

공진 효과 및 쿨롱 마찰이 있는 서보 시스템에 대한 μ -제어기 설계

황인휘* · 임동진*

* 한양대학교 제어계측공학과

μ -Controller Design for Servo Systems Containing Resonance Effects and Coulomb Frictions

In-Hui Hwang* · Dong-Jin Lim*

* Dep. of Control & Instrumentation Eng., Hanyang University

Abstract

In almost all the servo systems, especially for the robot manipulators and numerical control systems, there are resonance effects and nonlinear frictions which should be considered in designing servo controllers. In this paper to compensate friction and track the step-input without steady-state error, the original system is augmented with an integrator and employes μ -Controller design method μ -Controller design method enables to meet not only performance requirements but robust stabilities simultaneously. And there may exist a limit cycles due to interaction between integrator and nonlinear friction. With describing function method, the possibility of limit cycle is checked

1. 서 론

서보 시스템의 위치제어 및 추종제어를 하기 위해 사용되는 서보들은 일반적으로 선형 모델(linear model)로서 묘사되나 종종 시스템에 존재하는 쿨롱 마찰(Coulomb friction)이나 공진 효과로 인해 그 성능에 제약을 받게 된다. 일반적인 서보 시스템에는 선형 마찰과 비선형 마찰에 존재하는데 비선형 마찰은 쿨롱 마찰(Coulomb friction)이라고도 지칭되며 속도가 영(zero)인 지점에서 불연속 특성으로 인해 선형화가 불가능하다. 또한 서보 시스템의 기어, 체인, 하모닉 드라이브 등의 연결부에서 발생하게 되는 공진 효과도 성능 저하, 기구부 조기 마모, 불안정의 원인이 될 수기 때문에 제어시스템 설계시 이를 반드시 고려하여야 한다.

본 논문에서는 DC 서보 모터와 하모닉 드라이브(Harmonic drive)를 사용한 1축 관절 시스템에 대한 제어기를 설계하는 과정을 통하여 쿨롱 마찰과 공진 효과가 존재하는 서보 시스템에 대한 μ -제어기를 설계하는 방법을 제시한다. 본 논문에서는, 쿨롱 마찰의 영향을 보상하고 계단입력을 정상상태 오차 없이 추종하기 위하여 적분기를 추가하여 확장한 시스템에 대하여 μ -제어 기

법(μ -control method)을 사용하여 제어기를 설계한다. 이렇게 설계된 μ -제어기는 성능 강인성(performance robustness)뿐만 아니라 부하의 관성(inertia) 변화에 대한 안정도 강인성(robustness stability)까지도 고려할 수 있다. 또한 계단입력을 정상상태의 오차 없이 추종할 수 있도록 하기 위해 추가한 적분기와 쿨롱 마찰간의 상호작용으로 제어 시스템의 성능에 치명적인 리미트 사이클(limit cycle)이 존재할 수 있기 때문에 기술 함수법(describing function method)을 사용하여 리미트 사이클의 존재 여부를 검사한다. 마지막으로 이렇게 설계되어진 제어기를 시뮬레이션을 통해 성능 강인성 및 안정도 강인성을 검증한다.

2. μ -제어기 설계

2.1 μ -제어

본 논문에서는 μ -제어기법을 사용하여 제어기를 설계한다. μ -제어기법은 다중입력-다중출력(multi-input multi-output) 시스템에서의 성능 강인성과 함께 모델 오차 및 시스템 파라미터들의 교란 등 모델 불확실성(model uncertainties)에 대한 안정도 강인성을 만족하는 제어기 설계를 가능하게 해준다.

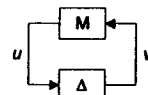


그림 2-1

그림 2-1의 블록도에서 $\Delta \in C^{m \times m}$ 는 아래와 같이 정의되며

$$\Delta = \{diag[\delta_1 I_{n_1}, \dots, \delta_n I_{n_n}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in C, \Delta_j \in C^{m_j \times m_j}\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n$$

Δ_j 는 모델 불확실성(model uncertainty)에 대한 성능과 강인성 요구조건을 의미한다. 구조적 특이값(structured singular value) μ 는 식 (2)으로 정의된다.

그림 2-3과 같은 폐루프 시스템의 성능 강인성 μ -해석 문제에서 모든 주파수에 대해서 식(3)이 만족되면 성능 강인성 요구조건은 만족된다.

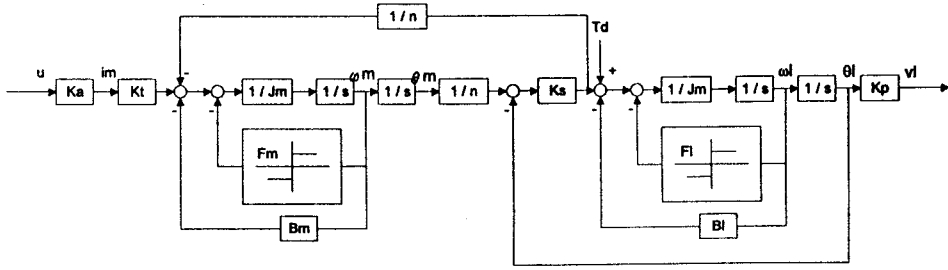


그림 2-2

$$\mu_{\Delta}(M) := \frac{1}{\min\{\sigma(\Delta): \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (2)$$

$$\mu(M) = \mu(F_r(P, K)) < 1 \quad (3)$$

그러나, $\mu(M)$ 을 최소화하는 직접적인 방법은 없으므로 이를 위해 H_{∞} 기법을 이용한 식(4)을 사용한다.

$$\| \mu(F_r(P, K)) \|_{\infty} < 1 \quad (4)$$

즉, μ -제어 기법은 주어진 성능 강인성과 안정도 강인성 요구조건에 대하여 식(4)을 만족하도록 안정한 제어기 K를 설계하는 것이라 할 수 있다. 불확실성 블록 Δ 에 대응되며 안정한 역행렬을 갖는 최적화된 대각 행렬 D(s)를 찾아내어 $\|DF_r(P, K)D^{-1}\|_{\infty}$ 을 최소화하는 K를 구해낸다. 이 과정에서 D-K 반복법(D-K iteration)이라 불리는 2단계 과정을 반복한다.

Step 1 D(s)와 D(s)⁻¹이 안정하며, $\overline{\sigma}(DF_r(P, K)D^{-1})$ 가 주파수에 대해 대략적으로 최소화되는 대각행렬 D(s)를 가능하면 제어기의 상태에 영향을 받지 않도록 상수 요소를 가지도록 선택한다. 주파수에 대해 최적화된 D를 계산하는 소프트웨어를 사용하여 D를 상수나 저차 전달 함수로 대략화한다. K를 알지 못하는 최초의 반복에서는 간단히 D=I로 설정한다.

Step 2 시스템의 ∞ -놈(∞ -norm) $\|DF_r(P, K)D^{-1}\|_{\infty}$ 를 최소화하는 K(s)를 H_{∞} 방법을 사용하여 계산한다. 이때 시스템 전달 행렬 P는 아래의 식(5)의 구조를 가지며 아래의 조건들을 만족하여야 한다.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

- i) (A, B2)는 stabilizable하며 (C2, A)는 detectable하다
- ii) D12와 D21은 full rank이다.
- iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ 는 모든 ω 에 대해서 full rank이다.
- iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ 는 모든 ω 에 대해서 full rank이다.

step1과 step2를 모든 주파수에 대해 식(4)이 만족되거나 μ 가 더 이상 줄어들지 않을 때까지 반복한다.

2.2 서보 시스템 모델

본 논문에서는 쿨롱 마찰과 공진 효과가 존재하는 전형적인 모델로서 DC서보 모터와 하모닉 드라이브를 장착한 1축 로봇 관절 시스템을 고려하며, 이 시스템의 불특도와 등가 개념도가 각각 그림 2-2, 2-3이다. 시스템의 변수들

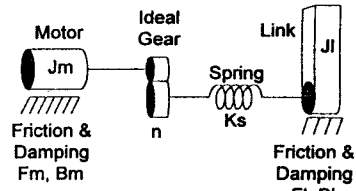


그림 2-3

은 표 2-1과 같다.

θ_l	부하의 위치각	u	입력전압
ω_l	부하의 각속도	i_m	모터에 공급되는 전류
θ_m	모터 축의 각	d	중력에 의한 외란 토크
ω_m	모터 축의 각속도	v_l	부하 위치의 포텐쇼미터 출력

표 2-1

상태벡터 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [v_l \ \omega_l \ \theta_m \ \omega_m]^T$ 로 정의하고 실제 파라미터들을 사용하면 시스템의 상태방정식은 식(6)과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 8.35 & 0 & 0 \\ -5988 & -0.25 & 50000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2874.3 & 0 & -24000 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 41.7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(x_2)$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \end{bmatrix} f_m(x_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 58.92 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 41.7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

(6)

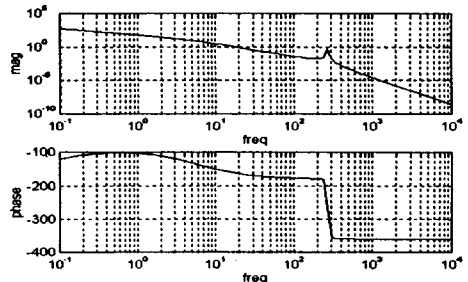


그림 2-4

이때 $f_l(\cdot)$, $f_m(\cdot)$ 는 각각 부하 축과 모터 축의 쿨롱 마찰을 나타내는데 기술함수법을 이용하기 위해서는 한 개의 비선형 요소만이 존재하도록 등가적으로 변형시킨 필요가 있다. 감속 기어를 장착한 대부분의 로봇 관절 시스템의 경우 부하 축의 마찰력을 모터 축으로 환산해보면 상

대적으로 아주 작은 값인 경우가 많으며 이 시스템에서도 예외가 아니므로 부하 측의 쿨롱 마찰력 F_l 은 무시하도록 한다. 출력 y 는 부하의 위치가 된다.

쿨롱 마찰을 제외한 선형 부분만의 전달 함수의 보드선도는 그림 2-4와 같다. 그림의 보드 선도에서 시스템이 약 43Hz에서 공진 주파수를 가지고 있음을 알 수 있다.

2.3 μ -제어기 설계

제어기를 설계하기 전에 쿨롱 마찰의 영향을 보상하기 위해 적분기를 추가하여 확장한 전체 시스템에 대해 μ -제어방법을 사용하여 제어기를 설계하게 된다. 적분기로 확장되어진 시스템의 블록도는 그림 2-5에 나타내었다

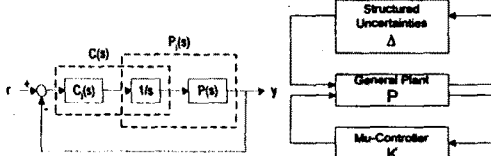


그림 2-5

그림 2-6

그림 2-6의 성능강인성과 안정도 강인성을 의미하는 구조화된 불확실성 블록(structured uncertainty) Δ 의 구조는 식 (7)에 나타나 있다.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \\ & \Delta_2 \end{bmatrix}, \Delta_1 \in C, \Delta_2 \in C^{4 \times 2} \quad (7)$$

네 개의 가중치 W_1, W_2, W_3, W_4 를 포함한 일반화된 시스템 P 는 아래와 같이 구성되며 P 의 LFT형태는

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (9)$$

로 정의된다. 위의 가중치함수들을 적당히 조정하여 식 (10)을 만족하는 강인 제어기 K 를 설계할 수 있게 된다.

$$\sup_{\omega \in R} \mu_{\Delta}(F_l(P, K)(j\omega)) < 1 \quad (10)$$

이렇게 설계한 제어기 K 와 쿨롱 마찰의 영향을 보상하기 위해 도입한 적분기를 함께 연결하여 전체 제어기를 구성한다.

3. 시뮬레이션

2절에서 제안한 제어기 설계방법을 이용하여 DC서보 모터와 하모닉 드라이브를 장착한 1축 로봇 관절 시스템에 대하여 제어기를 설계하고, 시뮬레이션을 수행함으로써 성능 및 안정도 특성을 검증한다. 적분기로 확장된 시스템에 대해서 가중치 함수를 적절히 설정한다. 이때 사용한 가중치함수는 아래와 같다.

$$W_1(s) = 100, W_2(s) = 50, W_3(s) = 0.01, W_4(s) = 0.01 \quad (11)$$

이렇게 가중치함수까지 설정한 시스템에 대하여 μ -제어기법을 사용하여 제어기를 설계한다. 그림 2-7에 앞서 설계한 제어기를 적용한 시스템이 정상상태 오차 없이 계단 입력을 따라가는 것을 보여준다. 마지막으로 기술함수법(describing function method)을 사용하여 설계되어진 제어시스템에 리미트 사이클이 존재하는 지를 검사한다. 우선 전체 시스템을 선형 블록과 비선형 블록으로 나누

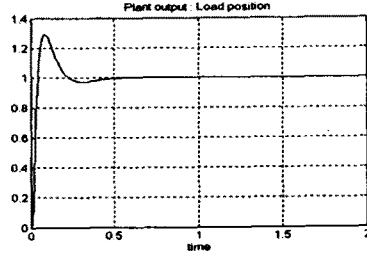


그림 2-7

다. 비선형 블록에 대한 기술함수 $N_d(M)$ 와 이를 뺀 나머지 선형 블록의 전달함수 $G(s)$ 가 식을 만족하면 리미트 사이클이 존재하게 된다.

$$G(s) = -1/N_d(M) \quad (12)$$

또한 두 함수의 궤적을 복소평면 상에 그려봄으로써 가시적으로 쉽게 확인할 수 있다. 그림 2-8을 통하여 두 궤적은 서로 만나지 않음을 알 수 있다. 이는 즉 식(14)이해를 가지지 않음을 의미한다. 이를 통해 제어시스템에 리미트 사이클이 존재하지 않음을 예측할 수 있다.

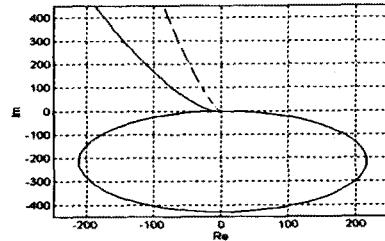


그림 2-8

4. 결 론

본 논문에서 서보 시스템에 대하여 쿨롱 마찰 및 공진 효과를 고려하고 계단입력을 정상상태 오차 없이 추종하는 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 쿨롱 마찰 보상을 위한 적분기를 추가하여 시스템을 확장하고 확장된 시스템에 대하여 μ -제어기법을 사용하여 공진 효과를 제거하며 성능 강인성과 안정도 강인성을 고려한 제어기를 설계한다. 적분기와 쿨롱 마찰의 상호작용으로 리미트 사이클이 존재할 수 있으므로 이를 기술함수법을 사용하여 조사하였다. 본 논문에서 제안된 방법을 DC서보 모터와 하모닉 드라이브를 장착한 시스템에 적용하여 만족할 만한 성능을 얻을 수 있음을 시뮬레이션을 통하여 보여 주었다.

참 고 문 헌

- 1) Gary J.Balas, John C. Doyle, Keith Glover, Andy Packard, Roy Smith, μ -Analysis And Synthesis Toolbox, MUSYN Inc. and The MathWorks, Inc, 1991
- 2) R.Lane Dailey, *Lecture Notes for the Workshop on H ∞ and μ Method for Robust Control*, 1991 IEEE Conference on Design and Control
- 3) Jean-Jacques E.Slotine, Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, 1991 Prentice Hall
- 4) J.M.Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, 1989 Addison-Wesley