

## 동적 불완전 수리 모형 및 분석 절차의 개발

백 상업\*, 임태진\*\*, 홍 정식\*\*\*, 이 창훈\*, 김 태운\*\*\*\*

\* 서울 대학교

\*\* 숭실 대학교

\*\*\* 서울 산업대학교

\*\*\*\* 한국 원자력연구소

### 요 약

본 연구는 유지, 보수되는 상시 작동 시스템에 대한 신뢰성 분석을 위해 동적 불완전 수리 모형 및 분석 절차의 개발을 수행하였다. 또한 수리 상태에 대한 데이터가 완전히 잠재적(masked)이라 하더라도 기본 분포(base-line distribution)가 와이블 분포라는 가정하에 모수적 추정 절차를 개발하였다. 개발된 추정 절차는 기본적으로 EM(Expectation and Maximization : EM) 알고리즘의 틀/framework)을 유지하고 있다. 특히 최소 수리 특성으로 인해 분포가 변화함에 따라 발생하는 추정의 어려움을 해결하기 위해 데이터 변환(transformation)식을 제시하고 이러한 변환 데이터를 사용함으로써 추가적 데이터의 요구없이 잠재적 데이터를 사용하여 추정을 가능하게 하는 모수 추정 알고리즘을 제시하였다.

### 1. 서론

유지, 보수되는 시스템의 신뢰성 분석에 있어 시스템의 노후화(aging) 및 보수에 의한 시스템 수명의 개선에 대한 기존의 모형은 크게 '최소 수리 모형(minimal repair model)', '개선 모형(improvement model)' 및 '불완전 수리 모형(imperfect repair model)'으로 분류할 수 있다. 그러나 최소 수리 모형은 시스템의 대체(replacement)에 의한 개선을 설명할 수 없으며, 개선 모형은 시스템에 대한 보수 효과가 매번 보수 작업 때마다 동일함을 가정으로 사용하고 있다. 따라서 이러한 모형들을 이용하면 보수 가용성에 의한 영향에 대해서는 모형화가 불가능하므로 제한적인 모형들이라고 할 수 있다. 반면에 불완전 수리 모형은 수리 이후 시스템의 상태는 확률  $p$ 에 의해 'Good-As-New' 상태,  $(1-p)$ 의 확률로 'Bas-As-Old' 상태가 된다는 가정을 사용하고 있다. 이러한 가정은 시스템이 작동 상태로 성공적으로 복구되거나, 확률  $p$ 로 복구에 실패하면 기존의 시스템은 폐기하고 새로운 시스템으로 대체된다고 해석할 수 있다. 불완전 수리 모형은 보수 가용성의 변화를 반영할 수 있다는 측면에서 관심의 대상이 되어 왔다.

하지만 기존의 불완전 수리 모형에서는 완전 수리 확률을 일정한 상수  $p$ 로 두었다. 이를 해석하면 완전 수리 여부는 수리 설비의 가용성과 같은 외부적 요소(external factor)에 의해 지배된다고 볼 수 있으며, 또한 외부 요소는 매번 동일하게 작용한다고 해석된다. 그러나 현실적으로 보수 가용성은 보수 능력 및 보수 프로그램에 의해 영향을 받기 때문에 항상 일정하다고 보기 어렵

---

+ 본 연구는 과학 기술처에서 주관한 한국 원자력연구소의 원자력 안전성 향상 연구 지원에 의해 수행되었음.

다.

따라서 본 연구는 보수 가용성간의 종속성을 반영할 수 있는 동적 불완전 수리 모형을 제시함으로써, 기존의 모형에 대한 확장 및 보수 가용성간의 종속성에 대한 정량화가 가능한 새로운 신뢰성 모형을 제시하였다고 할 수 있다.

또한 연구에서는 수리 상태에 대한 데이터가 완전히 잠재적(masked)이라 하더라도 기본 분포(base-line distribution)가 와이블 분포라는 가정 하에 모수적 추정 절차를 개발하였다.

일반적으로 불완전 수리 모형에 대한 추정은 최소 수리 특성으로 인해 추정에 어려움이 존재한다. 따라서 추정에 관한 연구는 거의 제시되지 않고 있다. 일부 연구가 제시되기는 하였으나 수리후 시스템의 상태에 대한 부가적 데이터를 요구하며, 이러한 데이터가 있을 때에도 비모수적 MLE(Maximum Likelihood Estimator)의 제시에 그치고 있다.

개발된 추정 절차는 기본적으로 EM(Expectation and Maximization : EM) 알고리즘의 틀/framework)을 유지하고 있다. 최소 수리 특성에 의한 분포 변화에 따른 추정의 어려움을 해결하기 위해 본 논문에서는 데이터 변환(transformation)식을 제시하고 이러한 변환 데이터를 사용함으로써 추가적 데이터의 요구 없이 잠재적 데이터를 사용한 모수 추정 알고리즘을 제시하였다.

연구에서 제시한 동적 불완전 수리 모형은 기존의 불완전 수리 모형의 과도(transient state) 상태를 표현할 수 있으며, 또한 기존의 불완전 수리 모형은 동적 불완전 수리 모형에서 전이 확률이 특수한 형태로 모형화할 수 있어 본 모형이 기존 모형을 포함하는 보다 일반적이고 유연한 모형이라 할 수 있다.

## 2. 동적 불완전 수리 모형

모형에서 사용되는 가정은 다음과 같다.

- ① 시스템은 'Good-As-New' 상태에서 가동을 시작한다.
- ② 시스템의 수리 작업이 수행될 때, 수리의 형태간에는 1차 종속성이 존재할 수 있다.
- ③ 시스템은 수리 가능하다.
- ④ 수리 형태에 대한 자료는 주어지지 않고, 연속 고장간 시간만이 고장 데이터로 주어진다.
- ⑤ 수리 형태는 완전 수리와 최소 수리로 구성된다.

위 가정에서 가정 ①, ③, ⑤는 기존의 불완전 수리 모형에 쓰이고 있는 가정이다. 위 가정 ②는 기존 모형과 같이 독립성 가정을 사용하는 경우를 포함하므로 본 모형의 대상이 보다 일반적인 의미를 의미한다. 2차의 종속성을 검증하기 위해서는 설비와 고장 구조에 대한 철저한 조사와 분석이 요구되며, 설비 가용성에 대한 정량화 분석이 요구되기 때문에 현실적인 측면에서 의미가 없다고 할 수 있다. 모형화를 위해 다음을 정의한다.

[정의 1] 수리 형태를 상태(state)로 정의한다.

$n$ 번째 수리가 완전 수리이면,  $s_n=0$ ,  $n$ 번째 수리가 불완전 수리이면,  $s_n=1$

위 정의를 이용하여 모형을 정리하면 다음과 같다.

- ① 고장간 시간  $y_n$ 의 분포는 상태 변수 벡터에 의해 결정된다.

$$; (s_{n-1}=0) \text{ 이면 } y_n \sim F(t)$$

$$(s_{n-k-1}=0, s_{n-k}=1, \dots, s_{n-1}=1) \text{ 이면 } y_n \sim F_{nk}(t)$$

- ② 상태 변수  $\{s_n, n=1, \dots, N\}$ 는 마코프 특성을 갖는다.

$$; \text{즉, } \Pr(s_n=j | s_{n-1}=i, s_{n-2}, \dots, s_1) = \Pr(s_n=j | s_{n-1}=i) = p_{ij}$$

위에서 사용된  $F_{nk}(t)$ 를 정의해 보면 다음과 같다.

[정의 2]  $F(t)$ 는 배경 분포이고,  $s_{nk}(t) = 1 - F_{nk}(t)$ ,  $F_1(t) = F(t)$ 이면,

$y_n$ 에 대한 분포는 다음과 같이 정의된다.

$$S_{nk}(t) \equiv S\left(\sum_{i=n-k}^n y_i > t + s \mid S\left(\sum_{i=n-k}^{n-1} y_i > s\right)\right), \text{ 이때 } k=2, \dots, (n-1)$$

위에서 정의한 동적 불완전 수리 모형에 대한 표본 경로는 [그림1]과 같다.

기존 모형과의 포함 관계에 대한 정리를 다음과 같이 유도할 수 있다.

[정리] 다음의 포함 관계가 성립한다.

최소 수리 모형  $\subset$  불완전 수리 모형  $\subset$  동적 수리 모형

동적 불완전 수리 모형으로 표현한 수명 분포는 또한 불완전 수리 모형으로 표현한 수명 분포와 비교하면 다음과 같다.

- 동적 불완전 수리 모형

$$F(n, t) = p_{00}^{(n-1)} F(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{00}^{(n-k-1)} \cdot p_{01} \cdot p_{11}^{k-1} \cdot F_{nk}(t)$$

위에서  $p_{00}^{(n-1)}$ 은 0상태에서  $(n-1)$ 번 전이후 0이 될 확률을 의미하며,  $p_{11}^k$ 은  $p_{11}$ 의  $k$ 제곱을 의미한다.

- 불완전 수리 모형

$$F(n, t) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^k F_k(t) + p F_1(t) + (1-p)^{n-1} F_{n-1}(t)$$

### 3 모수 추정 절차

본 절에서는 동적 불완전 수리 모형에 대한 추정 절차를 개발한다. 이러한 추정 절차는 배경 분포(underlying distribution)를 와이블 분포로 가정하여 개발되었다.

추정하고자 하는 모수 벡터는  $\theta = (\alpha, \beta, p_{11}, p_{22})$ 이다.

데이터의 특성상 상태 변수  $\{s_n, n=1, \dots, N\}$  즉, 수리 형태에 대한 자료는 주어지지 않다고 가정하므로 모형의 추정은 불완전 정보 하에서의 추정 문제가 된다. 따라서 불완전 자료 하에서도 최적해를 보장하는 EM 알고리즘의 틀/framework을 유지하면서 추정을 수행한다.

추정 절차를 요약하면 [그림 2]와 같다.

동적 불완전 수리 모형에서 우도 함수에서는  $F_{nk}(t)$ 가 포함된다. 따라서 우도 함수의 정의에 앞서 데이터 변환 과정을 거친다. 데이터 변환 행렬  $A$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N(N-1)} & 0 \\ a_{(N+1)1} & a_{(N+1)2} & \cdots & a_{(N+1)(N-1)} & a_{(N+1)N} \end{bmatrix}$$

위 행렬  $A$ 는  $(N \times N)$  행렬이다.

이때,  $a_{ij} = \sum_{k=i-j}^{i-1} y_k$ 로 정의된다.

평활된 확률  $\Pr(s_n = i | \mathbf{y}_n; \theta^{(0)})$ 는 여과된(filtered) 확률  $\Pr(s_n = i | \mathbf{y}_n; \theta^{(0)})$ 의 계산 결과를 이용하여 계산되며 절차는 다음과 같다.

여과된 확률의 계산 알고리즘 ( $\theta = \theta^{(0)}$  하에서 계산)

단계 0 모든  $n$ 에 대해  $a_{n0} \leftarrow 0$

$$\begin{aligned} f(y_2 | y_1) &= \sum_{s_1=0}^1 f(y_2 | s_1) \Pr(s_1 | s_0) \\ \Pr(s_1, s_0 | y_2) &= [f(y_2 | s_1) \Pr(s_1 | s_0)] / f(y_2 | y_1) \end{aligned}$$

$n = 3, \dots, N$ 에 대해 다음을 계산한다.

단계 1

$$\begin{aligned} f(y_n | s_{n-1}) &= \sum_{s_{n-1}=0}^1 [f(y_n | s_{n-1} = 0) (1 - (p_{10} + p_{00}) p_{11}^*) \\ &\quad f(y_n | s_{n-1} = 1, \bigcap_{n-k \leq i \leq n-1} (s_i = 1)) \cdot ((p_{10} + p_{00}) p_{11}^*)] \end{aligned}$$

$$f(y_n, s_{n-1}, s_{n-2} | \mathbf{y}_{n-1}) = \sum_{s_{n-2}=0}^1 f(y_n | s_{n-1}) \Pr(s_{n-1} | s_{n-2}) \Pr(s_{n-2}, s_{n-2} | \mathbf{y}_{n-1})$$

단계 2  $f(y_n | \mathbf{y}_{n-1}) = \sum_{s_{n-1}=0}^1 \sum_{s_{n-2}=0}^1 f(y_n, s_{n-1}, s_{n-2} | \mathbf{y}_{n-1})$

단계 3  $\Pr(s_{n-1}, s_{n-2} | \mathbf{y}_n) = f(y_n, s_{n-1}, s_{n-2} | \mathbf{y}_{n-1}) / f(y_n | \mathbf{y}_{n-1})$

평활된 확률의 계산 알고리즘 ( $\theta = \theta^{(0)}$  하에서 계산)

$n = N-2, \dots, 1$ 에 대해 다음을 계산한다.

단계 1

$$\begin{aligned} f(y_N, \dots, y_{n+1}, s_N, \dots, s_{n-1} | \mathbf{y}_n) \\ = f(y_N | s_{N-1}) \Pr(s_{N-1} | s_{N-2}) \cdots \Pr(s_n | s_{n-1}) \Pr(s_{n-1}, s_{n-2} | \mathbf{y}_n) \end{aligned}$$

단계 2

$$f(y_N | \mathbf{y}_n) = f(y_N | \mathbf{y}_{N-1}) f(y_{N-1} | \mathbf{y}_{N-2}) \cdots f(y_{n+1} | \mathbf{y}_n)$$

단계 3

$$\Pr(s_{n-2}, s_1 | \mathbf{y}_n)$$

$$= \sum_{s_{n-1}=0}^1 \cdots \sum_{s_2=0}^1 f(y_N, \dots, y_{n+1}, s_{N-1}, \dots, s_{n-2} | y_n) / f(y_N | y_n)$$

$E[\log f(s_N, y_N; \theta) | y_N, \theta^{(l)}]$ 를 최대화하는 모수  $\theta^{(l+1)} = (\lambda^{(l+1)}, \rho^{(l+1)}, \boldsymbol{p}^{(l+1)})$ 를 구하면 다음과 같은 계산 알고리즘을 얻을 수 있다.

$\theta = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{p})$ 의 계산 알고리즘

단계 1  $n = 1, \dots, N-1$ 에 대해  $\Pr(s_n | y_N; \theta^{(l)})$  계산

$$\Pr(s_n = i | y_N; \theta^{(l)}) = \sum_{s_{n-1}=0}^1 \Pr(s_{n-1}, s_n = i | y_N; \theta^{(l)})$$

단계 2  $i = 0, 1, j = 0, 1$ 에 다음을 계산한다.

$$\hat{p}_i^{(l+1)} = \sum_{n=1}^N \Pr(s_{n-1} = i, s_n = j | y_N; \theta^{(l)}) / \sum_{n=1}^N \Pr(s_{n-1} = i | y_N; \theta^{(l)})$$

단계 3  $\hat{\alpha}_i^{(l+1)}$  계산

단계 3.1  $m \leftarrow 0$

$\alpha_m (> 0)$  선택

단계 3.2  $\alpha_{m+1} = g_1(\alpha_m)$

단계 3.3

$$|\alpha_{m+1} - \alpha_m| < \varepsilon \text{ 이고 } \alpha_{m+1} > 0 \text{ 이면 } \hat{\alpha}^{(l+1)} = \alpha_{m+1}$$

아니면,  $m \leftarrow m+1$  그리고 단계 3.2로 간다.

단계 4  $\hat{\beta}_i^{(l+1)}$  계산

단계 4.1  $\beta = g_2(\hat{\alpha}^{(l+1)})$

단계 4.2

$$\beta > 0 \text{ 이면, } \hat{\beta}^{(l+1)} = \beta$$

아니면, 단계 3으로 간다.

$g_1$ 과  $g_2$ 를 정의하기에 앞서 다음을 정의한다.

$$A_n = \Pr(s_{n-1} = 0 | y_N; \theta^{(l)})$$

$$A_m = \Pr(s_{n-k-1} = 0, \bigcap_{n-k \leq i \leq n-1} (s_i = 1) | y_N; \theta^{(l)})$$

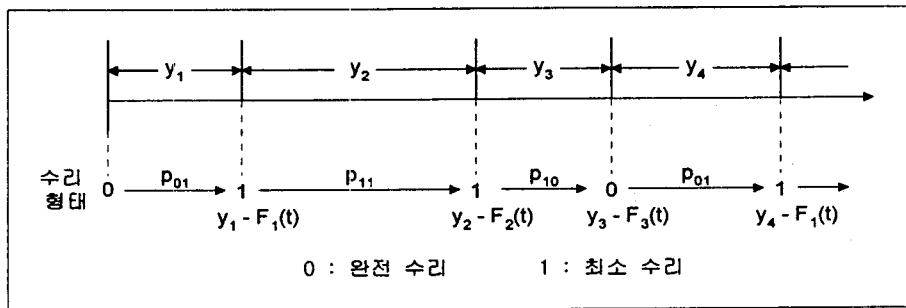
$g_1$ 과  $g_2$ 는  $E[\log f(s_N, y_N; \theta) | y_N, \theta^{(l)}]$ 를  $\alpha$ 와  $\beta$ 에 의해 편미분하여 각각 0이 되는 최대화에 대한 1차 조건식(first order condition)을 연립하여 구했다.

$g_1$ 은 다음과 같다.

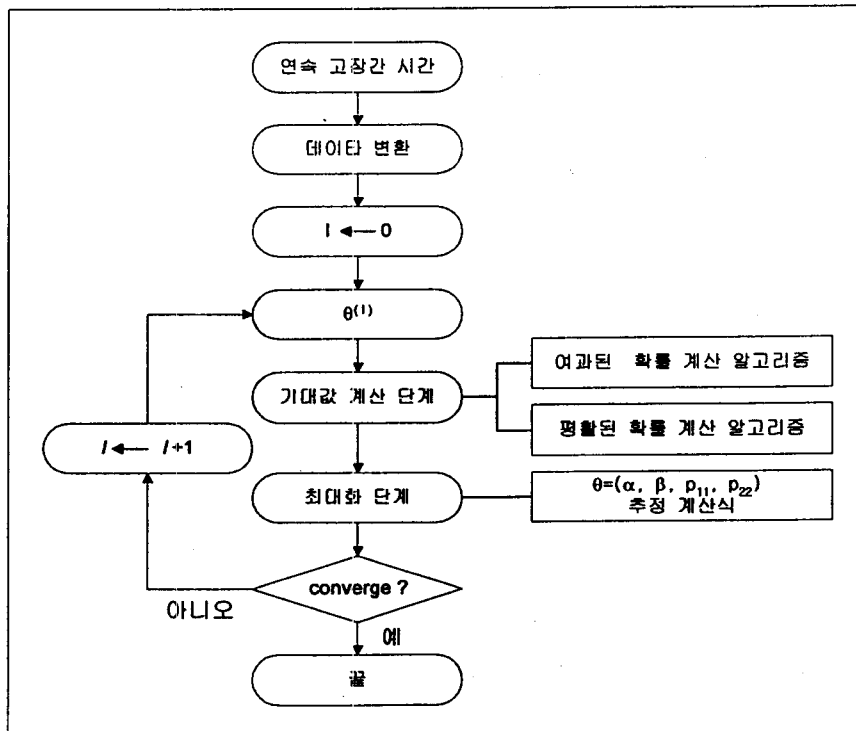
$$g_1(a) = \left[ (a_{21}^a - 1) \cdot \log a_{21} + \sum_{n=2}^N \{ -A_n (a_{(n+1)1}^a + 1) \cdot \log a_{(n+1)1} + \sum_{k=1}^{n-1} (A_{kn} \cdot (-(a_{(n+1)k}^a + 1) \cdot \log a_{(n+1)k} a_{nk}^a \cdot \log a_{nk})) \} \right]^{-1}$$

$g_2$ 는 다음과 같다.

$$g_2(a) = \left[ \frac{a_{21}^a + \sum_{n=2}^N \{ A_n a_{(n+1)1}^a + \sum_{k=1}^{n-1} A_{kn} (a_{(n+1)k}^a - a_{nk}^a) \}}{1 + \sum_{n=2}^N \{ A_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_{kn} \}} \right]$$



[그림 1] 동적 불완전 수리 모형의 표본 경로



[그림 2] 모수 추정 절차