

## 최적 수동 동조질량감쇠기의 특성

## The Properties of Optimal Passive Tuned Mass Dampers

노 필성\* 강 병두\*\* 김 재웅\*\*\*  
Roh, Pil-Sung Kang, Pyeung-Doo Kim, Jae-Ung

---

**ABSTRACT**

Recently, the response of a high-rise building to external dynamic force created by wind and earthquake has received much attention. This response is dependent on wind intensity, surrounding environment, building size, shape, mass, stiffness and amount of energy dissipation available in the system. The study has been done on these parameters. Attempts have been made to increase the damping in building system and thereby reduce structural response. These attempts have centered on adding an energy-dissipative system (passive tuned mass damper; passive TMD) to the building system and increasing the overall effective damping. In this paper the optimum condition of passive TMD will be derived with respect to random excitation and the properties of the optimum condition will have been studied.

1. 서 론

최근들어 지진이나 풍하중 같은 동적하중에 대한 고충구조물의 응답이 주요한 관심의 대상이 되고 있다. 이러한 응답은 여러 가지 변수들과 연관되어 있다. 즉, 바람의 세기, 주위환경, 건물의 크기 및 형태, 질량, 강성 등과 구조물의 에너지 소산량 등에 의존하며, 이러한 변수들에 따르는 진동조절에 대한 연구가 활발히 전개되고 있다<sup>1)</sup>. 그 중 에너지 소산 시스템인 수동동조질량감쇠기(이후 수동TMD로 표기)는 구조시스템의 감쇠를 증가시켜 구조물의 응답을 감소시키는 방법으로서, 보통 구조시스템에 에너지 소산 시스템을 부가하여 구조물 전체의 감쇠를 증가시키게 한다. 이에 대해서는 오래 전부터 Den Hartog<sup>2)</sup>, Crandall<sup>3)</sup>, McNamara<sup>4)</sup> 등에 의해 연구가 이루어져 왔고 또 실제의 구조물에 적용되는 단계에 이르고 있다.

수동TMD의 최적설계에서는 구조물의 응답을 최소화하는 수동TMD의 최적조건이 요구되며, 수동TMD의 최적조건은 변수최적화문제를 통하여 얻어질 수 있다.

본 연구에서는 불확정해석에 의하여 수동TMD의 최적조건을 정산 및 해석적 방법으로 검토하고 그 최적조건의 변수 특성을 파악하는 것을 목적으로 한다. 아울러 조화력해석 방법에 의한 수동TMD의 최적조건과 불확정해석 방법에 따른 최적조건의 특성을 비교하기로 한다.

\* 동아대학교 건축공학과 박사수료

\*\* 동아대학교 건축공학과 박사과정

\*\*\* 동아대학교 건축공학과 교수, 공학박사 - 165 -

## 2. 해석모델 및 운동방정식

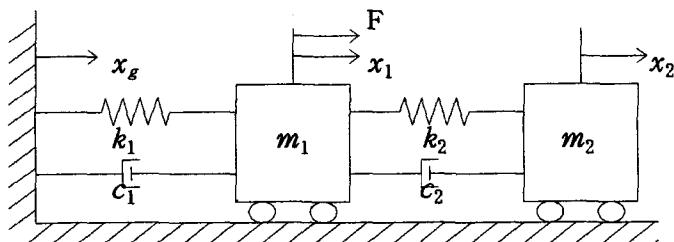


그림 1. 구조물 및 수동TMD의 해석모델

그림 1과 같은 해석모델에서 다음과 같은 구조물과 TMD의 운동방정식을 유도할 수 있다.

위에서 사용된 변수들은 아래과 같다.

$F$  : 외력       $x_1$  : 구조물의 절대변위       $x_2$  : TMD의 절대변위

$x_g$  : 지반의 변위       $m_1$  : 구조물의 질량       $m_2$  : TMD의 질량

$k_1$  : 구조물의 강성       $k_2$  : TMD의 강성       $c_1$  : 구조물의 감쇠계수

$c_2$  : TMD의 감쇠계수

상기의 절대운동방정식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ & \left( \begin{array}{c} k_1 \\ 0 \end{array} \right) x_g + \left( \begin{array}{c} c_1 \\ 0 \end{array} \right) \dot{x}_g + \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) F \end{aligned} \quad .....(3)$$

운동방정식(1), (2)에 상대변위  $y_1 = x_1 - x_g$ ,  $y_2 = x_2 - x_1$ 를 대입하여 얻게 되는 상대운동방정식을 행렬식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \dots \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} -m_1 \\ -m_2 \end{pmatrix} \ddot{x}_g + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F$$

이 된다. 위에서  $\dot{x}_g$ 는 지반가속도,  $y_1$ 은 지반에 대한 구조물의 상대변위,  $y_2$ 는 구조물에 대한 TMD의 상대변위를 각각 나타낸다.

그림 1과 같은 진동계에서 진동을 일으키는 요인으로서는 외력  $F$ (풍하중)와 지반 가속도  $\ddot{x}_g$ (지진하중) 두 가지가 있을 수 있다. 일반적으로 최대풍하중과 최대지진 하중이 동시에 작용하지 않으므로, 본 연구에서는 외력  $F$ 만 가해지는 경우와 지반 가속도  $\ddot{x}_g$ 만 가해지는 각각의 경우에 대하여 수동TMD의 특성을 살펴 보기로 한다.

### 3. 수동TMD의 최적조건

수동TMD의 최적조건을 구하기 위한 불확정해석에서의 입력하중은 정상(stationary), 정규(Gaussian)이고 크기가  $S_0$ 인 백색잡음(white noise)으로서 평균은 0(zero mean)인 것으로 가정하며, 구조물 변위의 자승평균(mean square)을 최소화하는 조건으로 최적조건을 구하고자 한다. 또한 앞서 나온 여러 변수들은 편의상 다음과 같이 변환하기로 한다.

$$w_j^2 = \frac{k_j}{m_j} \quad (j=1,2), \quad \zeta_j = \frac{c_j}{2w_j m_j} \quad (j=1,2) , \quad \mu = \frac{m_2}{m_1} , \quad f_2 = \frac{w_2}{w_1} \quad .....(5)$$

위에서  $w_1, w_2$ 는 각각 구조물과 TMD의 진동수,  $\zeta_1, \zeta_2$ 는 각각 구조물과 TMD의 감쇠비,  $\mu$ 는 질량비, 그리고  $f_2$ 는 구조물과 TMD의 진동수비를 나타낸다.

### 3-1. 외력 F에 대한 최적조건

식(3)에  $x_g = \dot{x}_g = 0$ 을 대입하면 외력만 가한 경우의 운동방정식이 얻어질 수 있다. 이 운동방정식에  $F = e^{i\omega t}$ ,  $x_1 = H_{x_1}(w)e^{i\omega t}$ ,  $x_2 = H_{x_2}(w)e^{i\omega t}$  및 각각의 1, 2차 도함수들을 대입하여  $H_{x_1}(w)$ ,  $H_{x_2}(w)$ 에 대한 연립방정식을 풀면 구조물에 대한 진동수함수  $H_x(w)$ 를 구할 수 있다.

위에서  $\Delta$ 는 다음과 같다.

진동수함수로부터 불확정해석에 따라 구조물의 조절변위의 자승평균을 구하면

와 같이 된다. 또한 구조물의 비조절( $\mu=0$ )변위를  $x$ 라 할 때 자승평균을 구하면 다음과 같다.

식(8)과 같은 형태의  $\sigma_{xi}^2$ 으로부터는 최적의  $f_2$ ,  $\zeta_2$ 를 정산적으로 구할 수 없으나, 구조물의 감쇠를 무시할 수 있는 경우 다음과 같이 최적조건을 구할 수 있다. 즉 식 (8)의  $\sigma_{xi}^2$ 에  $\zeta_1 = 0$ 을 대입하고  $f_2$ 와  $\zeta_2$ 에 대해 편미분하여 각각이 0이 되는 조건에 따라 수동TMD의 최적진동수비  $f_{2opt}$ 와 최적감쇠비  $\zeta_{2opt}$ 를 구하면 다음과 같다.

위와 같은 최적조건에 의한 조절변위와 비조절변위의 비를  $r_{opt}$ 라 할 때

이 되고,  $r_{opt}$ 로 써 최적 수동TMD의 조절효과를 살펴볼 수 있다.

이상과 같은 불확정해석에 의한 최적조건과 비교하기 위하여, 조화력해석에 의한 최적조건<sup>5)</sup>을 재정리하여 나타내면 다음과 같다.

### 3-2. 지반가속도 $\ddot{x}_g$ 에 대한 최적조건

식(4)에  $F=0$ 을 대입하면 지반이동만 있는 경우의 운동방정식이 얻어질 수 있다. 이 운동방정식에  $\ddot{x}_g = e^{i\omega t}$ ,  $y_1 = H_{y_1}(w)e^{i\omega t}$ ,  $y_2 = H_{y_2}(w)e^{i\omega t}$  및 각각의 1, 2차 도함수들을 대입하여  $H_{y_1}(w)$ ,  $H_{y_2}(w)$ 에 대한 연립방정식을 풀면 구조물에 대한 진동수함수  $H_{y_1}(w)$ 를 구할 수 있다.

$$H_{y_1}(w) = \frac{w^2 - iw(1+\mu)2f_2w_1\xi_2 - (1+\mu)f_2^2w_1^2}{4} \quad \dots \quad (15)$$

위에서  $\Delta$ 는 다음과 같다.

$$\Delta = w^4 - iw^3(\xi_1 + f_2\xi_2 + f_2\mu\xi_2)2w_1 - w^2(1 + f_2^2 + f_2^2\mu + 4f_2\xi_1\xi_2)w_1^2 + iw(f_2\xi_1 + \xi_2)2f_2w_1^3 + f_2^2w_1^4 \quad \dots \dots \dots (16)$$

진동수함수로부터 불확정해석에 따라 구조물의 조절변위의 자승평균을 구하면

$$\begin{aligned}\sigma_{y_1}^2 &= E[y_1^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{y_1}(w)|^2 S_{x_i}(w) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{y_1}(w)|^2 dw \\ &= \frac{\pi S_0}{2w_1^3} f_y(\zeta_1, \zeta_2, f_2, \mu)\end{aligned}\quad \dots \quad (17)$$

와 같이 된다. 또한, 구조물의 비조절( $\mu=0$ ) 변위를  $y$ 라 할 때 자승평균을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_y^2 = \frac{\pi S_0}{2w_1^3 \zeta_1} \quad \dots \quad (18)$$

앞서와 같이 구조물의 감쇠를 무시할 수 있는 경우 식(17)의  $\sigma_{y_1}^2$ 에  $\zeta_1=0$ 을 대입하고  $f_2$ 와  $\zeta_2$ 에 대해 편미분하여 각각이 0이 되는 조건에 따라 수동TMD의 최적진동수비  $f_{2,0pt}$ 와 최적감쇠비  $\zeta_{2,0pt}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$f_{2,0pt} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)^{1/2}}{1 + \mu} \quad \dots \quad (19)$$

$$\zeta_{2,0pt} = \left( \frac{\mu (1 - \frac{1}{4}\mu)}{4(1+\mu)(1 - \frac{1}{2}\mu)} \right)^{1/2} \quad \dots \quad (20)$$

위와 같은 최적조건에 의한 조절변위와 비조절변위의 비를  $r_{opt}$ 라 할 때

$$r_{opt} = \left( \frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots \quad (21)$$

이 되고,  $r_{opt}$ 로써 최적 수동TMD의 조절효과를 살펴볼 수 있다.

이상과 같은 불확정해석에 의한 최적조건과 비교하기 위하여, 조화력해석에 의한 최적조건<sup>5)</sup>을 재정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$f_{2,0pt} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)^{1/2}}{1 + \mu} \quad \dots \quad (22)$$

$$\zeta_{2,0pt} = \left( \frac{\frac{3}{2}\mu}{4(1+\mu)(1 - \frac{1}{2}\mu)} \right)^{1/2} \quad \dots \quad (23)$$

## 4. 수동 TMD의 최적조건의 특성

### 4-1. 정산해에 의한 최적조건

구조물의 감쇠를 무시할 수 있는 경우에 대하여 불확정해석과 조화력해석에 의하여 얻어진 최적조건  $f_{2,0pt}$ ,  $\zeta_{2,0pt}$ 의 분포를  $\mu$ 의 함수로 나타내면 그림 2, 3 과 같고, 그 특성은 다음과 같다.

1) 외력  $F$ 가 가해지는 경우(그림 2)

최적진동수비  $f_{2,0pt}$ 는 불확정해석에 의한 것이 조화력해석에 의한 것 보다 더 크게

나타나고, 최적감쇠비  $\zeta_{2opt}$ 는 조화력해석에 의한 것이 더 크게 나타나며, 전반적으로  $\mu$ 가 커질수록 그 편차가 커진다. 그러나  $\mu$ 가 약 0.02 이하의 범위에 대해서는 불확정해석과 조화력해석에 의한 최적조건  $f_{2opt}$ 와  $\zeta_{2opt}$ 는 거의 일치한다.

## 2) 지반가속도 $\ddot{x}_g$ 가 가해지는 경우(그림 3)

식(19)와 식(22) 또는 그림 3-(a)에서 알 수 있듯이 최적진동수비  $f_{2opt}$ 는 불확정해석과 조화력해석에 의한 것이 정확히 일치한다. 반면에 최적감쇠비  $\zeta_{2opt}$ 는 외력 F가 가해지는 경우보다 다소 편차가 크게 나타난다.

## 4-2. 수치해에 의한 최적조건

불확정해석에서 구조물의 감쇠를 고려할 경우의 최적조건은 정산해로 구해질 수 없기 때문에,  $\mu = 0.01 \sim 0.5$ ,  $\zeta_1 = 0 \sim 0.1$ 의 범위에 대하여 수치적으로 최적조건  $f_{2opt}$ ,  $\zeta_{2opt}$ 와 조절효과  $r_{opt}$ 를 구하여 나타내면 그림 4, 5와 같고 그 특성은 다음과 같다.

- 1) 최적 진동수비  $f_{2opt}$ 는  $\mu$ 의 증가에 따라 감소하며, 외력 F의 경우는  $\zeta_1$ 의 영향을 받지 않음을 알 수 있다 (그림 4-(a), 5-(a)).
- 2) 최적감쇠비  $\zeta_{2opt}$ 는  $\mu$ 의 증가에 따라 같이 증가하나,  $\zeta_1$ 의 영향은 거의 받지 않는다(그림 4-(b), 5-(b)).
- 3) 조절효과는  $\mu$ 가 커질수록 크나,  $\mu$ 의 증가폭에 비하여 조절효과의 증가폭은 줄어들며, 지반가속도의 경우 질량비가 약 0.2 이상일 때 조절효과는 거의 증가하지 않는다. 또한  $\zeta_1$ 의 크기가 작을수록 조절효과는 크게 나타나며, 지반가속도  $\ddot{x}_g$ 보다 외력 F가 작용하는 경우에서 다소 조절효과가 큰 것으로 나타난다 (그림 4-(c), 5-(c)).
- 4)  $\zeta_1$ 을 무시한 경우의 정산해를 사용하더라도 최적조건  $f_{2opt}$ ,  $\zeta_{2opt}$ 를 큰 오차없이 산정할 수 있다.

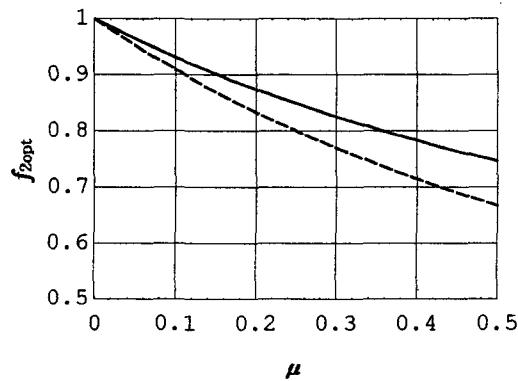
## 5. 결 론

구조물에 외력 및 지반가속도가 가해졌을 때 구조물의 응답을 최소화하는 수동TMD의 최적조건의 특성에 대한 연구결과는 다음과 같다.

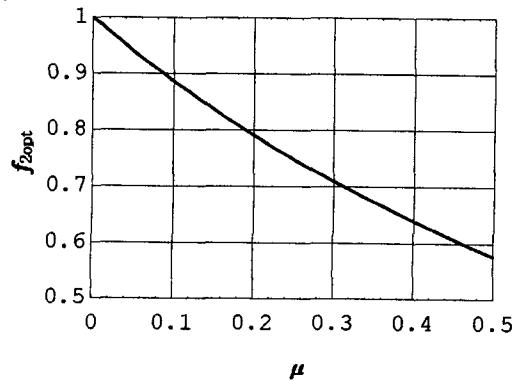
1. 질량비가 큰 경우 수동TMD의 최적조건은 해석방법(불확정해석, 조화력해석)에 따라 다르기 때문에, 입력하중의 성격을 고려하여 최적조건을 선정해야 할 것이다. 단, 질량비가 작은 경우(약 0.02 이하) 두 가지 해석방법에 의한 최적조건은 거의 동일한 것으로 나타난다.
2. 구조물의 감쇠비가 작을수록 최적수동TMD에 의한 조절효과는 크게 나타나며, 질량비가 커질수록 조절효과는 커지나 질량비가 약 0.2 이상인 경우 조절효과는 크게 증가하지 않는다.
3. 수동TMD의 최적조건을 구할 때 구조물의 감쇠비를 고려하지 않은 정산해를 사용하더라도 실용적 관점에서 큰 오차가 없는 것으로 나타난다.

## 참 고 문 헌

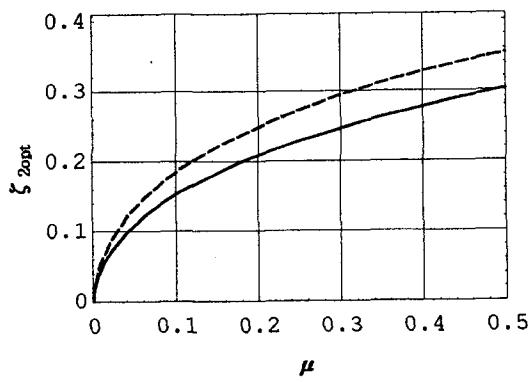
1. Rao, S. S., *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1995.
2. Den Hartog, J. P., *Mechanical vibration*, Dover Publications, Inc., New York, 1984
3. Crandall, S. H., and Mark, W. D., *Random vibration in mechanical systems*, Academic Press, Inc., New York, 1973.
4. McNamara, R. J., "Tuned mass dampers for buildings," *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 103, No. ST9, Feb., 1977, pp.1785-1798.
5. 강병두, "구조물의 진동조절을 위한 최적진동 흡수계에 관한 연구," 석사학위논문, 동아대학교, 1996. 2.



2-(a) 최적진동수비

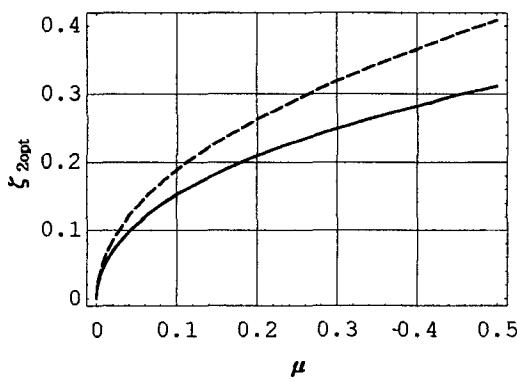


3-(a) 최적진동수비



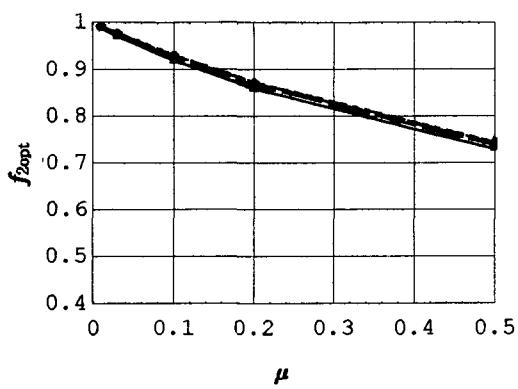
2-(b) 최적감쇠비

그림 2. 외력  $F$ 가 가해진 경우의  
최적조건 (불확정해석(—),  
조화력해석(----))

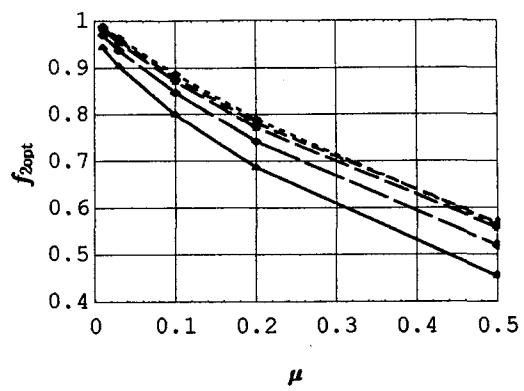


3-(b) 최적감쇠비

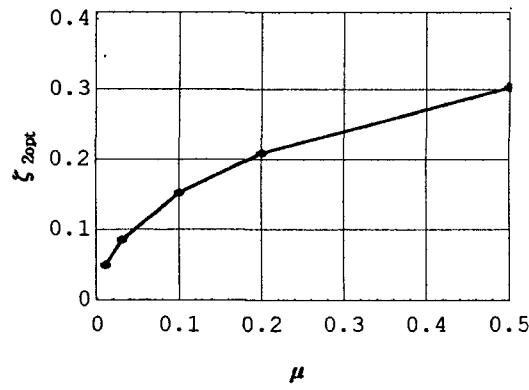
그림 3. 지반가속도  $x_g$ 가 가해진  
경우의 최적조건 (불확정  
해석(—), 조화력해석(----))



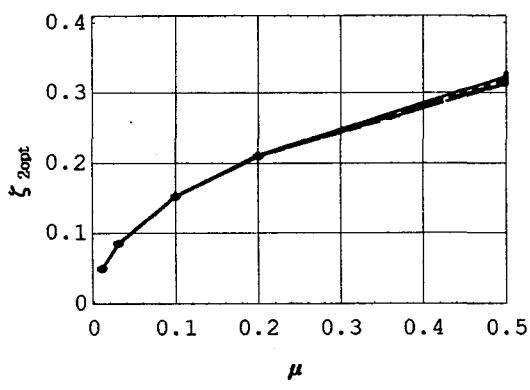
4-(a)  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른  $f_{2opt}$ 의 분포



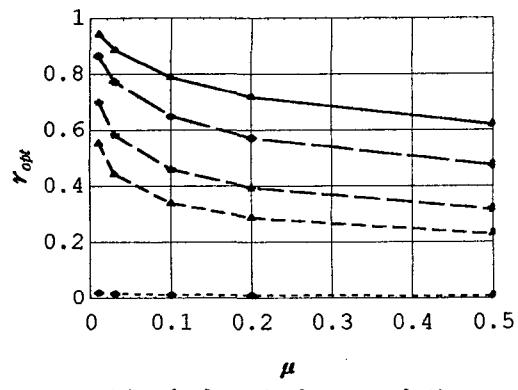
5-(a)  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른  $f_{2opt}$ 의 분포



4-(b)  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른  $\zeta_{2opt}$ 의 분포



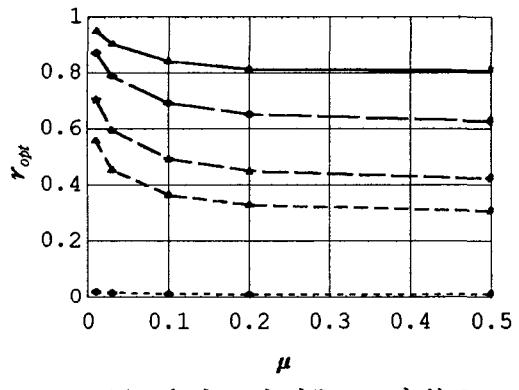
5-(b)  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른  $\zeta_{2opt}$ 의 분포



4-(c)  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른  $r_{opt}$ 의 분포

그림 4. 외력  $F$ 가 작용하는 경우의  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른 최적조건과 조절효과

- (  $\zeta_1=0.00$  (----),  $\zeta_1=0.01$  (---) )
- (  $\zeta_1=0.02$  (- - -),  $\zeta_1=0.05$  (- - - -) )
- (  $\zeta_1=0.10$  (—) )



5-(c)  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른  $r_{opt}$ 의 분포

그림 5. 지반가속도  $x_g^2$ 가 작용하는 경우의  $\zeta_1$ 과  $\mu$ 에 따른 최적조건과 조절효과

- (  $\zeta_1=0.00$  (----),  $\zeta_1=0.01$  (---) )
- (  $\zeta_1=0.02$  (- - -),  $\zeta_1=0.05$  (- - - -) )
- (  $\zeta_1=0.10$  (—) )