

다층 반무한 기본해를 이용한 경계요소해석
Boundary Element Method for Multilayered Media
Using Numerical Fundamental Solutions

김 문 겸* 오 금 호** 김 민 규*** 박 준 상***
Kim, Moon Kyum Oh, Keum Ho Kim, Min Kyu Park, Joon Sang

ABSTRACT

A boundary element method which utilizes the fundamental solution in the half plane is developed to analyze the multi-layered elastic media. The objective of this study is to derive numerically the fundamental solutions and to apply those to the exterior multi-layered domain problems. To obtain numerical fundamental solutions of multi-layered structural system, the same number of solutions as that of layers in Fourier transform domain are employed. The numerical integration technique is used in order to inverse the Fourier transform solution to real domain. To verify the proposed boundary element method, two examples are treated: (1) a circular hole near the surface of a half plane; and (2) a circular cavity within one layer of four layered half plane.

1. 서 론

퇴적층의 형성 또는 지각변동 등과 같은 자연현상의 영향으로 지하구조물 주위의 지반은 다층 구조를 가지게 되므로, 주위지반과 구조물의 역학적 해석을 위해서는 다층구조의 영향을 고려해야 한다. 이와 같은 특성을 가진 다층지하구조체의 거동을 해석하기 위해서 무한요소법, 유한요소법, 유한차분법, 경계요소법 등과 같은 여러가지 수치해석법들이 개발되어왔다.^[1] 그 중에서, 경계적분경로에 대해서만 수치해석을 수행하는 경계요소법은 지반의 무한 및 반무한성을 가장 효율적이고 경제적으로 모형화할 수 있는 방법이다.

본 연구는 정역학적 하중조건하에서 반무한 다층구조계를 외부영역 경계적분 문제로 해석하기 위한 경계요소법의 개발을 목적으로 한다. 해석대상의 거동영역은 선형 탄성영역이다. 반무한 영역 다층구조계를 외부영역 경계요소법으로 해석할 경우, 다층구조의 비균질 물성의 효과를 고려하는 기본해를 사용하므로써 경계적분경로를 구조물 주변으로 최소화할 수 있다. 이론적으로 외부영역 경계적분방정식을 형성하는 다층 기본해의 해석적 유도는 가능하지만, 층수가 많아지면 해석적으로 간단하게 전개되어질 수 없다. 이 문제의 해결을 위하여, 본 연구에서는 Fourier 변환을 이용한 다층 기본해의 유도과정을 수치적으로 수행하도록 알고리즘을 개발하였다. 이 수치 기본해를 이산화된 외부영역 경계적분방정식에 적용하여 반무한 다층구조계를 해석할 수 있는 경계요소기법을 개발하였다. 개발된 프로그램의 검증을 위하여 원공이 있는 반무한 평판에 균일한 수평 방향의 인장력이 작용되는 경우와 다층구조를 가진 반무한 평면내에 존재하는 내공벽에 균일한 내압이 작용되는 경우를 예제로 다루었다.

* 연세대학교 토목공학과 교수

** 연세대학교 토목공학과 박사과정

*** 연세대학교 토목공학과 석사과정

2. 다층 반무한 기본해의 유도와 경계요소법에의 적용

그림 1은 내부 단위하중이 작용되는 다층 반무한 구조체를 나타낸다. 일반적으로 다층 기본해는 임의 층의 한점 S에 수평 또는 수직의 단위하중 1이 작용될 경우 임의 층의 한점 F에서 발생된 변위와 응력을 표시해야 한다. 본 절에서는 Fourier 변환을 이용하여 그림 1의 좌표계에서 단위하중에 의한 변위식과 응력식의 형성과정을 해석적으로 전개하고, 층사이 경계면의 변위와 응력의 연속조건을 이용하여 다층 기본해를 구하기 위한 알고리즘을 서술한다. 또한 이 알고리즘을 수치적으로 전개하여 수치 기본해를 계산하는 기법을 개발한다.

다층 평면동방체의 임의의 층 내부에서 물체력의 영향을 배제한 지배방정식은 다음과 같다.^[2]

$$\nabla^2 u_n + \frac{2}{x_n - 1} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 v_n + \frac{2}{x_n - 1} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 0 \quad (2)$$

여기서, 아래첨자 n은 층을 나타내고, x와 y는 Cartesian 좌표이며, u_n 과 v_n 는 각각 x, y 방향의 변위이다. 또한, ε_{xx} 와 ε_{yy} 는 변형률이고, ∇^2 는 Laplacian 연산자를 나타내며, x_n 는 탄성체의 포아손비 ν_n 와 $x_n = 3 - 4\nu_n$ 의 관계를 갖는 상수이다.

단위하중의 작용방향이 y이면, x방향변위 u_n 은 y축에 대하여 기함수가 되고, y방향변위 v_n 은 y축에 대하여 우함수가 된다. 단위하중의 작용방향이 x이면, x방향변위 u_n 은 y축에 대하여 우함수가 되고, y방향변위 v_n 은 y축에 대하여 기함수가 된다. 이와 같은 특성은 식(1)과 식(2)를 Fourier 변환으로 해석하는 과정에서 변위 u_n 과 v_n 에 대한 Fourier Sine 및 Cosine 변환식인 식(3)과 식(4)을 유도해 낸다.

$$u_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{u}_n(\xi, y) \sin[\xi x + \frac{\pi}{2}(1-\omega)] d\xi \quad (3)$$

$$v_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{v}_n(\xi, y) \cos[\xi x - \frac{\pi}{2}(1-\omega)] d\xi \quad (4)$$

여기서,

$$\tilde{u}_n(\xi, y) = (A_n + B_n y) e^{-\xi y} + (C_n + D_n y) e^{\xi y} \quad (5)$$

$$\tilde{v}_n(\xi, y) = (-1)^\omega \left\{ -[A_n + B_n(\frac{x_n}{\xi} + y)] e^{-\xi y} + [C_n + D_n(-\frac{x_n}{\xi} + y)] e^{\xi y} \right\} \quad (6)$$

이고, A_n, B_n, C_n, D_n 는 경계조건과 연속조건을 이용하여 구해지는 상수들이며, \sim 는 Fourier 변환영역에서의 변수들을 나타낸다. 또한, ω 는 단위하중의 작용방향이 x이면 0, y이면 1이다. 식(3)과 식(4)을 평면동방체의 Hooke의 법칙에 적용하면, 식(7), (8), (9)와 같은 응력에 대한 식이 구해진다.

$$\sigma_{y_n}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\sigma}_{y_n}(\xi, y) \cos[\xi x - \frac{\pi}{2}(1-\omega)] d\xi \quad (7)$$

$$\tau_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\tau}_n(\xi, y) \sin[\xi x + \frac{\pi}{2}(1-\omega)] d\xi \quad (8)$$

$$\sigma_{x_n}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\sigma}_{x_n}(\xi, y) \cos[\xi x - \frac{\pi}{2}(1-\omega)] d\xi \quad (9)$$

내부 단위하중이 작용되는 2차원 다층구조체의 변위와 응력을 구하기 위해서, 원형등분포 상

부하중이 작용되는 N 층으로 구성된 3차원 탄성구조체의 변위와 응력을 수치적으로 구할 수 있는 Michelow 의 다층탄성이론^[3]을 수정 및 보완하여 개발된 알고리즘은 다음과 같다. 상부하중의 경우와 다르게, 내부 단위하중의 영향을 고려하기 위하여 단위하중의 작용점에서 가상 경계면 s' 이 형성된다. 따라서 N 개의 층으로 구성된 다층구조체의 경우, 한개의 가상층 s' 이 추가되어 계산상 고려되는 층수는 총 $N+1$ 이 된다. 층 $n-1$ 과 층 n 사이의 경계면 n 에서 변위와 응력의 연속조건은 Fourier 영역내에서의 변위와 응력의 연속조건과 동일하다. 따라서, 경계면 n 에서 층 $n-1$ 의 변위 \tilde{u}_{n-1} , \tilde{v}_{n-1} 와 응력 $\tilde{\sigma}_{y_{n-1}}$, $\tilde{\tau}_{n-1}$ 과 경계면 n 에서 층 n 의 변위 \tilde{u}_n , \tilde{v}_n 와 응력 $\tilde{\sigma}_{y_n}$, $\tilde{\tau}_n$ 을 고려하면, 식 (10)의 행렬형태의 연속조건식이 구해진다.

$$U_{n-1}^n E_{n-1} = U_n^n E_n + 0.5 P^n \quad (10)$$

여기서,

$$U_m^n (y^n, x_m, \mu_m) = \begin{bmatrix} e^{-\delta y^n} & y^n e^{-\delta y^n} & e^{\delta y^n} & y^n e^{\delta y^n} \\ (-1)^{(1-\omega)} e^{-\delta y^n} & (-1)^{(1-\omega)} (\frac{x_m}{\xi} + y^n) e^{-\delta y^n} & (-1)^{\omega} e^{\delta y^n} & (-1)^{(1-\omega)} (\frac{x_m}{\xi} - y^n) e^{\delta y^n} \\ (-1)^{\omega} 2\mu_m \xi e^{-\delta y^n} & (-1)^{\omega} \mu_m (1+x_m + 2\xi y^n) e^{-\delta y^n} & (-1)^{\omega} 2\mu_m \xi e^{\delta y^n} & (-1)^{(1-\omega)} \mu_m (1+x_m - 2\xi y^n) e^{\delta y^n} \\ -2\mu_m \xi e^{-\delta y^n} & \mu_m (1-x_m - 2\xi y^n) e^{-\delta y^n} & 2\mu_m \xi e^{\delta y^n} & \mu_m (1-x_m + 2\xi y^n) e^{\delta y^n} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$E_n = \{A_n, B_n, C_n, D_n\}^T \quad (12)$$

$$P^n = \{0, 0, \delta(1-\omega), \delta(\omega)\}^T \quad (13)$$

이고, 아래첨자는 층을, 윗첨자는 경계면을 나타낸다. δ 는 Dirac 함수이고, μ_m 은 층 m 의 전단탄성계수이다. 식 (10)의 $0.5 P^n$ 항은 작용된 단위하중의 Fourier 변환으로서 단위하중이 작용된 가상 경계면 s' 의 연속조건에만 나타난다. 지수함수 $e^{\delta y}$ 의 발산하는 특성 때문에, 최하단층 N 의 상수 C_N 과 상수 D_N 은 0 으로 가정된다. 두 상수가 제외되면, 결정되어야 할 상수는 $4N+2$ 개가 된다. 최종적으로 $4N+2$ 원 일차 연립방정식이 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$U_1^1 E_1 = P^1 \quad y=y_1 \quad (14)$$

$$\dots \dots \dots \dots \\ U_s^{s'} E_s = U_{s'}^{s'} E_{s'} + 0.5 P^{s'} \quad y=y_{s'} \quad (15)$$

$$\dots \dots \dots \dots \\ U_{N-1}^N E_{N-1} = U_N^N E_N \quad y=y_N. \quad (16)$$

식 (16)의 양변에 역행렬 U_{N-1}^{N-1} 을 곱하고, E_{N-1} 을 $N-1$ 번째 경계면에서의 연속조건식에 대입하고 다시 역행렬 U_{N-2}^{N-1} 을 양변에 곱하면 식 (17) 과 같이 표현된다.

$$E_{N-2} = U_{N-2}^{N-1} U_{N-1}^{N-1} U_{N-1}^{N-1} U_N^N E_N \quad (17)$$

식 (17)의 과정을 최상단의 경계조건에까지 적용하면 최종적으로 식 (18) 과 같이 최하단층 N 의 미지의 상수항 E_N 만을 포함한 식이 구해진다.

$$P^1 = U_1^1 U_2^{1^{-1}} U_2^2 \cdots U_{N-1}^{N-1} U_{N-1}^N U_N^N E_N + 0.5 U_1^1 U_2^{1^{-1}} U_2^2 \cdots U_s^{s^{-1}} P^s \quad (18)$$

식 (18) 을 풀면, 상수항 E_N 에 포함된 두 개의 상수 A_N, B_N 가 결정된다. 결정된 E_N 을 식 (16) 에 대입하여 E_{N-1} 을 결정하고, 다시 E_{N-1} 을 경계면 $N-1$ 의 연속조건식에 대입하면, E_{N-2} 이 결정된다. 이 과정을 최상단층의 상수항 E_1 이 결정될 때까지 수행하면, 각 층의 상수 A_n, B_n, C_n, D_n 이 모두 결정된다. 각층의 상수들을 식 (5) 와 식 (6) 에 대입하면, Fourier 영역내에서 각층의 변위 \tilde{u}_n, \tilde{v}_n 가 구해진다. 또한, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n 을 Hooke 의 법칙에 적용하면, Fourier 영역내에서 각층의 응력 $\tilde{\sigma}_{y_n}, \tilde{\tau}_n, \tilde{\sigma}_{x_n}$ 이 구해진다. 구해진 변위 \tilde{u}_n, \tilde{v}_n 와 응력 $\tilde{\sigma}_{y_n}, \tilde{\tau}_n, \tilde{\sigma}_{x_n}$ 의 역 Fourier 변환을 수행하면, 이론적으로는 각 층의 변위 u_n, v_n 와 응력 $\sigma_{y_n}, \tau_n, \sigma_{x_n}$ 을 해석학적으로 구할 수 있다. 앞에 전개된 각층의 변위와 응력을 구하는 과정의 해석학적 수행은 불가능하다. 따라서 다층구조체의 각층의 변위와 응력을 구하는 과정은 수치해석에 의해 수행되어야 한다.

수치 기본해의 유도과정은 Fourier 변환의 적분변수 ξ 를 0 에서부터 증가시키면서, 개발된 알고리즘에 따라서 다음과 같이 수행된다. 적분변수 ξ 의 한 증분구간 $d\xi$ 에서 각 수치적분점 ξ^* 에 대응하는 $4N+2$ 개의 상수들을 연속조건으로 결정하고, Fourier 영역내에서 각성분의 증분 $d\tilde{u}_n, d\tilde{v}_n, d\tilde{\sigma}_{y_n}, d\tilde{\tau}_n, d\tilde{\sigma}_{x_n}$ 을 구한다. 각 증분의 값이 0 에 가까운 값 이하가 될때까지 수치적분하면 단위하중에 의한 각층의 실제변위 u_n, v_n 와 실제응력 $\sigma_{y_n}, \tau_n, \sigma_{x_n}$ 을 나타내는 기본해가 구해진다.

계산된 수치 기본해는 식 (19) 와 같은 경계적분방정식에 적용되어야 한다.^[4]

$$c_{ij}u_j + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (19)$$

여기서, *는 경계적분방정식에 직접 적용될 수 있는 기본해의 형태를 나타낸다. i 는 단위하중의 작용방향, j 는 경계면에서의 변위 u 와 표면력 p 의 방향이다. 또한, c_{ij} 는 경계적분경로 Γ 의 기하학적 특성에 의해서 결정되는 상수이다. 식 (19) 의 u_{ij}^* 에는 수치적으로 계산된 변위 u_n, v_n 이 대입되고, p_{ij}^* 에는 수치적으로 계산된 응력 $\sigma_{y_n}, \tau_n, \sigma_{x_n}$ 들로부터 계산된 표면력의 값이 대입된다. 식 (19) 를 이산화하여 형성된 계방정식을 수치해석하면, 이산화된 절점에서의 변위와 응력을 계산할 수 있다.

3. 수치해석 및 결과분석

본 연구에서 제안된 알고리즘에 의해 개발된 경계요소해석 프로그램은 다양한 반무한체 해석에 공동의 위치 변화나 층수에 의한 제약조건없이 간단하게 적용될 수 있다. 검증을 위하여, 원공이 있는 반무한 평판에 균일한 수평 방향의 인장력이 작용되는 경우와 다층구조를 가진 반무한 평면내에 존재하는 내공벽에 균일한 압력이 작용되는 경우에 대하여 해석하였다.

예제 1 원공이 있는 반무한 평판에 균일한 인장력이 작용되는 경우

그림 2 는 예제 1 의 해석대상을 보여 주고 있다. 그림 2 의 R 은 원공의 반지름이고, c 는 원공중심까지의 거리이다. 두 개의 평판에 대해서 해석하였다. 하나는 $\alpha=0.545$ 일 경우이고, 다른 하나는 $\alpha=0.649$ 일 경우이다. 여기서, α 는 원공의 반지름 R 의 깊이 c 에 대한 비이다. 표 1 은 수치해석의 결과를 나타낸다. 표 1 의 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 원공주변의 접선방향응력이고, T 는 작용

된 인장력이다. 또한 그림 3 은 $\alpha=0.545$ 경우이고, 그림 4 은 $\alpha=0.649$ 경우이다. 본 연구에서 개발된 프로그램에 의한 해석결과는 Mindlin 해^[5]의 결과와 근소한 오차를 보였다. 최대오차는 0.2643 으로 $\alpha=0.545$ 의 경우에 절점 7 에서 발생되고, 원공의 측면에서 대부분의 오차들이 발생되고 있음을 알 수 있었다.

표 1 수치해석 결과

절 점	$\sigma_{\theta\theta}/T$ ($\alpha = 0.545$)		$\sigma_{\theta\theta}/T$ ($\alpha = 0.649$)	
	Mindlin 해	BEM(본 연구)	Mindlin 해	BEM(본 연구)
1 (0°)	3.9899	3.7800	4.5259	4.6342
2 (9°)	3.7275	3.6380	4.1431	4.0152
3 (18°)	3.0272	2.9796	3.1676	3.0317
4 (27°)	2.0932	2.1254	1.9718	2.0247
5 (36°)	1.1330	1.2647	.8699	.9994
6 (45°)	.2837	.5084	.0034	.2599
7 (54°)	-.3926	-.1283	-.6159	-.3878
8 (63°)	-.8783	-.6623	-.10227	-.9098
9 (72°)	-1.1718	-.9651	-1.2473	-1.1720
10 (81°)	-1.2754	-1.1595	-1.3036	-1.1193
11 (90°)	-1.1936	-1.1296	-1.1951	-.9872
12 (99°)	-.9372	-.9399	-.9263	-.8495
13 (108°)	-.5267	-.5461	-.5106	-.5904
14 (117°)	.0060	-.0894	.0259	-.1015
15 (126°)	.6187	.5168	.6448	.5851
16 (135°)	1.2619	1.1379	1.2977	1.2273
17 (144°)	1.8828	1.7410	1.9311	1.7829
18 (153°)	2.4296	2.3040	2.4916	2.3955
19 (162°)	2.8567	2.7931	2.9309	2.8193
20 (171°)	3.1282	3.1504	3.2108	3.2221
21 (180°)	3.2213	3.1937	3.3069	3.5330

예제 2 반무한 다층구조계에 존재하는 내공벽에 균일한 압력이 작용되는 경우

다층구조에 대한 외부영역 경계요소해석법을 검증하기위해서 그림 5 의 깊이 35 m 에 반지름 5 m 의 원공이 있는 평면변형률 상태의 4 층 구조계를 해석하였다. 하중조건은 원공에 20 MPa 의 내압 p 가 작용되는 경우이다. 각 층의 물성은 표 2 과 같다. 이 다층구조계의 유한요소해석^[1], 내부영역 경계요소해석^[1] 및 외부영역 경계요소해석의 결과를 표 3 에 나타내었다. 그림 6 은 공동주변의 수평방향변위를, 그림 7 은 공동주변의 수직방향변위를 각각 도시하였다. 수치 기본해를 이용한 외부영역 경계요소해석의 결과는 내부영역 경계요소해석 및 유한요소해석의 결과와 비교하여 미소한 오차를 나타냈다. 수평방향변위의 경우는 최대오차가 0.0056 이고, 수직방향변위의 경우는 최대오차가 0.0095 이다. 또한 수평방향변위의 경우는 오차가 공동의 측면부에 분포하는 반면, 수직방향변위의 경우는 오차가 공동의 주변부에 고르게 분포함을 알 수 있다.

표 2 각 층의 물성

층	1	2	3	4
탄성계수 (MPa)	1,000	2,000	2,500	4,000
포아손비	0.2	0.2	0.2	0.2

표 3 수치해석 결과

절 점	수평방향변위				수직방향변위		
	FEM ^[1]	내부영역BEM ^[1]	외부영역BEM (본 연구)	FEM ^[1]	내부영역BEM ^[1]	외부영역BEM (본 연구)	
1 (0°)	.0000	.0000	.0000	-.0743	-.0708	-.0743	
2 (15°)	.0148	.0151	.0176	-.0722	-.0687	-.0726	
3 (30°)	.0286	.0291	.0288	-.0660	-.0626	-.0662	
4 (45°)	.0405	.0411	.0426	-.0562	-.0528	-.0564	
5 (60°)	.0495	.0504	.0509	-.0434	-.0402	-.0447	
6 (75°)	.0553	.0562	.0530	-.0287	-.0254	-.0306	
7 (90°)	.0572	.0582	.0569	-.0130	-.0096	-.0157	
8 (105°)	.0552	.0562	.0530	.0026	.0061	-.0008	
9 (120°)	.0495	.0504	.0508	.0172	.0208	.0129	
10 (135°)	.0404	.0412	.0425	.0296	.0333	.0243	
11 (150°)	.0286	.0291	.0287	.0391	.0429	.0338	
12 (165°)	.0148	.0151	.0176	.0451	.0490	.0399	
13 (180°)	.0000	.0000	.0000	.0471	.0510	.0415	

4. 결 론

본 연구에서 제안된 알고리즘에 의해 구해지는 수치 기본해는 효율적이고 정확하였다. 이 기본해는 외부영역 경계적분방정식에 적용되었다. 이 경계적분방정식의 이산화에 의한 수치적 접근법에 의하여 다층 구조계의 경계요소해석을 위한 프로그램을 완성하였다. 또한 그 수치해석의 결과는 기존의 내부영역 경계요소해석 및 유한요소해석의 결과와 비교하여 근소한 오차를 나타낸다. Fourier 변환을 이용하여 유도된 다층 반무한 수치 기본해를 이용한 경계요소법으로 최소한의 적분경로에 의해서 다층구조의 해석이 외부영역 문제로 수행될 수 있음을 입증하였다.

참고문헌

1. 이 상도 (1991), 유한요소와 경계요소 조합에 의한 다층구조계의 비선형해석, 연세대학교 토크공학과 석사학위 논문, 1991.
2. Karasudhi, P., *Foundations of Solid Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 196-210.
3. Michelow, J., "Analysis of Stresses and Displacements in an n-Layered Elastic System under a Load Uniformly Distributed on a Circular Area", *California Research Cooperation, California*, 1963, pp. 1-33.
4. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, 1984, pp. 177-236.
5. Mindlin, R. D., "Stress Distribution around a Hole near the Edge of a Plate under Tension", *Proc. Soc. Exptl. Stress Anal.*, Vol. 5, 1948, pp. 56-68.
6. Crouch, S.L. and Selcuk, S., "Two-dimensional Direct Boundary Integral Method for Multilayered Elastic Media", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* Vol. 29, No. 5, 1992, pp. 491-501.
7. Small J. C. and Booker J. R., "Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part I-srtip loading", *Int. J. numer methods Engng.*, Vol. 20, 1984, pp. 1025-1037.
8. Benitez F. G. and Rosakis A. J., "Three-dimensional elastostatics of a layer and a layered medium", *J. Elasticity*, Vol. 18, 1987, pp. 3-50.

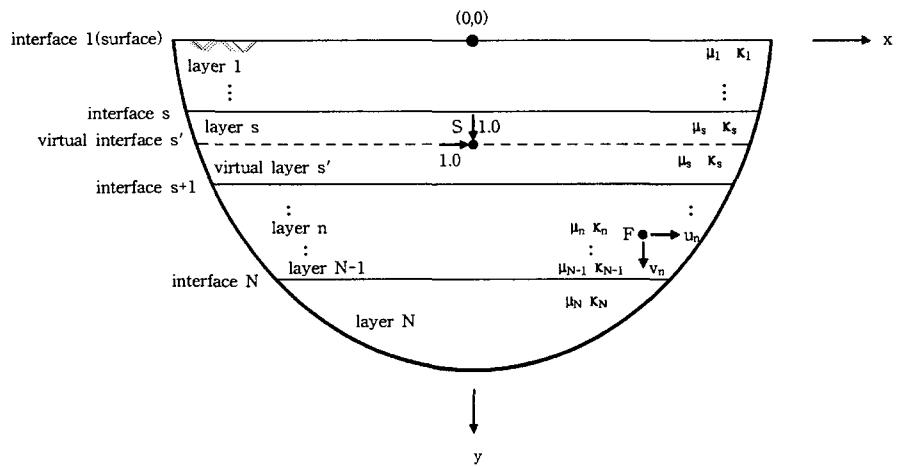


그림 1. 내부 단위하중이 작용되는 다층 반무한 구조체

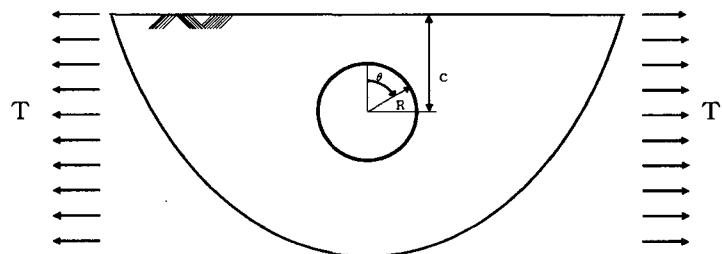


그림 2. 균일한 인장력을 받는 반무한 평판

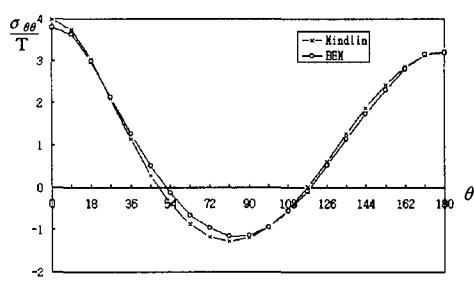


그림 3. 원공주변에서 접선방향의
응력성분의 변화 ($\alpha=0.545$)

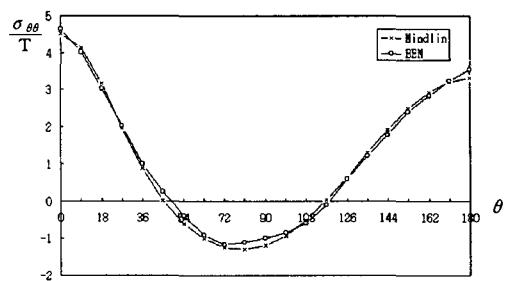


그림 4. 원공주변에서 접선방향의
응력성분의 변화 ($\alpha=0.649$)

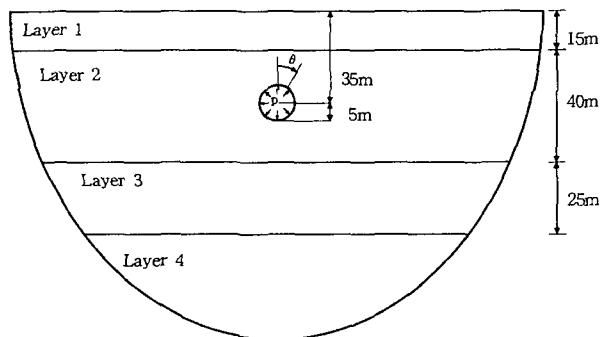


그림 5. 공동을 가진 4 층 구조의 반무한체

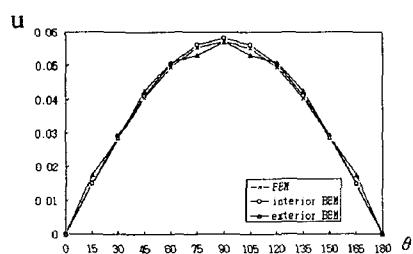


그림 6. 공동주변의 수평방향변위

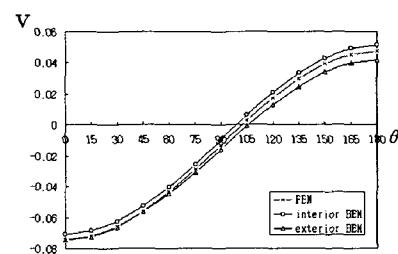


그림 7. 공동주변의 수직방향변위