

대칭 확대 도관에서의 비대칭 흐름에 관한 연구

Numerical Investigation of Asymmetric Flow in a Symmetric Channel with Sudden Expansion

오민 병광*, 장근식*

ABSTRACT

The full incompressible Navier-Stokes equations are numerically integrated to solve the unsteady channel flow using a new numerical scheme of second-order accuracy developed by the authors. It is well known that in spite of the symmetry in the boundary condition and geometry, asymmetry can develop with time-dependency in a channel with sudden expansion. The instability of the shear flow and the cross-channel pressure contribute to such asymmetric flow. In this paper, we successfully generated a channel flow in which vortex waves were propagated downstream due to the harmonically oscillating inlet flow. The structure of the eddies and wall vorticity are parametrically investigated.

1. 서론

비대칭 혹은 대칭 도관에서의 흐름은, 정상이든 비정상이든 간에, 많은 응용성을 갖고 있을 뿐만 아니라 흥미로운 물리적 현상으로 다른 복잡한 유동을 이해하기 위한 기초를 제공하기 때문에 실험적으로 그리고 수치적으로 연구되어 왔다. 대칭 도관에서의 정상 흐름인 경우, 경계조건과 도관의 기하학적 대칭성에도 불구하고 그 흐름이 비대칭 흐름으로 발전할 수 있음의 발견은 그리 오래되지 않았으며 주로 실험에 의해서였다. 예를들어, Durst[1] 등은 팽창비 3:1, 중평비 9.2:1인 급팽창을 갖는 도관에서 Reynolds 수가 $56 \leq Re \leq 1100$ 범위에 대하여 실험적으로 상세한 연구를 수행하였다. 그들에 따르면 약 100 이하의 낮은 Reynolds 수에서 흐름은 매우 안정적이고 대칭이 된다. 이때의 흐름은 2차원이고 그들의 계산된 해와 잘 일치했다. Cherdron[2] 등은 팽창비와 중평비에 따른 흐름 특성의 변화를 실험적으로 수행하였다. 그들에 따르면 팽창비와 중평비가 작을수록 비대칭 흐름이 되는 Reynolds 수는 증가하였다. 팽창 모서리에서 생성되고 전단층에서 확대된 교란에 의하여 비대칭 흐름이 유발되고 높은 Reynolds 수일 경우 유선 구석에 있는 재순환 영역들과 주흐름에 의해서 형성되는 전단층이 eddy-like pattern의 shedding을 만드는 원인임을 지적하였다. Sobey[3] 역시 최근 논문에서 높은 Reynolds 수가 되면 흐름의 대칭성은 깨지고 2개의 박리 영역은 다른 길이가 되며 좀 더 높은 Reynolds 수의 흐름에서는 세번째 재순환 영역이 나타나고, Reynolds 수가 더 증가하면 주흐름의 불안정성으로 인하여 주기성이 점점 중요하게 되고 궁극적으로 난류가 됨을 보였다. Reynolds 수가 25 근처에서 흐름은 비대칭이 되었고 Reynolds 수에 따라 하나의 와동은 성장하는 반면에 다른 하나는 처음에는 더 작게 되었다가 나중에는 거의 일정한 크기로 남아 있음을 관찰했다. Abbot & Kline[4] 등의 경우엔 난류 흐름에서 일어나는 비대칭을 관찰했다.

Sobey[3]는 단을 갖는 비대칭, 대칭 도관에서 입구 유동이 조화함수로 주어질 때 와파동이 생성되는 것을 처음으로 연구했다. 그의 결과에 따르면 Reynolds 수의 증가는 와동의 강도를 증가시킨 반면에 파장은 Strouhal 수가 감소해야 증가했다. 파동 총 길이는 Reynolds 수가 증가하거나 Strouhal 수가 감소하면 증가했다.

Deblois[5] 등은 삽입된 deflector를 가진 얇은 비대칭 도관을 통한 연동(pulsatile) 흐름을 모사했다. 혼합실에서 파장 λ 와 Strouhal 수와의 관계는 $\lambda \propto St^{-3}$ 가 됨을 수치적으로 확인하고 Reynolds 수는 와동의 수와 강도와 관계되며 Strouhal 수는 파장의 길이를 결정함을 밝혔다. 또한 혼합이 최대가 되는 때는 와동의 수가 두개나 세개 일 때이며 상류쪽 와동은 하류쪽보다 강함을 보였다. Tutty & Pedley[6] 들 역시 비대칭 도관에서 vortex dynamics 견지에서 주와동과 이차 교란의 생성과 발전을 연구했다. 본 논문에서는 저자들이 개발한 수치 기법을 사용하여 대칭 도관에서 입구 흐름이 정상적인 경우와 조화함수로 주어지는 경우에 대하여 비대칭이 되는 흐름을 연구하여 밝힌다.

2. 수식화

대칭 도관에서의 비정상 비압축성 흐름을 모사하기 위하여 Fig. 1에 보인 바와같은 기하학적 모양을 갖는 도관을 고려한다. 여기서 팽창비는 $\epsilon = a^*/2a^*$ 로 정의한다. 길이는 입구 도관 폭의 반인 a^* 로, 속도는 입구에서의 평균속도 U_0^* 로 그리고 시간은 흐름의 진동주기 T^* 로 무차원화시킨다. 입구에서 단까지의 거리는 L_u 로, 출구까지의 거리는 L_d 로 표시한다. 이때 Reynolds 수와 Strouhal 수는 아래와 같이 정의된다.

$$Re = U_0^* a^* / \nu, \quad St = a^* / U_0^* T^*$$

여기서 ν 는 동점성 계수이다. 비정상 비압축성 유동을 지배하는 방정식은 질량보존식과 Navier-Stokes 방정식으로 직교좌표계에서 보존형태로 다음과 같이 쓰여진다.

*대전광역시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 항공우주공학과, (우)305-701, Tel(042)869-3711

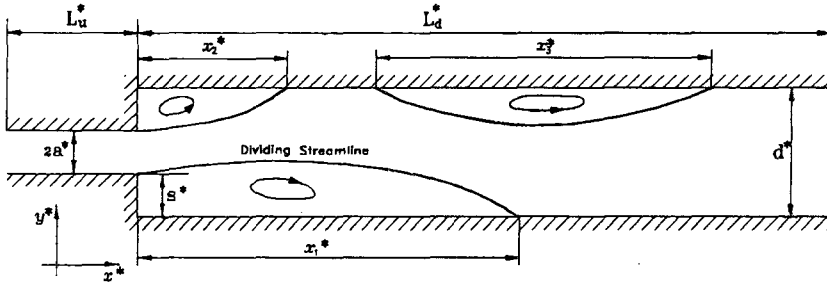


Fig. 1 Symmetric channel geometry

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

여기서 q 는 x -방향 속도 u 와 y -방향 속도 v 로 구성되고

$$q = St \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3)$$

F 와 G 는 아래와 같은 플럭스 벡터들로 구성된다.

$$F = \begin{Bmatrix} u^2 + p - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \\ uv - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$G = \begin{Bmatrix} uv - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \\ v^2 + p - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

사용된 경계조건으로 벽에선 no-slip 조건이고 입구의 경우엔 Sobey[3]의 실험에서와 같이 시간에 따라 조화 함수적으로 변하는 속도를 취한다.

$$\left. \begin{aligned} u &= 1.5(1 - (y - \epsilon)^2) \sin(2\pi t) & v &= 0 \\ x &= 0 \\ s &\leq y \leq s + 2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

s 는 무차원화된 단 높이이다. 우리는 여기서 $\epsilon = 3$ 인 경우만 고려하기 때문에 2ϵ 은 단 뒤의 도관 쪽이 된다. 수치적으로 (1)과 (2)을 풀기 위해서는 도관의 길이가 한정되어야 하고 출구에선 적당한 경계조건이 요구된다. 출구 경계조건은 출구에서 질량보존을 강요하는 식으로서,

$$u_{IMAX,j+1} = u_{IMAX,j} - \frac{\Delta y}{\Delta x} (v_{IMAX,j+1} - v_{IMAX,j}) \quad (7)$$

이는 출구 Cell에 연속 방정식을 적용한 결과로부터 이끌어낸 것이다. v -속도에 관한 조건은 zero-gradient 조건이 사용되었다. 공간과 시간에 대하여 정확성을 갖는 수치해를 얻기 위한 우리의 방법은 u -와 v - 운동량 방정식을 동시에 푸는 것이다. 질량 보존을 만족시키기 위하여 보조 포텐셜 함수를 도입하고 격자는 완전 엇갈림 격자계 (fully staggered grid)를 사용하였다[7,8].

3. 비정상흐름

대칭 도관을 지나는 순수 진동적 흐름을 고려한다. 와파동은 도관 쪽의 변화에 의하여 생성된다. 그것은 Sobey[3]의 실험에 의하여 발견되었다. 또한 그는 공간적 주기성을 가정하고, 한쪽 끝에서는 \sin 함수적 팽창부를 가지고 다른 끝에서도 비슷한 수축을 가진 대칭 도관에 관하여 계산을 수행하였다. 그의 계산 결과에서 생성된 와파동은 2개의 초기 와동, 그것은 도관 팽창 및 부근에서 생성되었다, 이 부분별

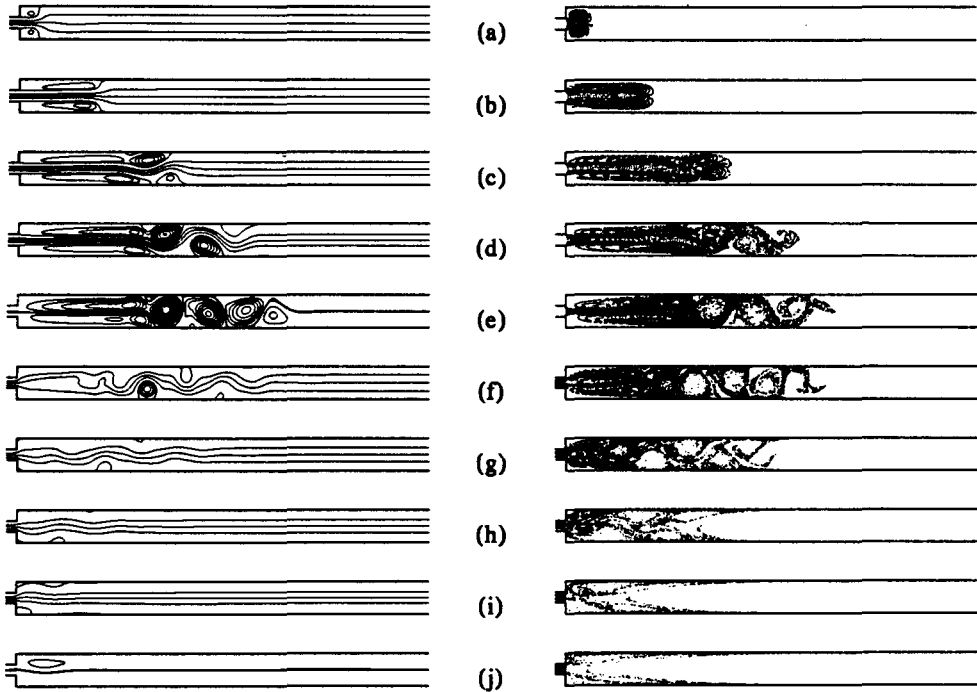


Fig. 2 Streamlines(left) and streaklines(right) for $Re = 160$, $St = 0.003$ and $\epsilon = 3$. Time is: (a-j) $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$

로 조개진 결과임을 지적하였다. 하지만 그의 수치 모사는 실험에 존재하는 잔류 유동, 그것은 각 벽 근처에 2개의 천천히 움직이는 층의 형태로 존재하였다, 의 영향을 고려하지 않았고 그가 밝힌대로 수치 모사에 쓰인 도관의 길이의 짧음과 양끝단에서의 수축이 흐름에 강하게 영향을 미쳐 실험적 관찰을 정확히 모사할 수 없었다. 일반적으로 알려진 바와같이 어떤 Reynolds 수 이상에서 전단층은 불안정하게 된다. 그럼에도 불구하고 교란이 존재하지 않는다면 대칭 흐름은 결코 깨지지 않을 것이다. 개념적으로 대칭 패턴의 파괴원인은 물리적 모델에 존재하는 다중 교란의 존재에 의하여 설명된다. 예를들어, 비균일 입구 조건, 경계조건 불규칙성, 실험에서의 실행조건에 의한 교란들이 대칭 파괴 원인이 된다. 대칭 도관을 지나는 비정상 흐름에 관한 수치 모사의 경우에는 적어도 위에 언급된 불안정 효과들은 부재한다. 하지만 수치 모사에 있어서도 수치 스킴에 의한 것과 절단오차(truncation)와 round-off 에러등이 교란 요소로 작용하여 궁극적으로 대칭흐름을 깨뜨린다. 이러한 사실에도 불구하고 실린더 주위의 유동에 관한 수치 모사의 경우 Reynolds 수 100과 200[10] 심지어 1000[9] 관한 흐름이 정상 대칭 패턴에 도달함을 보여주었다. 따라서 실험에서 발생하는 와파동을 모사하기 위해서 가장 합리적인 방법은 물리적 실험 동안에 일어난 것과 같은 교란과 초기조건을 도입하는 것이지만 불행하게도 우리가 이들 교란의 특성을 자세하게 파악하는 것은 불가능하다. 따라서 우리가 할 수 있는 방법은 수치교란과 초기조건에 독립적인 해를 얻어 이것을 분석하는 것이다. 이것은 몇번의 사이클 계산에 의하여 이루어질 수 있었으며 그 결과는 Sobey[3]의 실험결과와 정성적으로 일치함이 밝혀졌다. 후향 계단을 갖는 단 유동의 경우 초기 천이들은 근본적으로 급방 사라져 한 사이클 동안에 미치는 영향은 무시할만 하였다[6]. 즉 수치적 교란과 초기 조건에 민감하지 않았다. Fig. 2에서 우리는 한 사이클 동안에 일어나는 흐름 패턴을 관찰할 수 있다. 이 계산은 $Re = 160$, $St = 0.003$ 에 대해서 수행되었고 몇번의 사이클 계산을 통하여 정상 상태에 도달하였다. 초기 가속시에 와동 짝이 도관 팽창 뒷 부근에서 형성되고 시간에 따라 점점 크기가 성장하면서 주유동에 의하여 하류쪽으로 이동된다. 가속 초기부분 동안에는 거의 대칭적인 모습을 보여 주고 단지 초기조건에 의하여 약간의 비대칭이 있음을 알 수 있다. 시간의 경과에 따라 이 비대칭은 점점 확대되고 $t = 0.25$ 쯤에서는 도관 팽창 뒷 부근에서 형성되었던 두개의 주와동은 성장을 멈추고 서서히 조개지기 시작한다. 유량이 줄어들어 도관 전체에서 역압의 원인이 되고 이에따라 주와동의 조개짐으로부터 생성된 작은 와동은 부풀고 커지며 강해진다. 계속된 감속은 이 효과를 강화하고 조개진 와동을 비대칭 도관에서의 흐름과는 달리, 그곳에서는 그것들은 일단 형성되면 하류쪽으로 대류되지 않고 약간 상류쪽으로 이동한다, 하류쪽으로 이동되는 모습을 보여준다. 시간이 더 진행됨에 따라 새로운 와동이 밀 벽면 상에 생성되면서, 이 와동은 주와동의 조개짐으로 생성된 것은 아니다, 파동이 도관 중심부에 나타난다. 즉 주유동은 와동들 사이에 급이진 통로를 따라 흐르고 와동들은 각 벽면상에 엇갈리면서 나타나기 시작한다. 유량이 계속 감소하면서 이 파동은 강화된다. 유량이 사라질 때 우리는 각 벽면상에서

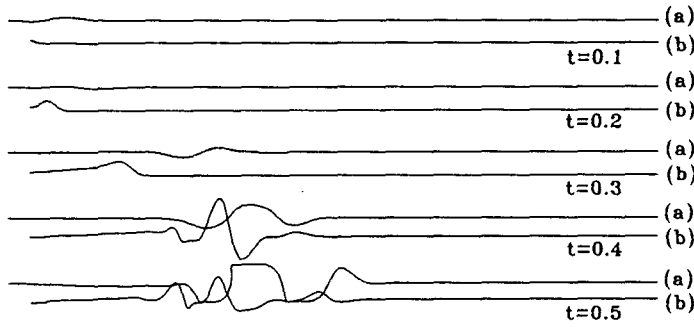


Fig. 3 (a) Upper-wall vorticity, (b) center streamline. $Re = 160, St = 0.003$ and $\epsilon = 3$

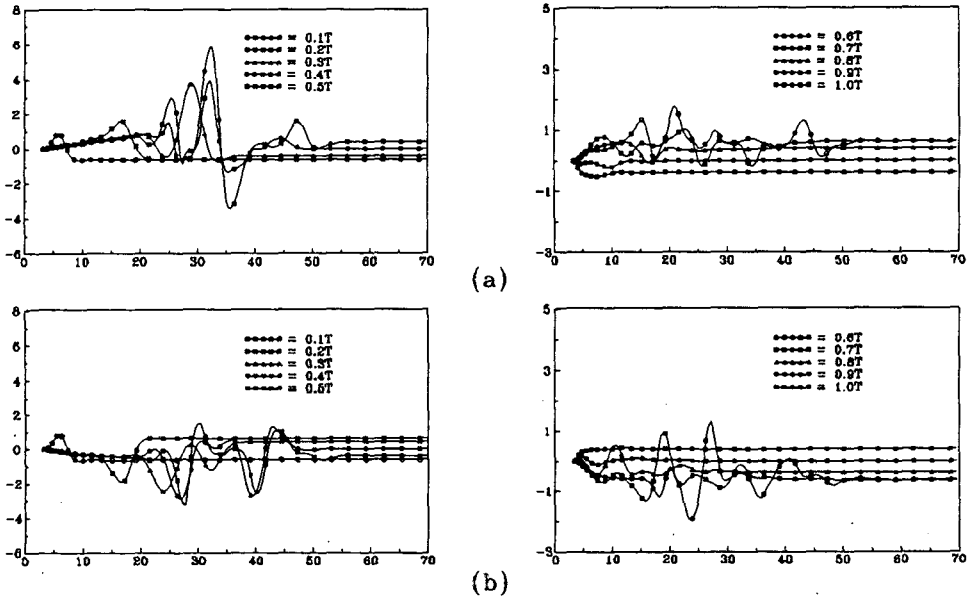


Fig. 4 Wall vorticity: (a) upper wall, (b) lower wall

로 엇갈이리는 와동계를 가진다. $t = 0.5$ 에서 도관은 이 와동들로 차게 된다. 이 결과는 Sobey[3]의 실험적 관찰과 아주 유사한 일치를 보여주고 있다. 또한 이러한 결과는 앞서 지적했듯이 Sobey[3]의 계산 결과와 다르다. 대칭 도관에서의 파동은 비대칭 도관에서 생성되는 와파동은 근본적으로 다른 역학에 기인한 것은 분명하다. 즉 대칭도관에서는 전단층의 불안정성과 초기조건이 매우 중요하다.

streakline은 와도 운동을 가시화하기 위한 좋은 수단이고 와도가 흐름장 어디에 머무르고 있는가를 알기 위하여 사용된다. Fig. 2의 오른쪽은 이러한 streakline을 보여주고 있다. 초반에 코어 흐름이 상당히 직선적이고 대칭적이지만 $t = 0.2$ 쯤에 초기 교란에 의하여 전단층이 조금 변형된 것을 볼 수 있다. 단으로부터 어느정도 거리에서 작은 진폭을 가진 굽이진 진동 형태로 약한 불안정성이 나타난다. 이것이 주와동의 쪼개짐의 원인이 되고 있음을 알 수 있다. 쪼개짐 후 코어 흐름의 굽이진 진동은 더 심해지고 이에 따라 전단층의 더 큰 이동이 일어난다. $t = 0.25$ 이후 유입되는 유량은 줄어든다. 이에 따라 코어 유동은 약해져서 주와동의 쪼개짐으로 생성된 와동들은 부풀기 시작한다. 이것은 코어 유동의 굽이침을 더욱 심화시키고 전단층의 찌그러짐을 더욱 크게 한다. $t = 0.4$ 쯤에 밀벽상에 존재하는 두번째 와동은 코어 흐름을 밀벽쪽으로 당기도록 작용하고, 이 와동 뒤 도관을 채우기 위하여 코어 흐름이 확장될 때 단 앞 벽면에서 생성된 와도가 혀(tongue)를 형성하는 것을 돕는다. 이 혀는 계속해서 말리면서 강도와 크기에 있어 자라고 다시 코어 흐름을 밀벽쪽으로 잡아 당기도록 작용한다. 이 혀는 궁극적으로 주와동의 쪼개짐으로 생성되지 않은 새로운 와동이 된다. 이러한 과정은 와동들이 위, 아래벽에 생성되면서 계속된다. 와동들이 발전할 때 특성 'backward sloping' 모양은 와도의 혀 말리기에 의한 당연한 결과이며 그 결과 윗 벽면상에 새로운 와동이 된다. 유동이 역으로 되면서 입자들 또한 다시 단 상류쪽으로 빠져나가지만 한 주기 후에도 도관에 남아 있음을 알 수 있다. 도관 입구의 중심을 지나는 중심 유선과 윗벽 와도가 Fig. 3에 주어져 있다. 최대 양의 와도 값은 주와동 재부착점 바로 상류 쪽이고 음의 최대 값

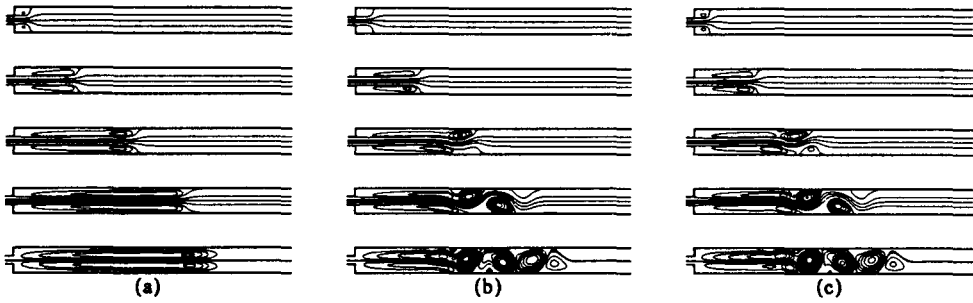


Fig. 5 Streamlines: (a) without perturbation, (b) first cycle with perturbation, (c) after several cycles

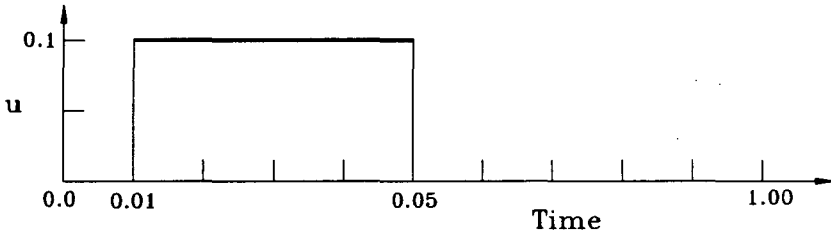


Fig. 6 Artificial perturbation: sudden velocity jump in the upper half of the channel inlet

은 재부착점 바로 하류 쪽이라는 것을 알 수 있다. 결과적으로 전단구배는 주와동 재부착점 부근에서 제일 크다. Fig. 4는 밑, 윗벽 상의 벽 와도를 보여준다. 최대점은 정지 상태로 있는 것이 아니라 와동과 같이 움직인다. $t = 0.5$ 이후 흐름은 역으로 흐르면서 와동들은 파괴되고 벽 와도는 급격히 줄어든다. 최대점은 다시 단쪽으로 이동되고 $t = 0.8$ 즈음에서는 벽 와도 값이 매우 적어진다. 즉 잔류 파동 형태가 거의 사라지고 단지 단 근처에서만 약간 남아 있음을 알 수 있다. Fig. 5는 세가지 경우의 흐름을 보여준다: (a)는 인공적 교란이 없을 때, (b)는 Fig. 6에 나타낸 인공적 교란을 사용하였을 때, (c)는 사이클 계산으로 정상상태에 도달하였을 때를 각각 보여준다. Fig. 5a는 $t = 0.5$ 에 다가가면서 약간의 비대칭 흐름을 보여준다. 하지만 와파동으로 발전하기에는 시간적 여유가 없다. Fig. 5b와 5c의 흐름은 매우 유사함을 관찰할 수 있다. 결론적으로 대칭 도관에서 \sin 함수적으로 입구 흐름이 강요될 때 와파동이 생성되기 위해서는 대칭성이 초기 가속시에 깨질 필요가 있고 그것은 잔류 유동이나 적당한 크기의 초기 인공적 교란에 의하여 이루어질 수 있음을 알 수 있다.

정상흐름의 경우엔 와파동이 관찰되지 않는 것으로 봐서 와파동에 관한 근본적 이유는 도관을 통한 flux에 있어서의 진동이다.

4. 결론

본 연구는 기하학적으로 단순하지만 실제적 응용성이 풍부하고 좀 더 복잡한 유동의 기초가 되는 대칭도관에서의 정상, 비정상 흐름을 다루었다. 사용된 수치 스킴은 공간에 대해서는 중앙차분을 적용함으로써 가능한 한 수치적 확산을 줄였고, 시간에 대해서는 사다리꼴 공식을 적용함으로써 2차의 정확도를 유지했다. 완전 엇갈림 격자를 사용함으로써 wiggles를 제거했으며 선형시스템은 근래에 많이 연구되고 개발된 PCGS와 BCGS로 계산 시간을 줄이면서 매우 정확하게 풀 수 있었다.

대칭 도관에서의 정상 흐름은 후향 단에서 보다 더 적은 Reynolds 수에서 불안정해진다. 같은 중평비를 갖는 실험조건이라 하더라도 훨씬 적은 Reynolds 수에서 3차원 효과가 나타나서 쉽게 난류로 발전한다. 이것은 단 뒤에 형성되는 전단층이 대칭도관일 때 더 강해서 쉽게 불안정성이 발생하기 때문이라고 생각한다. 대칭 도관 흐름에서 두개의 다른 길이의 재순환 영역이 형성되기 시작하는 임계 Reynolds 수는 중평비와 실험조건에 따라 좌우될 것이다. 하지만 기존의 실린더 주위 유동에 관한 연구는 중평비가 어느 정도 이상이면 난류 레벨은 적당히 작고 유입 유동의 균일성이 보장 된다면 임계 Reynolds 수(Re_c)는 47-48을 제안하였다[11]. 이와 마찬가지로 대칭 도관의 경우도 중평비가 커서 3차원 효과를 무시할 수 있고, 실험에서 발생하는 각종 교란을 어느 정도로 줄인다면 임계 Reynolds 수가 정해될 것이다. Sobey[3]는 중평비가 15:1과 5:1을 갖는 실험에서 $Re_c = 25$ 의 결과를 제시했고 Durst[1]등의 경우는 9.2:1의 중평비에서 $Re = 56$, Sobey[3]의 Reynolds 수로 환산하면 18.7이다, 일 때 대칭흐름이었다. Cherdron[2]등은 8:1의 중평비에서 $Re = 30$ 근처에서 비대칭 흐름이 되었다. 우리의 경우 평창비가 3:1일 때 $Re_c = 25$ 를 얻었다.

후향 단을 갖는 도관에서의 흐름이 진동적일 때 Sobey[3]의 실험과 Deblois[5]등의 수치 계산에서

eddy doubling, 초기엔 가로 방향으로 대칭성을 보이는 하나의 와동이 점차 비대칭으로 발전하면서 종국에는 두 개의 같은 방향으로 회전하는 와동으로 쪼개지는 것, 이 관찰되었다. Deblois[5] 등은 $Re = 700, St = 0.01$ 에서 계산을 수행한 반면에, Tutty & Pedley[6]가 $Re = 750, St = 0.016$ (Deblois[5] 등의 그것들로 변환했음)일 때 한 계산은 eddy doubling을 보여주지 않았다. 우리의 계산도 eddy doubling을 보여주지 않았다. 이와같이 진동적 흐름은 수치 스킴이나 수치 변수에 민감한 유동이라고 생각된다. 마찬가지로 대칭도판에서의 비정상 유동도 Reynolds 수가 160이상일 때는 적어도 조사된 격자에 따라서는 일관된 모습을 보여주지 않았다. 그럼에도 불구하고 대칭도판에서 파동의 생성 원인과 발전 연구에는 많은 도움을 주었다.

참고문헌

- [1] Durst, F., Melling, A. and Whitelaw, J. H., "Low Reynolds Number Flow over a Plane Symmetric Sudden Expansion," *J. Fluid Mech.*, Vol. 64(1974), pp.111-128.
- [2] Cherdron, W. and Durst, F. Whitelaw, J. H., "Asymmetric Flows and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansions," *J. Fluid Mech.*, Vol. 84(1978), pp.13-31.
- [3] Sobey, I. J., "Observation of Waves during Oscillatory," *J. Fluid Mech.*, Vol. 151(1985), pp.395-426.
- [4] Abbot, D. E. and Kline, S. J., "Experimental Investigations of Subsonic Turbulent Flow over Single and Double Backward Facing Steps," *J. Basic Engng, Trans. A.S.M.E.*, Vol. 84(1962), p.317.
- [5] Deblois, B. M., Sobey, I. J. and Alani, S., "Characteristics of the vortex wave," *J. Fluid Mech.*, Vol. 253(1993), pp.27-43.
- [6] Tutty, O. R. and Pedley, T. J., "Oscillatory Flow in a Stepped Channel," *J. Fluid Mech.*, Vol. 247(1993), pp.179-204.
- [7] Min, B. K. and Chang, K. S., 1996, "A Momentum Coupling Method on the Staggered Grid for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes equations," *Intl J. Num. Meth. Fluids*, submitted.
- [8] 민병광·장근식, 1993, "후향계단에서의 재부착 유동해석," 제3회대한기계학회 전산유체역학 분과회 WORKSHOP 초록집, 서울대학교.
- [9] Braza, M., Chassaing, P. and Haminh, H., "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol. 165(1986), pp.79-130.
- [10] Martinez, G., "Thèse Docteur-Ingénieur, I.N.P. Toulouse," (1979).
- [11] Norberg, C., "An Experimental Investigation of the Flow around a Circular Cylinder: Influence of Aspect Ratio," *J. Fluid Mech.*, Vol. 258(1994), pp.287-316