

## 일차 전이곡선을 이용한 에버렛 함수의 정식화에 관한 연구

\*김 홍규, 정 현교  
서울대학교 공과대학 전기공학부홍 선기  
호서대학교 공과대학 전기공학부A Study for the Formulation of the Everett Function  
Using First Order Transition CurvesHong-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung  
School of Electrical Engineering, Seoul National UniversitySun-Ki Hong  
School of Electrical Engineering, Hoseo University

**Abstract** - The Preisach model needs density function or Everett function for the sample material to calculate the hysteresis characteristics. To obtain these functions, many experimental data obtained from the first order transition curves are required. However, it is not simple task to measure the curves. In this paper, a simple generalized technique to get the Everett function using saturation hysteresis loop and two first order transition curves is proposed. These three data makes three equations for the proposed Everett function model and we can get three variables by those equations. From the simulation, we got acceptable results.

## 1. 서 론

히스테리시스 현상은 모든 자성재료에서 나타나는 특성이며, 자기기록장치, 히스테리시스 모터 등 뿐만 아니라 히스테리시스 특성을 고려해야 하는 기기에서는 히스테리시스 현상을 해석적으로 설명할 수 있는 모델이 요구된다. 이에 대하여 프라이자흐(Preisach) 모델은 거시적 모델로서 자기 히스테리시스의 변화를 가장 잘 표현할 수 있는 모델로 알려져 있다[1]. 그런데, 프라이자흐 모델에 의해 히스테리시스를 표현하려면 히스테리시스 오퍼레이터에 대한 프라이자흐 분포함수 또는 에버렛(Everett) 함수가 있어야 하며, 이를 구하기 위해서는 실험으로부터 자성재료의 다수의 1차 전이(transition) 곡선을 측정하여야 한다[2]. 또한, 계산상 편의 때문에 에버렛 함수가 더 많이 이용되고 있다. 그러나, 경질 자성재료일수록 자계 변화에 따른 전이곡선의 변화는 매우 급격히 변화하며, 또한 필요로 하는 자계가 대단히 커져, 원하는 다수의 전이곡선에 대한 측정은 장비나 측정 노력 면에서 매우 번거롭고 까다롭다. 따라서, 가급적 실험을 통하지 않고 분포함수를 수학적으로 표현하려는 노력이 많이 있어 왔다[2-3]. 그러나, 가우스(Gauss) 함수를 이용하는 경우는, 프라이자흐 평면을 상호자계 축과 보자력 축으로 나누고, 각각 가우스 분포를 이루고 있다는 가정을 하고 있지만, 보자력 축에 대해서는 분포함수는 가우스 분포를 이루지 않는다[4]. 또한 로렌츠 함수는 초기 자화곡선을 이용하지 않고, 포화곡선만을 이용하여, 내부 마이너 루프에 대한 데이터는 이용되지 않으며, 내부 마이너 루프의 시뮬레이션은 신뢰하기 어렵다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해 초기자화 곡선과 포화 루프 및 마이너 루프를 이용한 경우는[5] 기존의 실험에 의한 방법이나, 프라이자흐 전 평면이 가우스 분포를 이룬다는 가정에서 만들어진 경우와 비교하면, 훨씬 간편하면서도 실험 데이터를 이용하므로 더욱 신뢰도가 높다고 할 수 있다. 하지만, 실제로 실험에서 초기자화곡선과 마이너 루프를 측정할 때는 경질 자성재료일수록 측정이 까다로운 경우도 있다.

본 연구에서는 에버렛 함수에 대하여, 초기자화곡선과 마이너 루프를 측정하는 대신, 이를 일반화하여, 포화루프 및 1차 전이

곡선 2개를 측정하여, 상호자계 축에 대해 에버렛 함수가 가우스 분포를 이룬다는 가정에서[5], 구해야 하는 변수를 구하고, 에버렛 함수를 수식화하여 구하는 방법을 제안한다. 이러한 간편한 방법을 이용함으로써 에버렛 함수를 간단히 구할 수 있게 되고, 히스테리시스 현상을 좀더 간편하면서, 보다 잘 묘사할 수 있을 것을 보인다.

## 2. 프라이자흐 모델에서의 에버렛 함수

프라이자흐 모델에 의한 히스테리시스의 계산은 다음 식으로 주어진다[2].

$$M(t) = \iint_{\alpha > \beta} \rho(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta} H(t) d\alpha d\beta \quad (1)$$

여기서,  $M(t)$ 는 자화값,  $\rho(\alpha, \beta)$ 는 분포함수이다. 분포함수는 스위칭 자계  $a$  및  $\beta$ 에 대한 프라이자흐 평면에서의 쌍극자의 밀도를 의미한다. 이 모델의 계산에서 에버렛 함수를 이용하면 편리하다. 에버렛 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$E(x, y) = \iint_x^y \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2)$$

실험에서 얻어진 1차 전이곡선은 에버렛 함수를 만드는 데 직접 이용된다[2].

$$E(a, \beta) = \frac{1}{2}(M_a - M_{a\beta}) \quad (3)$$

여기서,  $M_a$ 는 음의 포화 상태에서 자계를 증가시켜 자계 값이  $a$ 에 이르렀을 때의 자화값,  $M_{a\beta}$ 는 자계가  $a$ 에서 다시  $a\beta$ 까지 감소했을 때의 자화값을 의미한다. 이러한 결과로부터, 에버렛 함수는 증가 자계 및 감소 자계 축에 따라 테이블로 데이터를 만들고, 이 측정된 데이터 테이블로부터 히스테리시스 현상은 계산된다.

분포함수를 수식화하는 방법은 전이곡선을 실험에서 구하지 않고, 분포함수의 분포가 그림 1과 같이 프라이자흐 평면을 상호 작용 자계  $H$ , 및 보자력 자계  $H_c$ 에 대해 고려할 때, 분포함수가  $H$ , 및  $H_c$ 에 대해 가우스 분포를 이룬다고 하는 가정 하에서 만들어진다[3]. 여기서  $H_h$ ,  $H_c$ 는 식(4)와 같다.

$$H_h = \frac{H_a + H_\beta}{2}, \quad H_c = \frac{H_a - H_\beta}{2} \quad (4)$$

그러나 실제 보자력에 대하여 분포함수는 일반적으로 그림 2와 같이 가우스 분포를 이루지 않고 또한, 보자력 자계가 0일 때에도 분포함수의 값은 0이 아니다[5]. 보자력 자계가 0일 때 존재하는 분포함수는 가역적 성질을 갖는 히스테리시스 오퍼레이터이다. 그러나, 에버렛 함수를 이용하면, 에버렛 함수에는 자체로서 가역 자화를 포함하고 있기 때문에 이에 대한 특별한 고려가 필요 없으며, 따라서, 에버렛 함수를 이용하는 경우가 계산에서

편리할 뿐만 아니라, 가역자화까지 동시에 계산된다는 장점을 갖는다.

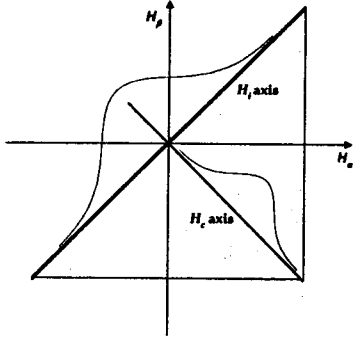


그림 2. 프라이자호 평면과 상호작용 자체 및 보자력과의 관계

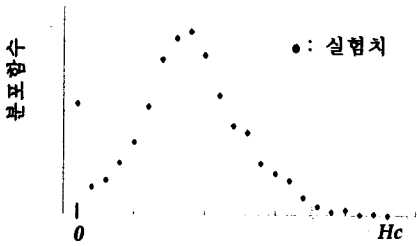


그림 2. 보자력 측에 대한 분포함수

### 3. 에버렛 함수의 정식화

#### 3.1 에버렛 함수의 분포

분포 함수는 보자력 측을 대칭으로 보면 상호자체 측에 대하여, 가우스 분포를 이루는 것으로 알려져 있다[5]. 또한, 에버렛 함수는 식(2)에서 알 수 있듯이, 이러한 분포함수를 적분한 함수이며, 따라서, 에버렛 함수도 상호자체 측에 대하여는 가우스 분포를 갖게 된다. 즉, 그림 3과 같이, 에버렛 함수는 그림 3과 같이, 중심 측이 보자력 자체 측이 될 때, 상호자체에 대하여 좌우 대칭의 가우스 분포를 따르게 된다. 단, 에버렛 함수는 분포함수를 적분한 함수이므로, 그림 3에서의 같이, 상호자체의 절대치가 무한히 커질 때, 점근선이 되는  $E_{\infty}$ 를 갖게 되며, 이 값은 보자력 자체에 따라 달라진다. 따라서, 이 값은 보자력 자체  $H_c$ 에 대한 함수  $E_{\infty}(H_c)$ 로 표시된다.

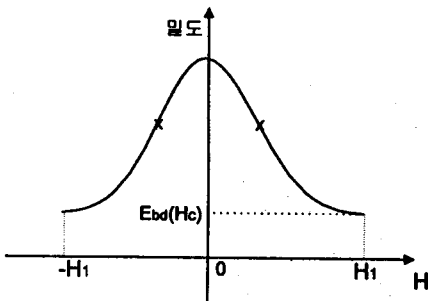


그림 3. 상호자체에 대한 에버렛 함수

#### 3.2 정식화

상호작용 자체에 대하여는 분포함수가 가우스 분포를 갖음이 알려져 있다. 따라서, 분포함수는 가우스 함수를 이용하여 다음과 같이 정식화된다.

$$P_i(H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(H_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (5)$$

여기서,  $\mu_i$ 는 상호자체 측에 대한 중심 값이며 0이 된다.

마찬가지로, 에버렛 함수도 이와 같이 상호자체에 대하여 가우스 분포를 이루게 되며, 그 함수는 다음 식 (7)의 모양을 갖게 된다.

$$EV_k(H_i, H_c) = K(H_c) \text{Gauss}(H_i, \mu_i, \sigma_i) + E_{kb}(H_c) \quad (6)$$

여기서,  $EV_k$ 는 상호작용 자체 및 보자력 자체에 대한 에버렛 함수,  $K(H_c)$ 는 보자력 자체에 대한, 가우스 분포를 갖는 에버렛 함수 계수이다.  $\mu_i$ 는 0이 되므로, 결국 미지수는  $K(H_c)$ ,  $\sigma_i$  및  $E_{kb}(H_c)$ 가 된다.

한편, 그림 4는 일반적으로 얻어지는 자성재료에서의 포화루프 및 1차 전이곡선을 보여주고 있다. 1, 2번은 포화 히스테리시스 루프에서의 자체의 감소 및 증가시의 곡선을 나타낸다. 3 및 4는 각각 옴의 포화에서 다시 자체가 증가한 후, 다시 자체의 방향이 역전되어 만들어지는 전이곡선들이다. 이들, 전이곡선은 식(3)에서의 에버렛 함수 정의로부터 프라이자호 평면 상에 에버렛 함수를 기록하게 된다. 그림 5는 그림 4와 같은 실험으로부터 얻어지는 에버렛 함수를 프라이자호 평면에 나타낸 것을 보여주고 있다. 즉, 그림 4에서의 1 ~ 4는 그림 5에서의 1 ~ 4에 해당된다.

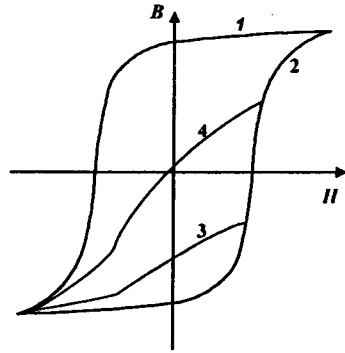


그림 4. 히스테리시스 루프

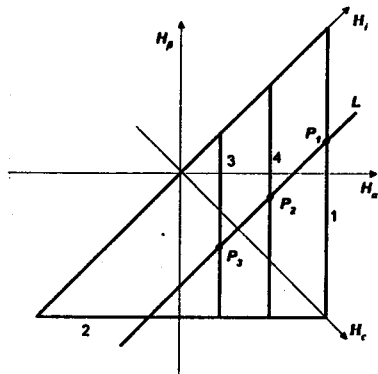


그림 5. 프라이자호 평면상의 에버렛 함수

즉, 포화루프를 측정하면, 그림 5의 에버렛 테이블의 직선 1, 2 부분의 값을 얻을 수 있으며, 두 개의 1차 전이곡선 3, 4로부터 에버렛 평면에서 직선 3, 4 부분의 값이 구해진다. 또한, 그림 5와 같이 직선 1에 대하여, 에버렛 값을 상호자계 축에 대하여 그려보면, 양 끝점의 값을 0으로 볼 때, 역시 가우스 분포를 갖게 된다.

따라서, 에버렛 함수 테이블에서 상호자계 축에 대하여 가우스 분포를 가정하면, 식(6)에서 구하여야 하는 미지수 3개는 그림 5에서와 같이 점  $P_1$ ,  $P_2$  및  $P_3$  세 점의 데이터로부터 식 3개가 만들어지므로, 모두 결정될 수 있다. 이렇게 하여 에버렛 함수의 테이블이 각각의 자계에 대하여 구해지면, 바로 에버렛 테이블을 이용하여, 히스테리시스 현상을 계산할 수 있다.

#### 4. 시뮬레이션

그림 7은 실험으로부터 측정된 보자력이 3,500 [AT/m], 잔류자속밀도가 1.14[T]인 반경질 자성재료의 포화 히스테리시스 루프 및 2개의 1차 전이곡선이다. 재료는 링형 시편에 1, 2차에 여자 코일 및 유도 코일을 감아 1차축에 자계를 가하고, 2차축에서 자속을 측정하였다.

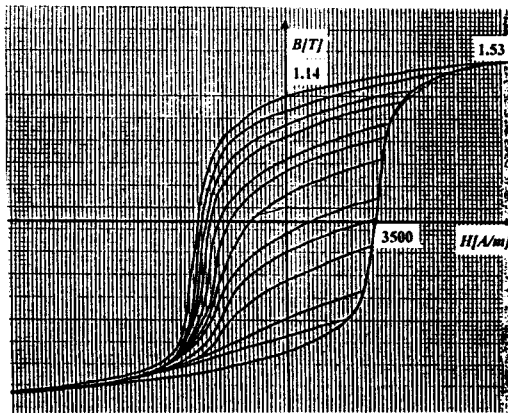


그림 6. 포화 히스테리시스 루프 및 전이곡선

그림 7은 그림 6의 실험 데이터로부터 구해진 에버렛 함수의 3차원적 도시이다. 주어진 데이터는 포화 히스테리시스 루프와 2개의 1차 전이곡선이 전부지만, 이들 데이터만으로 매우 양호한 데이터가 얻어짐을 알 수 있다.

그림 8은 그림 7로 주어진 에버렛 함수에서 히스테리시스 루프를 시뮬레이션한 결과이다.

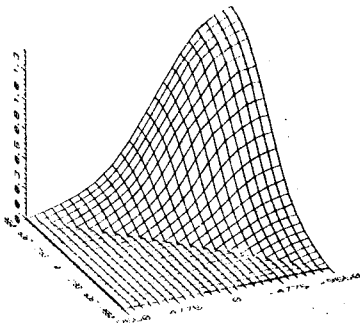


그림 7. 에버렛 함수의 3차원적 도시

초기자화곡선, 마이너루프 및 포화 히스테리시스 루프를 모사한 경우이며, 간단하고 적은 데이터로부터 양호한 결과의 루프를 얻을 수 있음을 보이고 있다. 여기서 에버렛 테이블은  $25 \times 25$ 로 구성되어 있다. 그림에서 루프가 매끈하지 못한 것은 에버렛 테이블을 좀더 조밀하게 구성하면 더욱 향상될 수 있다. 또한, 전이곡선 측정 실험에서 얻은 값을 좀더 정확하게 계산 루틴에 입력함으로써 더욱 개선된 루프를 얻을 수 있다.

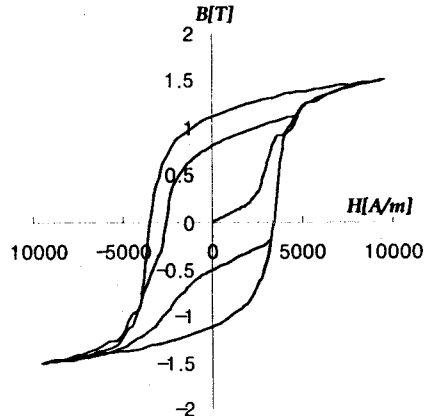


그림 8. 초기자화곡선 및 히스테리시스 루프 (시뮬레이션)

#### 5. 결론

본 연구에서는 프라이자흐 모델을 이용하여 히스테리시스 현상을 시뮬레이션하는데 필요한 에버렛 함수를 간단히, 포화 히스테리시스 루프와 1차 전이곡선 2개로 구성할 수 있음을 보였다. 즉, 에버렛 함수는 상호자계에 대해 가우스 분포를 이루며, 측정된 전이곡선으로부터 필요한 가우스 함수의 분산을 결정하고, 이들 관계로부터 에버렛 함수를 구성할 수 있음을 보였다. 이로부터 계산된 시뮬레이션은 만족할 만한 결과를 보였으며, 좀더 정밀한 측정 데이터만 얻는다면, 많은 수의 전이곡선을 측정하지 않고 2개의 루프 만으로부터 신뢰할 수 있는 에버렛 함수를 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

본 연구는 자동제어 특화센터의 연구비 지원에 의한 연구 결과입니다.

#### 6. 참고문헌

- [1] F. Ossart, "Comparison between Various Hysteresis Models and Experimental Data", IEEE Trans. on Mag., Vol.26, No. 5, pp.2837-2839, September 1990.
- [2] 홍 선기, 원 중수, "히스테리시스 현상의 일반화된 정량적 해석", 대한전기학회논문지, 제41권 12호, pp.1369-1378, 1992.
- [3] S. Papusoi and A. Stancu, "Anhyseretic Remnant Susceptibility and the Moving Preisach Model," IEEE Trans. on Mag., Vol. 29, No. 1, pp.77-81, January 1993.
- [4] L-L.Rouve, Th.Vaeckerle, "Application of Preisach Model to Grain Oriented Steels: Comparison of Different Characterizations for the Preisach Function  $p(\alpha, \beta)$ ", IEEE Trans. on Mag., Vol. 31, No. 6, pp.3557-3559, November 1995
- [5] 김홍규, 이창환, 정현교, 홍선기, "프라이자흐 분포함수의 정칙성에 관한 연구", 대한전기학회 하계 학술대회, pp.56-58, 1996.