된 바 있으며, 본 연구를 통해 관로설계를 위한 양해법 산정식 개발에도 유리한 형태임이 확인되었다.

5. 참고 문헌

- 유동훈 (1993), "균일조도 원형관 마찰계수", 대한토목학회 논문집, 제13권, 제5호, pp. 165-172.
 유동훈 (1995a), "복합면 마찰계수" 대한토목학회 논문집, 제15권, 제3호, pp. 134-145.
 유동훈 (1995b), "균일조도관의 양해법 설계 기준식", 한국수자원학회지, 제28권, 제5호, pp. 175-189.
 유동훈, 강찬수 (1996), "균일조도 동력경사관의 양해법 설계", 한국수자원학회지(제출).
 유동훈, 원유승 (1995), "상용관 마찰계수", 대한토목학회 논문집, 제15권, 제6호, pp. 1593-1606.
 Colebrook, C.F. (1938), "Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws." J. Inst. Civil Eng., London, Vol. 11, pp. 133-156.
 Nikuradse, J. (1933), "Strömungsgesetze in rauhen Röhren." Ver. Dtsch. Ing. Forsch., Vol. 361.
 Barr, D.I.H. (1975), "Two additional methods of direct solution of the Colebrook-White function", Proc. Inst. Civil Eng., Part 2, Vol.61, pp. 827-835.
 Simon, A. L. (1986), "Hydraulics", John Wiley & Sons

$$\eta = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} & \mu_i < -3 \\ (a - b\sqrt{\mu_r}) \exp[(c - d\sqrt{\mu_r})\mu_i] & -3 < \mu_i < 0 \\ (a - b\sqrt{\mu_r})\mu_i + (c - d\sqrt{\mu_r}) & 0 < \mu_i < 3 \\ (a - b\sqrt{\mu_r})\mu_i^{c - d\sqrt{\mu_r}} & 3 < \mu_i \end{cases} \quad (26)$$

여기서 a, b, c, d는 β 값에 따른 각 구간별 계수로써 그 산정식은 표 1과 표 2에 제시된 바와 같다.

표 1. $\beta = -1/6$ 인 경우의 각 구간별 계수 a, b, c, d 산정식

구 간	a	b	c	d
$-3 < \mu_i < 0$	$0.474 P_r + 1.035$	$0.330 P_r + 0.237$	$0.160 P_r + 0.405$	$0.105 P_r + 0.087$
$0 < \mu_i < 3$	$0.315 P_r + 0.349$	$0.265 P_r + 0.151$	$0.570 P_r + 1.055$	$0.420 P_r + 0.256$
$3 < \mu_i$	$\exp(0.67 P_r + 0.13)$	$\exp(1.4 P_r - 1)$	0.530	0.041

표 2. $\beta = -1/4$ 인 경우의 각 구간별 계수 a, b, c, d 산정식

구 간	a	b	c	d
$-3 < \mu_i < 0$	$\exp(0.43P_r + 0.036)$	$\exp(1.098P_r - 1.402)$	$\exp(0.364P_r - 0.893)$	$\exp(0.943P_r - 2.377)$
$0 < \mu_i < 3$	$\exp(0.801P_r - 0.988)$	$\exp(1.325P_r - 1.749)$	$\exp(0.485P_r + 0.057)$	$\exp(1.212P_r - 1.318)$
$3 < \mu_i$	$\exp(0.669 P_r + 0.127)$	$\exp(1.543P_r - 1.079)$	0.562	0.075

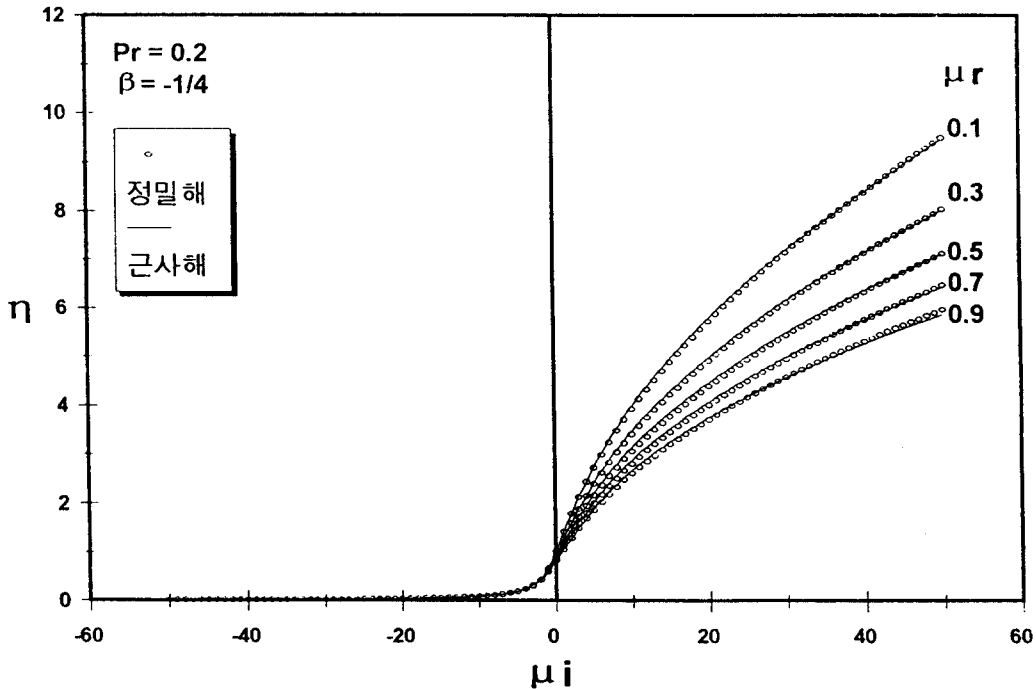


그림 1 μ_i 의 변이에 따른 η 의 정밀해와 근사해 비교

$$\mu_r' = \frac{P_r}{1-P_r} \frac{\delta}{\alpha} d_k^{\xi} R^{-\beta} \quad (17)$$

$$\mu_i' = \frac{2d^3 i g}{(1-P_r) \alpha R^{2+\beta} \nu^2} \quad (18)$$

식 (6)에 제시된 무차원수 B를 도입하여 식 (16)을 R에 대하여 정리하면, 다음과 같다.

$$R = \left[\frac{8}{\pi \alpha} \frac{1}{(1-P_r)(1+\mu_r' - \mu_i')} \right]^{\frac{1}{3+\beta}} B^{\frac{3}{3+\beta}} \quad (19)$$

식 (8)에 제시된 균일조도 수평관에서의 레이놀즈수 R_0 를 적용하여 R_0 에 대한 R의 증폭률 $\eta = R/R_0$ 를 도입하면, 식 (20)과 같이 증폭률을 구하는 산정식이 구하여 진다.

$$\eta = [(1-P_r)(1+\mu_r' - \mu_i')]^{-\frac{1}{3+\beta}} \quad (20)$$

그러나 상기식의 무차원수 μ_r' 과 μ_i' 은 미지수인 유속이 포함된 레이놀즈수 R의 함수로서 미지의 항이므로 식 (17)과 식 (18)을 η 의 함수로 정리하면 다음에 제시된 식 (21)과 식 (22)로서 표현된다.

$$\mu_r' = \frac{P_r \delta d_k^{\xi}}{(1-P_r) \alpha R_0^{\beta}} \eta^{-\beta} = \frac{1}{(1-P_r)} \mu_r \eta^{-\beta} \quad (21)$$

$$\mu_i' = \frac{2N^2}{(1-P_r) \alpha R_0^{2+\beta}} \eta^{-(2+\beta)} = \frac{1}{(1-P_r)} \mu_i \eta^{-(2+\beta)} \quad (22)$$

여기서 무차원수 μ_r 과 μ_i 는 다음과 같다.

$$\mu_r = \frac{P_r \delta d_k^{\xi}}{\alpha R_0^{\beta}} \quad (23)$$

$$\mu_i = \frac{2N^2}{\alpha R_0^{2+\beta}} \quad (24)$$

따라서 식 (20)을 μ_r 과 μ_i 의 함수로 정리하면 최종적으로 η 에 대한 음해법 정밀식이 산정되며, 식 (25)에 제시된 바와 같다.

$$\mu_r \eta^3 + (1-P_r) \eta^{3+\beta} - \mu_i \eta - 1 = 0 \quad (25)$$

상기식에 지수함수식의 대표적인 완난류 구간의 β 값인 $-1/6$ 또는 $-1/4$ 을 대입하고 Newton-Raphson법을 적용하면 반복시산과정을 통해 η 의 근사해를 추정할 수 있다. 이렇게 추정하여 도출한 η 의 산정치를 $\eta = f(\mu_r, \mu_i, P_r)$ 의 함수형태로 회귀분석하여 양해법 근사식을 산정하면 제시된 식 (26)과 같다.

여기서 $d_k = d/k_s$ 이며, 이때 펌프동력 산정식은 다음과 같다.

$$P = \rho g Q \left[\delta \left(\frac{d}{k_s} \right)^\zeta \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} - i l \right] \quad (12)$$

유사한 방법으로 R_0 에 대한 R 의 증폭률 $\eta = R/R_0$ 를 도입하고 식 (9)를 이용하면, 다음과 같이 전난류 구간에 대하여 증폭률을 구하는 산정식이 구하여 진다.

$$\eta = \left(1 + \frac{\pi}{4} \eta N_B \right)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

식 (10)과 식 (13)은 증폭률 η 를 구하는 문제인데 양변에 η 가 모두 포함되어 있으므로 음해법으로만 해를 구할 수 있다. 그러나 η 는 N_B 와 β 또는 β 를 고정하였을 때 N_B 만의 함수이므로 간단한 형태의 양해법 산정식을 개발할 수 있다. 따라서, N_B 의 여러 범위와 여러 수리조건에 대한 수치를 적용하여 산정된 결과의 분포곡선으로 부터 회귀분석하여 양해법 산정식을 개발하였다 (유와 강, 1996).

3. 상용관의 유출률 산정

상용관은 관의 이음방법 등에 의한 상용관내 불균일 조고에 의해 발생하는 손실이 주된 원인으로 작용하여 마찰계수 분포가 균일조도관에 비해 상당히 다른 형태를 갖는다. 이에 유동훈 (1995a)은 상용관 마찰계수를 산정함에 있어 마찰계수 평균법을 개발한 바 있다. 이 방법은 동일 상용관 내에 여러 다른 조면 즉, 수리학적으로 매끈한 면과 거칠은 면을 가진 면들이 공존하고 있다고 가정하여, Colebrook-White의 단순조합이 아닌 조고와 레이놀즈수에 따라 각 지점의 수리조건을 결정하여 마찰계수를 분포율에 따라 평균하여 구하는 방법이다. 그에 따르면 상용관 마찰계수의 산정식은 식 (14)와 같다.

$$f = P_s f_s + P_r f_r \quad (14)$$

여기서 P_s 는 매끈한 면의 분포율, f_s 는 매끈한 면의 마찰계수, P_r 은 거칠은 면의 분포율, f_r 은 거칠은 면의 마찰계수이며 $P_s = 1 - P_r$ 이다.

상기식에서 f_s 와 f_r 을 지수함수 형태로 나타내면, 식 (2)와 식 (11)에 의해 $f_s = \alpha R^\beta$, $f_r = \delta d_k^\zeta$ 로서 표현할 수 있다. 따라서 지형이 경사져 있는 경우 펌프를 작동시킬 때 펌프동력을 구하는 산정식은 식 (1)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$P = \rho l \frac{\pi}{4} \frac{Vd}{\nu} \nu d \left[\{ (1-P_r)\alpha R^\beta + P_r \delta d_k^\zeta \} \left(\frac{Vd}{\nu} \right)^2 \frac{\nu^2}{2d^3} - i g \right] \quad (15)$$

상기식을 전개하여 레이놀즈수 R 를 이용하여 간단히 정리하면 식 (16)과 같이 표현된다.

$$\frac{8}{\pi} \frac{1}{\nu^3} \frac{P d^2}{\rho l} = (1-P_r)\alpha R^{3+\beta} [1 + \mu_r' - \mu_i'] \quad (16)$$

여기서 무차원수 μ_r' 과 μ_i' 은 제시된 식 (17)과, 식 (18)에 표현된 바와 같다.

균일조도관의 마찰흐름 특성을 이루는 층류, 천이층류, 완난류, 천이난류, 전난류 등 다섯가지 수리조건에서 각 구간의 관마찰계수 산정식은 다르지만 전난류 구간을 제외하고 나머지 구간에 대하여는 모두 관마찰계수를 Blasius식과 동일한 형태인 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$f = \alpha R^\beta \quad (2)$$

여기서 R은 레이놀즈수이며, 상수 α 와 β 는 각 특성구간별로 변이한다(유동훈, 1995b).

이때 지형이 경사져 있는 경우 펌프를 작동시킬 때 펌프동력을 구하는 산정식은 식 (1)과 식 (2)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$P = \rho l \frac{\pi}{4} d^2 V \left(\alpha R^\beta \frac{V^2}{2d} - ig \right) \quad (3)$$

상기식을 전개하여 미지수인 유속이 포함된 레이놀즈수에 관하여 표현하면 식 (4)와 같다.

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\pi}{4} \frac{N^2 R}{B^3} \right)^{\frac{1}{3+\beta}} \quad (4)$$

여기서 무차원수 R, B, N은 각각 레이놀즈수, 동력관경수, 레이놀즈-경사 후루드수이며 각각 식 (5), (6), (7)에 제시된 바와 같고, R_0 는 균일조도 수평관($i=0$ 인 경우) 조건에서 계산되는 R을 의미하며 식 (8)에 제시된 바와 같다(유동훈, 1995b).

$$R = \frac{Vd}{\nu} \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{\nu} \left(\frac{Pd^2}{\rho l} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

$$N = \frac{\sqrt{gd^3 i}}{\nu} \quad (7)$$

$$R_0 = \left(\frac{8}{\pi \alpha} \right)^{\frac{1}{3+\beta}} B^{\frac{3}{3+\beta}} \quad (8)$$

따라서, R_0 에 대한 R의 증폭률(또는 감소률) $\eta = R/R_0$ 를 도입하고, 다음의 식 (9)와 같은 조합무차원수 N_B 를 이용하면, 식 (10)과 같이 증폭률 η 를 구하는 산정식이 구하여 진다.

$$N_B = \frac{R_0 N^2}{B^3} = \frac{R_0 \nu \rho g d l i}{P} \quad (9)$$

$$\eta = \left(1 + \frac{\pi}{4} \eta N_B \right)^{\frac{1}{3+\beta}} \quad (10)$$

전난류 구간인 경우 관마찰계수는 조고비 d_k 의 함수이며, 약산식으로 다음과 같다(유동훈, 1995b).

$$f = \delta d_k^\zeta \quad (11)$$