

'96 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

우성형 중성자 수송방정식을 이용한
광침투현상 감소 및 제거

노 태 완
홍익대학교

요 약

특정한 방향성분에 대한 방향중성자속을 정의하는 방향차분 수송 방정식(discrete ordinates or S_N transport equation)과 달리 방향변수를 구분된 방향영역에 대하여 적분하고, 해당 방향영역 내에서의 방향중성자속이 일정하다고 가정하는 영역상수법(piecewise constant method)을 이용하여 유사방향차분방정식(discrete ordinates-like equation)을 유도하여, 이를 Boltzmann 수송식과 2 계 우성수송식(even-parity transport equation)에 적용하여 기존의 방향차분법의 단점인 광침투현상(ray effects)을 감소시키고, 우성수송식의 교차미분항을 제거한 단순우성방정식(simplified even-parity equation)을 사용하여 광침투현상을 제거하였다. 이는 단순우성방정식의 또 다른 장점을 제시한다.

1. 서론

중성자 거동은 위치, 방향, 중성자 에너지 및 시간을 변수로 하는 중성자 수송방정식(neutron transport equation)¹으로 기술된다. 1 계 편미방 형태의 Boltzmann 수송방정식에 대한 수치해법은 이미 잘 알려져 있지만 우성수송방정식(even-parity transport equation)¹에 대하여는 2 계 유사타원형(elliptic-like) 편미방을 풀어야 하는 근본적인 계산 비효율성 때문에 적극적으로 시도되지 않았다. 최근 전산기 병렬처리방식(parallel processing)⁵이 발전됨에 따라, 기존의 1 계 수송방정식에 대한 해법이 순차적 직렬계산에 기초하고 있어 영역분리법(domain decomposition)⁶ 등과 같은 특수한 기법을 사용하지 않고는 병렬계산이 부적합한 반면, 우성수송방정식은 확산방정식(diffusion equation)의 경우와 같이 최종계산이 행렬계산으로 귀결되어 병렬계산에 유리한 점에 착안하여 그 수치해법에 관한 연구가 활발해지고 있다. 물론 현대적인 노달이론에서는 1 차원 확산방정식을 이용한 다차원 확산방정식 해법을 개발하여 대형 행렬계산을 피하고 있지만 이 역시 수송해에 대한 노달이론에서도 마찬가지로 추구하고 있다. 최근의 우성수송방정식 수치해법에 관한 연구²⁻⁴에서 수송방정식에 대한 합리적 근사인 단순우성방정식(simplified even-parity equation)의 개념이 정립되었고, 이는 기존 수송방정식에 비하여 해의 절대적 양수성(guaranteed positivity), 높은 가속 효율성(higher acceleration efficiency), 감소된 광침투현상(mitigated ray effects)을 갖는 것으로 검증되었다. 또한 제안된 단순우성방정식은 사용되는 quadrature set 을 적절히 변경하여 단순 P_N (simplified P_N) 방정식⁷과 같아짐을 보였다. 특히 새로운 수치해법 개발 측면에서 보면 단순우성식의 형태가 위치변수에 타원형(elliptic) 이므로 노달이론등 기존의 확산이론에서 개발된 방법을 접목하기에 용이하다. 본

논문에서는 수송방정식의 방향변수 처리법의 하나인 영역상수법(piecewise constant method)을 1 계 및 2 계 수송방정식에 적용하여 광침투 감소효과를 비교하고 나아가 단순우성방정식을 사용한 광 침투현상 제거에 관하여 기술한다.

2. 방향차분법 및 영역상수법

2.1 방향차분법(Discrete-Ordinates or S_N Method)

수송방정식의 해법중 중성자속의 방향변수를 차분화 하는 방향차분법¹이 계산효율성 때문에 널리 사용되고 있다. 수송방정식은 등방성 산란 및 공급(isotropic scattering and source)을 가정하면

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) \quad (1)$$

로 나타난다. 여기서 \vec{r} 과 $\hat{\Omega}$ 는 위치 및 방향변수이고, φ 는 방향중성자속(angular flux), ϕ 는 중성자속(scalar flux), S 는 방향에 무관한 중성자공급을 나타낸다. σ 와 σ_s 는 거시적 총단면적(macroscopic total c.x.) 및 산란단면적(scattering c.x.)이다. 방향차분법은 식(1)의 양변에 Kronecker delta $\delta(\Omega - \Omega_m)$ 을 곱하여 전체 방향영역으로 적분하여 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} d\Omega \delta(\Omega - \Omega_m) \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \int_{\Omega} d\Omega \delta(\Omega - \Omega_m) \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) \\ &= \int_{\Omega} d\Omega \delta(\Omega - \Omega_m) \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \int_{\Omega} d\Omega \delta(\Omega - \Omega_m) S(\vec{r}) \end{aligned}$$

여기서, 특정한 방향에 대한 방향중성자속을

$$\varphi_m(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) \text{ at } \Omega = \Omega_m$$

로 나타내고, 전체 방향을 $\int_{\Omega} d\Omega = 1$ 로 규격화 하면 다음과 같은 S_N방정식을 얻는다.

$$\hat{\Omega}_m \cdot \nabla \varphi_m(\vec{r}) + \sigma(\vec{r})\varphi_m(\vec{r}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (2)$$

식(2)를 이용하는 방향차분법은 P_N법에 비하여 계산효율성을 증대시키고, 방향근사 정도를 단일 전산코드 내에서 쉽게 변화시킬 수 있으며, 다차원 문제에 탁월한 우월성을 보이지만 방향 차분화에서 비롯되는 광침투 현상(ray effects: 계산상으로 나타나는 중성자속의 비물리적 증가현상 현상)^{8,9}이 단점으로 지적된다.

2.2 영역상수법(Piecewise Constant Method)

방향차분법에서 특정한 방향에 대하여 방향중성자속을 정의한 것과 달리 영역상수법에서는 전체 방향을 몇개의 영역으로 나누어 각각의 영역에 대하여 방향중성자속이 일정하다고 가정하고, 방향계수를 해당영역에 대하여 적분하여 결정한다. 이러한 접근방법의 기본은 기존 방향차분법에서 delta 함수로 나타나는 방향성분을 상대적으로 넓은 방향영역에 대하여 일정하게 분포시킴으로 'angular smearing effect'를 부여하는 것이다. 식(1)을 임의의 방향영역 Ω_m 에 대하여 적분하면

$$\int_{\Omega_m} d\Omega \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \int_{\Omega_m} d\Omega \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \int_{\Omega_m} d\Omega \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \int_{\Omega_m} d\Omega S(\vec{r})$$

이 된다. 이때 해당 방향영역의 크기는 가중치(weight) $w_n = \int_{\Omega_n} d\Omega$ 으로 표시되고, 전체 방향영역은 $\int_{\Omega} d\Omega = \sum_{n=1}^N w_n = 1$ 로 규격화 된다. 영역 Ω_n 에서의 평균 중성자속 $\varphi_n(\vec{r})$ 을

$$\varphi_n(\vec{r}) = \frac{1}{w_n} \int_{\Omega_n} d\Omega \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega})$$

으로 정의하면, 다음과 같은 유사차분방정식(S_N-like equation)

$$\hat{\Omega}_n \cdot \nabla \varphi_n(\vec{r}) + \sigma(\vec{r})\varphi_n(\vec{r}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

을 얻는다. 다만 식(3)에서 $\hat{\Omega}_n$ 은 $\hat{\Omega}_n = \int_{\Omega_n} d\Omega \hat{\Omega}$ 로 계산되고, S_N방정식에서 나타나는 차분방향과 달리 방향벡터를 해당영역에 대하여 적분한 값이다. 여기서 식(3)을 PC_N 방정식으로 부른다.

3. S_N 및 PC_N의 2차원 방정식

S_N 방정식[식(2)]의 2차원 형태는 방향벡터 $\hat{\Omega}$ 의 성분을 (μ, η)라 할때

$$\mu_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \eta_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \sigma(\vec{r})\varphi_m(\vec{r}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (4)$$

이 되고, PC_N방정식[식(3)]의 2차원 형태는

$$\mu_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \eta_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \sigma(\vec{r})\varphi_n(\vec{r}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

이다. 여기서 μ 와 η 는 극각(polar angle) θ 와 방위각(azimuthal angle) ω 와

$$\mu = \cos\theta, \quad \eta = \sqrt{1-\mu^2} \cos\omega$$

의 관계를 갖는다. S₂ 근사의 경우 (μ_m, η_m), $m=1,2,3,4$ 의 4방향이 사용되며 Gaussian quadrature set을 사용하는 경우 $\mu_1=\eta_1=1/\sqrt{3}$ 이고 4개의 사분면에 대칭으로 나머지가 존재한다. 반면 PC₂근사에서는 식(5)를 사용하여 (μ_n, η_n), $n=1,2,3,4$ 를 계산하여야 하는데 방향영역을 그림 1과 같이 분리하는 경우

$$\mu_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \mu = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{1}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \eta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} d\mu \int_0^{\pi/2} \cos\omega d\omega = \frac{1}{2}$$

이고, 같은 방법으로 4개의 사분면에 대칭인 나머지 방향계수를 구한다.

수송방정식에 대한 S₂ 및 PC₂ 근사가 광침투현상에 미치는 영향을 비교하기 위하여 그림 2와 같은 국부 중성자원(localized neutron source)을 갖는 문제를 계산하였다. 위치변수의 차분화에서 나타나는 절단오차(spatial truncation error)를 충분히 줄이기 위하여 단위격자 길이가 0.075 mean-free-path에 해당하는 0.1cm의 등간격 격자를 사용하였다. 그림 3은 y=1.95cm에서의 중성자속의 변화를 x의 함수로 보여준다. 비교를 위하여 같은 격자간격을 사용한 S₈결과를 도시하였다. S₂의 경우 중성자속이 중성자원에 가까이 가면서 줄어드는 광침투현상을 명백히 보여주며, PC₂의 경우도 광침

두 감소효과가 나타나지 않는다. 이는 μ 와 η 만으로 나타나는 1 계 수송방정식의 경우 PC_N 근사도 결과적으로는 새로운 차분방향을 설정한 것에 불과하기 때문에 해석된다.

4. 우성수송방정식에 대한 PC_N 근사

일반적으로 2 계 S_N 우성수송방정식은 1 계 S_N 수송방정식으로 부터 대수적으로 구해진다. 식(1)에 해당하는 2 차원 우성수송식은

$$\begin{aligned} -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \mu \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - \eta^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \sigma(\vec{r}) \chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) \\ = \sigma_s(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad (0 \leq \mu \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1) \end{aligned} \quad (6)$$

이며, 여기서 $\chi(\vec{r}, \hat{\Omega})$ 는 우성방향중성자속(even-parity angular flux) 이다. 식(6)의 S_N 방정식은

$$\begin{aligned} -\mu_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \mu_m \eta_m \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial x} \right) - \eta_m^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial y} + \sigma(\vec{r}) \chi_m(\vec{r}) \\ = \sigma_s(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad (m=1, 2, \dots, M/2) \end{aligned} \quad (7)$$

이 된다. 여기에 S_2 -Gaussian quadrature, $\mu_1 = \eta_1 = 1/\sqrt{3}$ 을 사용하면 식(7)의 좌변 1,2,3 항의 방향 계수값은 모두 1/3 이 됨을 주목한다.

영역상수법을 우성수송식에 적용하기 위하여 식(6)에 PC_N 근사를 하면

$$\begin{aligned} -\mu_n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \mu_n \eta_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) - \eta_n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \sigma(\vec{r}) \chi_n(\vec{r}) \\ = \sigma_s(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad (n=1, 2, \dots, N/2) \end{aligned} \quad (8)$$

를 얻는다. 여기서는 편의상 방향계수값 μ_n^2 , $\mu_n \eta_n$, η_n^2 (경계격자 계산시 μ_n , η_n 도 필요함.) 들을 μ_n , η_n 의 곱으로 표시하였으나, 실제로 이들은 방향영역에 대하여 개별적으로 구해져야 한다. 예를 들면 PC_2 의 경우 방향영역을 그림 4 와 같이 구분하였을때, 영역 1 에 해당하는 방향계수는

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \mu^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu^2 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{1}{3} \\ \eta_1^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \eta^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\mu^2) d\mu \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega d\omega = \frac{1}{3} \\ \mu_1 \eta_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \mu \eta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu \sqrt{1-\mu^2} d\mu \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega = \frac{2}{3\pi} \\ \mu_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \mu = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{1}{2} \\ \eta_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega \eta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} d\mu \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이 되고, 여기서 μ_1^2 , η_1^2 , $\mu_1 \eta_1$ 은 각각 $\mu_1 \cdot \mu_1$, $\eta_1 \cdot \eta_1$, $\mu_1 \cdot \eta_1$ 이 아니며 μ_1 , η_1 과는 무관한 계수이다. 영역 2 에 대해서도 같은 방법으로 $\mu_2^2 = \eta_2^2 = 1/3$, $\mu_2 \eta_2 = -2/3\pi$, $\mu_2 = 1/2$, $\eta_2 = -1/2$ 를 얻는다.

우성수송식에 대한 S_2 및 PC_2 근사를 같은 문제[그림 2]에 적용하여 그 결과를 그림 5 에 도시하였다. 우성수송식에 대한 S_2 근사는 1 계 수송식의 S_2 근사와 마찬가지로 심한 광침투현상을 보이지만 PC_2 근사의 경우 동현상이 급격히 줄었음을 볼 수 있다. 참고로 단순우성방정식의 S_2 결과를 첨부하였는데 이는 참고문헌[4]에 따르면 우성수송식의 교차미분(cross derivative)항이 제거됨으로 인하

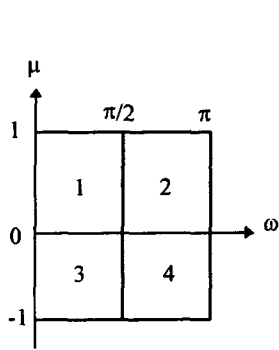
여 광침두현상을 보이지 않는다. 식(7)과 식(8)에 대한 S_2 및 PC_2 근사의 경우 교차미분항의 방향 계수인 $\mu\eta$ 의 절댓값이 S_2 근사의 경우 $1/3$, PC_2 근사의 경우 $2/3\pi$ 가 되어 PC_2 의 교차미분항 기여도가 타항들에 비하여 더 적어짐을 알수 있고, 이는 PC_2 근사에 의한 광침두현상 감소를 설명한다. 단순우성식은 그 형태에 있어서 canonical 단순 P_N 식(simplified P_N)과 사용되는 quadrature set 이 다른 점을 제외하고는 완전히 일치한다. 하지만 이 두식은 그 해에 있어서 미묘한 차이를 보이고 있고, 단순 P_N 식은 자체의 회전독립성(rotational invariance)으로 인하여 광침두현상을 보이지 않는다. 그렇다면 단순우성식이 광침두현상을 완전히 제거하느냐에 대한 답을 얻기 위하여는 단순우성식과 단순 P_N 식의 해의 미묘한 차이가 서로 다른 quadrature set 을 사용함에서 기인한 것인지, 아니면 단순우성식이 회전 종속성을 갖는 것인지에 대한 연구가 진행되어야 할 것이다.

5. 결론

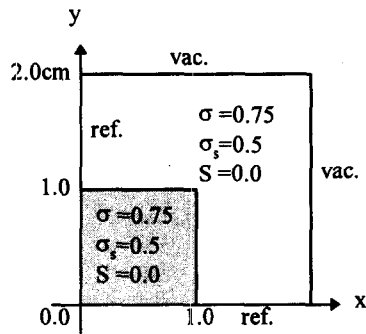
특정한 방향에 대하여 방향중성자속을 정의하는 방향차분법과 달리, 영역상수법에서는 구분된 방향영역 내에서 방향중성자속이 일정하다는 가정하에 우성방정식에 대한 유사 S_N 방정식을 유도하고 이를 이용하여 광침두현상(ray effects)을 줄일 수 있었다. 우성방정식에 영역상수법을 적용했을 때 교차미분항의 기여도를 감소시키는 점이 광침두 감소효과의 원인으로 생각되며, 우성방정식의 교차미분항이 제거된 단순우성방정식의 광침두 완전제거 가능성을 보여준다. 이는 수송방정식에 대한 합리적 근사로서의 단순우성방정식의 또 다른 장점을 제시한다. 한편, 영역상수법을 사용하는 경우 해의 정확도에 미치는 영향에 대한 계속적인 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

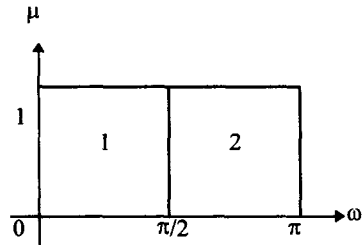
- 1) E.E.Lewis and W.F.Miller,Jr.,*Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons (1993)
- 2) W.F.Miller,Jr. and T.W.Noh,"Finite-Differences versus Finite elements in Slab Geometry, Even-Parity Transport Theory", *Transport Theory and Statistical Physics*, **22** (1993)
- 3) T.W.Noh, W.F.Miller,Jr., and J.E.Morel,"Improved Approximations Applied to the S_N Even-Parity Equations", *Trans.Am.Nucl.Soc.*,**69**, 214 (1993)
- 4) T.W.Noh, W.F.Miller,Jr., and J.E.Morel,"The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equation in Two-Dimensional X-Y Geometry", will be published on *Nucl.Sci.Eng.* (May 1996)
- 5) Y.Y.Azmy,"Multidimensional Nodal Transport Methods for Multiple-Instruction Multiple-Data, Distributed Memory Machines", *Trans.Am.Nucl.Soc.*,**56**, 292 (1988)
- 6) A. Haghghat, Y.Y.Azmy,"Parallelization of a Spherical S_N Algorithm Based on the Spatial Domain Decomposition", Proceedings of the Conference on Advances in Mathematics, Computation, and Reactor Physics, Pittsburgh, PA, USA, April 28 - May 1, 1991
- 7) E.W.Larsen, J.M.McGhee, and J.E.Morel,"The Simplified P_N Equations as an Asymptotic Limit of the Transport Equation", *Trans.Am.Nucl.Soc.*,**66**, 231 (1992)
- 8) K.D.Lathrop,"Ray Effects in Discrete Ordinates Equations", *Nucl.Sci.Eng.*,**32**, 357 (1968)
- 9) K.D.Lathrop,"Remedies for Ray Effects", *Nucl.Sci.Eng.*,**45**, 255 (1971)



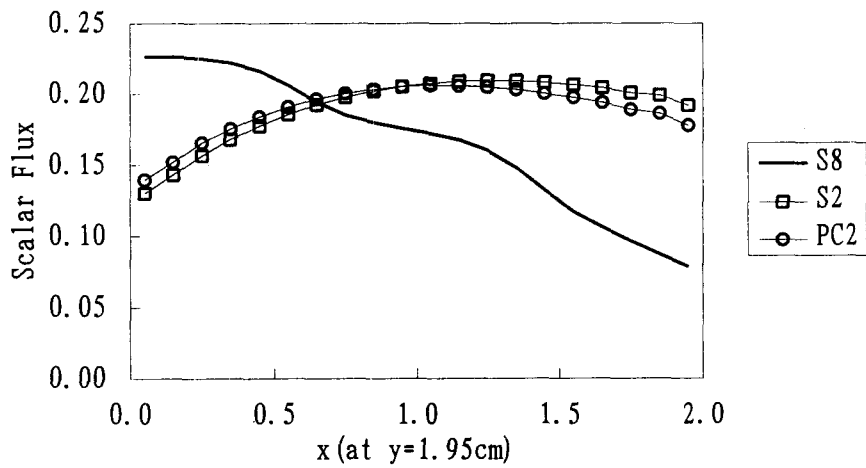
(그림 1) 1 계수송식의 PC₂ 근사



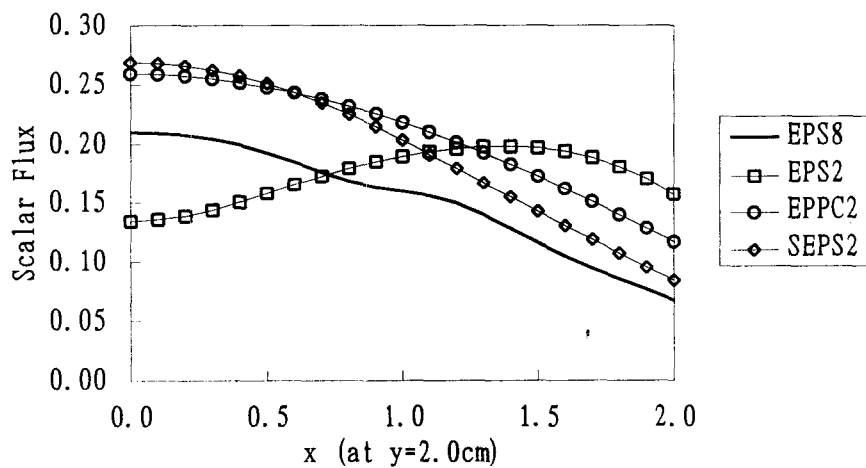
(그림 2) 예 제



(그림 4) 우성수송식의 PC₂ 근사



(그림 3) 1 계수송방정식을 이용한 중성자속 분포



(그림 5) 우성수송방정식을 이용한 중성자속 분포