

불연속 요소를 사용한 콘크리트 파괴진행의 유한요소 모델링

Modeling of Progressive Failure in Concrete using Discontinuous Finite Elements

심 별* 송하원** 변근주***
Shim, Byul Song, Ha-Won Byun, Keun-Joo

ABSTRACT

In the concrete structures, cracks occur in various causes and the cracks seriously affect the functions of structures. The analysis techniques of progressive crack in the concrete have been improved with the advance of numerical techniques. The discrete crack model used in finite element program for the analysis of progressive failure is very effective, but it can not be easily implemented into numerical procedures because of difficult handling of nodal points in finite element meshes for crack growth. This paper introduces one of the techniques which skips the difficulty.

In this paper, the modeling of progressive failure using finite element formulation is explained for the analysis of concrete fracture. The discontinuous element using the discontinuous shape function and the dual mapping technique in the numerical integration are implemented into finite element code for this purpose. It is shown that developed finite element program can predict the quasi-brittle behavior of concrete including ultimate load. The comparisons of the analysis results with other data are also shown.

1. 서 론

최근 콘크리트 구조물은 대형화 추세에 있으며 구조 또한 복잡해지고 있다. 콘크리트 구조물의 내구성과 안전성을 좌우하는 요소는 여러 가지가 있으나 그 중에서 중요한 요소는 균열이며, 균열의 발생과 진행으로 결국에는 구조물이 파괴에까지 이르게 된다.

근래에 활발히 연구되고 적용되고 있는 파괴역학은 콘크리트의 균열문제에 유용하게 적용될 수 있

으며 콘크리트의 균열선단에서의 파괴진행영역을 고려하여 균열을 해석하면¹⁾ 콘크리트의 특성중의 하나인 크기효과가 고려된 구조물의 파괴거동을 예측할 수 있다. 또한 균열면에서의 여러특성들을 수치해석적으로 도입하면 콘크리트 구조뿐만 아니라 암반 및 지반의 문제에도 적용이 가능하게 된다.

본 연구에서는 균열이 발생하는 콘크리트를 변위의 불연속이 발생하는 연속체로 취급하여 지배방정식을 전개하였으며 불연속 형상함수를 이용함으로써 이산균열의 단점인 추가절점이나 요소의 분할을 피해 요소 내에서 변위의 불연속을 나타낼 수 있는 불연속유한요소를 사용한 콘크리트의 균열진행해석 알고리즘을 전개하였다.

* : 정희원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

** : 정희원, 연세대학교 토목공학과 조교수

*** : 정희원, 연세대학교 토목공학과 교수

2. 변위의 불연속을 고려한 가상일의 원리

콘크리트에서 균열발생시 균열면의 불연속은 연속체에서 그림 1과 같이 변위가 불연속임을 표현하는 불연속선으로 가정할 수 있다.

변위의 불연속면을 갖는 연속체에서 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_s} \bar{T}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} t_i \delta g_i d\Gamma \quad (1)$$

여기서,

σ_{ij} ; Cauchy 응력

$\delta \epsilon_{ij}$; 임의의 가상 변형률

f_i ; 체적력

δu_i ; 전체 좌표에서 가상변위량

\bar{T}_i ; 연속체경계면 Γ_s 에 분포하는 표면력

t_i ; 내부불연속경계면 Γ_c 에서의 표면력

δg_i ; 내부불연속면에서 가상변위량

특히, t_i 는 내부불연속면에서의 구성관계에 의해 결정되어지는 내부 표면력이다.

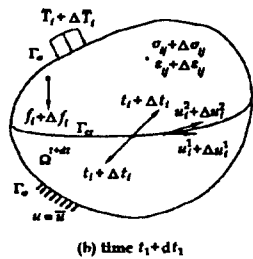
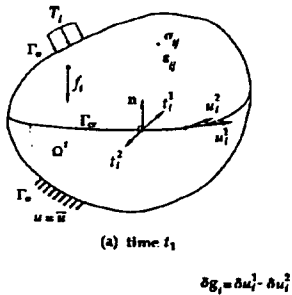


그림 1 불연속면을 가진 연속체

가상일의 원리를 이용하여 시간 t_1 (그림 1(a))에서 평형조건을 만족하는 식은 다음식과 같다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta (\Delta \epsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega} f_i \delta (\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \bar{T}_i \delta (\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} t_i \delta (\Delta g_i) d\Gamma \quad (2)$$

시간 $t_1 + \Delta t$ (그림 1(b))에서 평형조건을 만족하는

식은 다음 식과 같다.

$$\int_{\Omega'} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \delta (\Delta \epsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega'} (f_i + \Delta f_i) \delta (\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_s'} (\bar{T}_i + \Delta \bar{T}_i) \delta (\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_c'} (t_i + \Delta t_i) \delta (\Delta g_i) d\Gamma \quad (3)$$

연속체와 불연속면에서의 구성방정식은 다음 식과 같다.

$$\Delta \sigma_{ij} = L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}, \Delta t_i = -l_{ij} \Delta g_j \quad (4)$$

여기서, L_{ijkl} 는 연속체의 구성텐서이며, l_{ij} 는 변형의 불연속면 Γ_c 에 작용하는 표면력의 수직, 수평분력과 불연속면의 수직, 수평변위와의 관계를 나타내는 불연속면의 구성텐서 l 로서 다음 식과 같다.

$$l = \begin{bmatrix} l_{\alpha\alpha} & l_{\alpha\beta} \\ l_{\beta\alpha} & l_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

식 (5)의 $l_{\alpha\alpha}$ 는 단순인장모델의 경우에 인장연화곡선의 기울기¹⁾에 해당하며 $l_{\beta\beta}$ 는 불연속면의 전단력과 미끄러짐 변위의 관계로서 모델링된다. $l_{\alpha\beta}$ 와 $l_{\beta\alpha}$ 는 인장과 전단의 상호복합관계로서 구해진다. 본 수치해석 예제에서는 콘크리트의 인장 파괴모델로서 선형인장연화곡선을 사용하여 $l_{\alpha\alpha}$ 만이 $-\sigma_c / \omega_c$ 의 값을 갖고 나머지 항은 모두 0을 사용하였다.

중분 가상일의 공식은 식(3)에서 식(2)를 뺀 식에 식(4)를 대입하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\int_{\Omega'} L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \delta (\Delta \epsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega'} \Delta f_i \delta (\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_s'} \Delta \bar{T}_i \delta (\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_c'} l_{ij} \Delta g_j \delta (\Delta g_i) d\Gamma \quad (6)$$

3. 불연속 유한요소의 이산화

정규화를 위해서 연속체 Ω 는 N 개의 절점을 갖고 M 개의 유한요소로 구성되고, 불연속면은 NL 개의 국소화된 절점으로 분할된 것으로 생각한다(그림2).

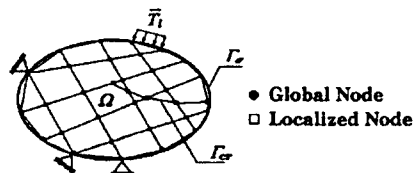


그림 2 유한요소의 이산화

Ω 에서 변위장은 일반영역의 변위 u 와 불연속면의 변위 g 로써 정의되므로 절점의 변위를 표현하는 u 는 다음과 같다.

$$\Delta u = N^{(\alpha)} \cdot \Delta \bar{u} + N^{(\beta)} \cdot \Delta \bar{g} \quad (7)$$

여기서,

$\Delta \bar{u}$; 절점변위 벡터의 증분

$\Delta \bar{g}$; 국소화절점에서의 변위 벡터의 증분

$N^{(\alpha)}, N^{(\beta)}$; 다항식으로 표현된 형상함수의 행렬

윗첨자 α, β 는 각각 연속과 불연속을 의미하며, 변형률의 증분도 같은 방법으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \epsilon = B^{(\alpha)} \cdot \Delta \bar{u} + B^{(\beta)} \cdot \Delta \bar{g} \quad (8)$$

여기서, 적합행렬 $B^{(\alpha)}$ 는 2차원문제에서 다음과 같다.

$$[B_i^{(\alpha)}] = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial N_i^{(\alpha)}}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i^{(\alpha)}}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \text{with } i=1,4 \quad (9)$$

또한 불연속면을 따라 국소화된 두 절점을 양단으로 하고 직선으로 변하는 변위를 가정한다면 적합행렬 $B^{(\beta)}$ 는 다음 식과 같다.

$$[B_i^{(\beta)}] = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \text{with } i=1,2 \quad (10)$$

형상함수 $N^{(\alpha)}$ 는 불연속선을 가로지르는 요소의 경계에서의 불연속을 표현하며 4절점 사각형요소(그림 3)에 대해 다음과 같이 유도된다.

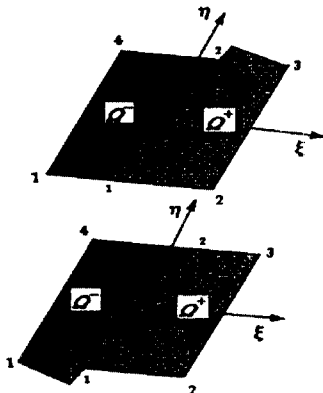


그림 3 사변형요소의 불연속형상함수

Γ_{cr} 의 양의 요소 체적인 Ω^+ 에서의 형상함수²⁾는

$$u^+(\epsilon, v) = \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1-v)u_1 + \frac{1}{4}(1+\epsilon)(1-v)u_2 + \frac{1}{4}(1+\epsilon)(1+v)u_3 + \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1+v)u_4 + \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1-v)g_1 + \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1+v)g_2 \quad (11)$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} N_1^{(\alpha)} &= \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1-v)g_1 \\ N_2^{(\alpha)} &= \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1+v)g_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Γ_{cr} 의 음의 요소 체적인 Ω^- 에서의 형상함수는

$$u^-(\epsilon, v) = \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1-v)u_1 + \frac{1}{4}(1+\epsilon)(1-v)u_2 + \frac{1}{4}(1+\epsilon)(1+v)u_3 + \frac{1}{4}(1-\epsilon)(1+v)u_4 - \frac{1}{4}(1+\epsilon)(1-v)g_1 - \frac{1}{4}(1+\epsilon)(1+v)g_2 \quad (13)$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} N_1^{(\beta)} &= -\frac{1}{4}(1+\epsilon)(1-v)g_1 \\ N_2^{(\beta)} &= -\frac{1}{4}(1+\epsilon)(1+v)g_1 \end{aligned} \quad (14)$$

식 (7), 식 (9), 식(10)을 식 (6)에 대입하면 다음의 요소강성도행렬을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_s \\ \Delta f_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서, $K_{ss} = \int_{\Omega} B^{(\alpha)T} : L : B^{(\alpha)} d\Omega$

$$K_{sb} = \int_{\Omega} B^{(\alpha)T} : L : B^{(\beta)} d\Omega$$

$$K_{bs} = \int_{\Omega} B^{(\beta)T} : L : B^{(\alpha)} d\Omega$$

$$K_{bb} = \int_{\Omega} B^{(\beta)T} : L : B^{(\beta)} d\Omega + \int_{\Gamma_{cr}} N^{(\beta)T} : t : N^{(\beta)} d\Gamma$$

$$\Delta f_s = \int_{\Omega} N^{(\alpha)T} \cdot \Delta f d\Omega + \int_{\Gamma_{cr}} N^{(\alpha)T} \cdot \Delta \bar{T} d\Gamma$$

$$\Delta f_b = \int_{\Omega} N^{(\beta)T} \cdot \Delta f d\Omega + \int_{\Gamma_{cr}} N^{(\beta)T} \cdot \Delta \bar{T} d\Gamma$$

이산화된 요소의 강성도 행렬은 2차원 4절점 사변형 요소에서 8×8의 크기를 가지고 있으며 나머지 부분의 행렬은 불연속면이 추가되면서 구성되어지는 부분이다(그림 4).

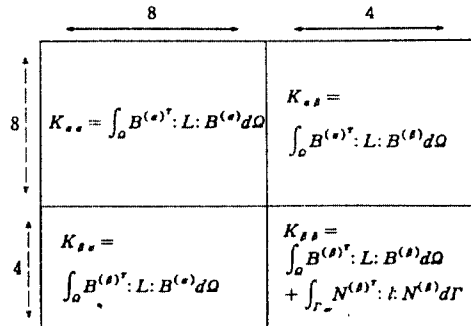


그림 4 불연속면을 가진 요소의 강성도행렬

4. 요소강성의 수치적분

불연속면을 갖고 있는 4절점 사변형요소의 불연속면에서는 변형률이 국소화되며 불연속면 이외의 부분은 비국소화가 일어난다. 그림 5와 같은 유한 요소에 전체적인 수치적분을 사용하면 요소의 내부 불연속을 고려하지 못하게 된다.

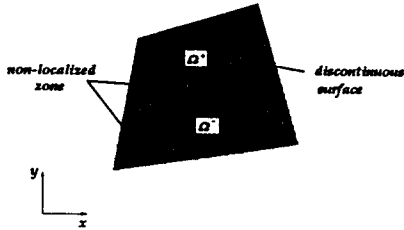


그림 5 일반 적분방법에 의한 변형률의 분포화 그러므로 불연속면으로 나누어진 두 개의 영역 (Ω^+ , Ω^-)에서는 일반적인 적분방법을 사용하고 요소내의 불연속을 고려할 수 있도록 불연속면 자체에서도 적분점을 사용하여 선적분을 실시한다(그림 6).

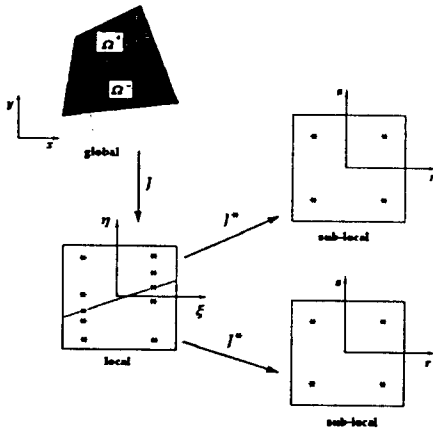


그림 6 수치적분을 위한 이중사상

영역 Ω^+ 와 Ω^- 에서 각각 다른 x 의 값으로 정의되는 불연속함수 $f(x)$ 가 주어진다면 요소의 전체 영역에의 적분은 다음과 같다.

$$I = \int_{\Omega} f(x) d\Omega \quad (16)$$

이때, 적분은 두 개의 영역에서 다음과 같이 각각 수행되어야 한다.

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f^+(r_i, s_j) (\det J_{\Omega^+}) (\det J_{\Omega^+}^*) w_{\Omega^+} w_{\Omega^+} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f^-(r_i, s_j) (\det J_{\Omega^-}) (\det J_{\Omega^-}^*) w_{\Omega^-} w_{\Omega^-} \quad (17)$$

여기서, (ξ_i, η_j) ; 국부좌표

(r_i, s_j) ; 부국부좌표

J ; 전체좌표에서 국부좌표로 변환하는 Jacobian

J^* ; 국부좌표에서 부국부좌표로 변환하는 Jacobian

w_i ; 가중치

위의 개념을 적용하여 얻어진 복합강성도행렬은 다음과 같다.

(i) 체적강성, $K_{\alpha\alpha}$

$$K_{\alpha\alpha} = \int_{\Omega} B^{(\alpha)T}(x, y) : L(x, y) : B^{(\alpha)}(x, y) dx dy = \int_{\Omega} B^{(\alpha)T}(\xi, \eta) : L(\xi, \eta) : B^{(\alpha)+}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\Omega} B^{(\alpha)T}(\xi, \eta) : L(\xi, \eta) : B^{(\alpha)-}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (18)$$

여기서, $B^{(\alpha)+}$ 와 $B^{(\alpha)-}$ 는 같으므로 국부좌표 (ξ, η) 에서의 체적강성도 행렬부분은 다음식으로 정리될 수 있다.

$$K_{\alpha\alpha} = \sum_i \sum_j B^{(\alpha)T}(\xi_i, \eta_j) : L(\xi_i, \eta_j) : B^{(\alpha)}(\xi_i, \eta_j) (\det J)_{\Omega} w_{\Omega} w_{\Omega} \quad (19)$$

(ii) 체적과 불연속면의 상호작용강성, $K_{\alpha\beta}, K_{\beta\alpha}$

$K_{\alpha\beta}$ 와 $K_{\beta\alpha}$ 는 같은 방법으로 구해지며 L 이 대칭행렬인 경우에는 $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}^T$ 인 관계가 성립한다. 또한 (r, s) 는 Ω^+ 와 Ω^- 에서 각각의 좌표를 갖는다.

$$K_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j B^{(\alpha)T}(r_i, s_j) : L(r_i, s_j) : B^{(\beta)+}(r_i, s_j) (\det J)_{\Omega} (\det J^*)_{\Omega} w_{\Omega} w_{\Omega} + \sum_i \sum_j B^{(\alpha)T}(r_i, s_j) : L(r_i, s_j) : B^{(\beta)-}(r_i, s_j) (\det J)_{\Omega} (\det J^*)_{\Omega} w_{\Omega} w_{\Omega} \quad (20)$$

(iii) 불연속면에서의 강성, $K_{\beta\beta}$

불연속면에서의 활동과 개구변위에 따른 강성은 다음식으로 표현될 수 있다.

$$K_{\beta\beta} = \sum_i \sum_j B^{(\beta)T}(r_i, s_j) : L(r_i, s_j) : B^{(\beta)+}(r_i, s_j) (\det J)_{\Omega} (\det J^*)_{\Omega} w_{\Omega} w_{\Omega} + \sum_i \sum_j B^{(\beta)T}(r_i, s_j) : L(r_i, s_j) : B^{(\beta)-}(r_i, s_j) (\det J)_{\Omega} (\det J^*)_{\Omega} w_{\Omega} w_{\Omega} + \int_{\Gamma} N^{(\beta)T} [I] N^{(\beta)} d\Gamma \quad (21)$$

5. 수치해석결과

개발된 모델의 타당성과 프로그램을 검증하기 위하여 인장에 의해 파괴가 일어나는 콘크리트 인장 시편과 notch가 있는 무근콘크리트 단순보를 선정하였다.

1) 단순화된 순수인장모델

프로그램의 기본적인 공식화를 검증하기 위하여 단순 요소를 가지고 있는 구조를 선정하였다. 요소의 기하학적 형상도 그림 7에서와 같이 정사각형을 택하였으며, 재료의 물성치는 표 1과 같다.

표 1 단순인장 모델의 재료물성치

탄성계수 E	4.87×10^6 psi	인장강도 σ_t	53.33 psi
포아송 비 ν	0.2	한계균열개구변위 w_c	0.001 in

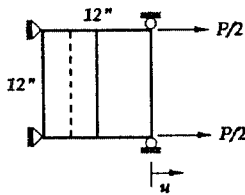


그림 7 단순인장모델의 구조모델링

균열발생후 post-peak 이후의 거동을 위해서 하중 대신 변위조절(displacement control)을 실시하였다. 그림 8은 구조해석결과이며, post-peak 이후의 하중-치짐관계를 나타내고 있다.

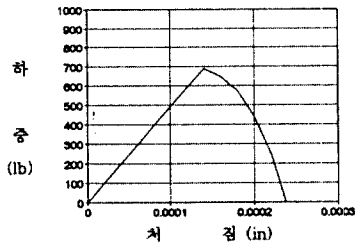


그림 8 단순인장모델의 해석결과

2) 단순보의 휨인장모델

개발된 모델을 Ratanalert and Wecharatana³⁾의 실험과 비교하였다. 여기서 사용되는 재료상수는 표 2와 같으며 보의 크기는 2×2×8 in 이고 notch의 깊이는 0.94 in인 경우이다.

표 2 검증모델의 재료물성치

탄성계수 E	3.3×10^6 psi	인장강도 σ_t	400 psi
포아송 비 ν	0.2	한계균열개구변위 w_c	0.002 in

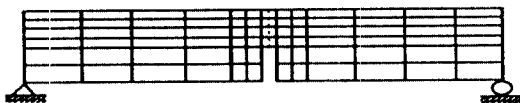


그림 9 검증모델의 구조모델링(1)

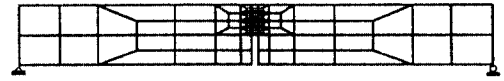


그림 10 검증모델의 구조모델링(2)

검증은 두 가지 모델링으로 수행되었다. 모델(1)은 그림 9와 같이 균열이 발생될 부분인 notch의 상부 요소가 4개로 되어 있는 단순한 모형이고 모델(2)은 그림 10과 같이 notch의 상부에 12개의 요소를 생성시켜 전체 요소 수는 비슷하지만 균열발생부위에 모델(1)보다 많은 요소를 배열하였다. 두 검증모형의 극한하중을 비교하면 표 3과 같다.

표 3 사용한 검증모델의 극한하중 비교

모델의 종류	극한하중(lb)
검증모델(1)	110
검증모델(2)	119
Wecharatana모델	128
실측실험결과	139

그림 11은 하중-치짐곡선을 나타낸다. 극한하중 면에서는 균열발생부위에 많은 수의 요소를 생성시킨 모델(2)가 실험실험에 가까운 값을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 보의 치짐면에서 비교해 본다면 검증모델(1)이 모델(2)보다는 인장연화부분을 잘 반영하고 있음을 알 수 있다.

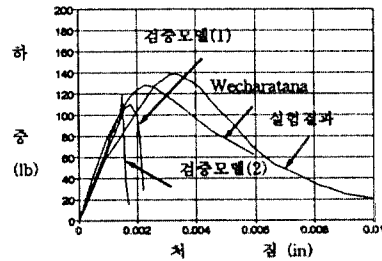


그림 11 검증모델의 해석결과 비교

지금까지의 연구는 극한하중의 예측과 함께 극한 하중이후의 거동을 재현하는 것을 목적으로 하였으나, 본 모델이 유한요소수에 해석결과가 의존하는 문제점과 post-peak의 거동을 정확하게 재현하지 못하는 문제점은 patch test에 의한 프로그램의 개선이 필요하다고 판단되며 비선형 인장연화곡선의 사용으로 개선될 수 있다고 판단된다.

6. 결 론

불연속 요소를 사용한 콘크리트 파괴진행의 유한 요소 모델링의 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

- i) 불연속 형상함수를 사용하여 유한요소내에 이산형균열을 표현할 수 있는 불연속요소를 콘크리트의 균열진행해석에 사용하여 점진해석을 할 수 있는 알고리즘을 완성하였다.
- ii) 불연속면의 특성을 고려한 개발 알고리즘을 검증하기 위하여 타 연구자의 실험결과와 비교하였으며, 개발 알고리즘이 콘크리트의 극한하중과 극한하중 이후의 거동을 표현할 수 있음을 확인하였다.
- iii) 본 연구는 간단한 선형인장연화곡선을 사용하여 균열요소의 불연속면을 모델링하였으나 실제 실험에서 얻어진 비선형인장연화곡선을 본 프로그램에 쉽게 사용할 수 있으며, 그 사용은 극한하중이후의 연성거동을 개선할 수 있다고 판단된다.

7. 참고문헌

- 1) 송하원, "유한요소법에 의한 콘크리트의 진행성 파괴해석", 콘크리트학회지, 제8권 1호, 한국콘크리트학회, 1996. 2., pp. 145~153.
- 2) Wan. R.G., Chan, D.H. and Morgenstern, N.R., "A Finite Element Method for the Analysis of Shear Bands in Geomaterials", Finite Elements in Analysis and Design, 7, Elsevier, 1990, pp. 129~143.
- 3) Ratanalert, S. and Wecharatana, M., "Evaluation of the Fictitious Crack and Two-Parameter Fracture Models", Fracture Toughness and Fracture Energy, (Ed.) Mihashi, H., Takakashi, H. and Wittmann, F.H., A.A.Balkema, Rotterdam, 1989, pp. 345~366.