

2링크 도립진자의 강인성 제어에 관한 연구

김정중* 이기상*
*단국대학교 전기공학과

LQG/LTR based Gain Scheduling Control of two link inverted pendulum

Jeong-Jung Kim* Kee-Sang Lee*

*Dept. of Electrical Eng. Dankook University

Abstract - An LQG/LTR based gain scheduling control scheme for the two link inverted pendulum is presented. It is shown by simulation that the gain scheduling scheme based on the robust linear control theory still preserves the robust property of the linear control scheme and can be applied to control a class of nonlinear systems.

1. 서 론

본 논문에서는 대표적인 비선형 시스템인 2링크 도립진자계[1]를 위한 강인성 제어기법을 제안하고 그 성능을 검토한다. 이 도립진자계는 강한 비선형성으로 인하여 고전제어이론에 의한 제어가 곤란하여, 최근 선형시스템에 대한 강인성 제어기법의 확장 적용과 퍼지논리제어[2], 퍼지-신경망제어기법[3] 등의 지능제어기법의 적용연구가 활발히 진행되고 있다. 본연구에서는 강인성 제어기법 중 LQG/LTR [4]이론에 근거한 GSC (Gain Scheduling Control) 기법의 적용 가능성을 고찰한다. 제안된 GSC기법에서는 각 평형점에서 구해진 선형모델에 LQG/LTR기법을 적용하여 제어이득을 구하고 각 제어이득을 Scheduling 변수인 첫 번째 링크의 각변위에 관한 비선형함수로 실현하며 상태추정기로는 EKF (Extended Kalman Filter)[5]를 도입한다. 제안된 기법의 유용성을 보이기 위해 전상태 제한(LQ)을 이용한 GSC를 설계하여 제어성능을 비교하였다. 이 성능의 비교 결과는 LQG/LTR에 근거한 비선형 GSC기법을 비선형계의 제어에 도입할 경우, 어느 정도의 강인성확보가 가능하며, 다출력 비선형 비최소 위상계의 제어에 적용될 수 있음을 보여준다.

2. 도립진자의 모델링과 선형화

2.1 도립진자의 모델링

본 논문에서 사용된 도립진자는 첫 번째 링크에 구동용 액추에이터를 가지고 있다.

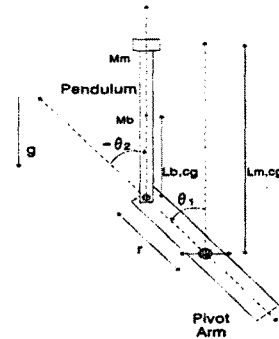


그림 1. 2 링크 도립진자

이 계통은 2 자유도를 가지며, 그 동특성은 첫 번째 링크의 수직선에 대한 각변위(θ_1)와 수직선으로부터 원의 호와 진자의 회전축을 지나는 선까지의 각변위(θ_2)만으로 표현할 수 있다. 두변수 (θ_1, θ_2)의 일반화 좌표를 이용하여 시스템의 운동 에너지와 위치에너지를 구하고 Lagrangian방법을 이용하여 시스템의 동력학식(1)을 구한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = f(\theta_1, \theta_2) + u \quad (1)$$

여기서 M은 관성을 나타내는 행렬이고, M에서 비대각요소는 결합관성항을 나타낸다.

$$f(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_1 = & 2r\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(M_m L_m + M_b L_b) \sin(\theta_2) \\ & + \dot{\theta}_2^2(M_m L_m + M_b L_b) \sin(\theta_2) \\ & + (M_{enc} + M_b + M_m)gr \sin(\theta_2) \\ & + (M_m L_m + M_b L_b)g \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & -\dot{\theta}_1^2 r M_m L_m \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 r M_b L_b \sin(\theta_2) \\ & + g M_m L_m \sin(\theta_1 + \theta_2) + g M_b L_b \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$M_{11} = I_1 + I_b + I_m + M_{enc} r^2 + M_m \{ r^2 + 2rL_m \cos(\theta_2) + L_m^2 \} + M_b \{ r^2 + 2rL_b \cos(\theta_2) + L_b^2 \}$$

$$M_{12} = I_m + I_b + M_m \{ rL_m \cos(\theta_2) + L_m^2 \} + M_b \{ rL_b \cos(\theta_2) + L_b^2 \}$$

$$M_{21} = I_m + I_b + M_m \{ rL_m \cos(\theta_2) + L_m^2 \} + M_b \{ rL_b \cos(\theta_2) + L_b^2 \}$$

$$M_{22} = I_m + I_b + M_m L_m + M_b L_b$$

$$u = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2 독립진자 모델의 선형화

선형화를 위하여 다음의 상태변수를 선택하고

$$\bar{x} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_1 \ \theta_2]^T \quad (5)$$

평형점 i 에서 상태벡터와 제어벡터를 각각 \bar{x}_i, \bar{u}_i 라하면, 각 평형점 근방에서 다음 관계가 성립된다.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_i + x^* \\ \bar{u} &= \bar{u}_i + u^* \end{aligned} \quad (6)$$

각 평형점에서 \bar{x}_i 는 다음값을 가지며

$$\bar{x}_i = [\theta_{1i} \ \theta_{2i} \ \theta_{1i} \ \theta_{2i}]^T = [0 \ 0 \ +\theta_{1i} \ -\theta_{1i}]^T \quad (7)$$

선형화 결과는 다음과 같다. 이 모델은 이음점에서의 마찰에 의한 제동과 구동장치의 동특성을 고려한 결과이다.

$$\dot{x}^* = A x^* + B u \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} M_{11} + J_m N^2 & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D & 0 & G_{11} & G_{12} \\ 0 & -b_2 & G_{21} & G_{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} M_{11} + J_m N^2 & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N K_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_{1,1} &= (M_m L_m + M_b L_b) g \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ G_{1,2} &= (M_{enc} + M_b + M_m) g r \cos(\theta_{2i}) \\ &\quad + (M_m L_m + M_b L_b) g \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ G_{2,1} &= (M_m L_m + M_b L_b) g \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ &= G_{1,1} \\ G_{2,2} &= (M_m L_m + M_b L_b) g \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \end{aligned} \quad (9)$$

이 시스템은 두 개의 영점이 복소평면 우반부에 존재하므로 비최소위상 (nonminimum phase) 시스템이다. 또한 θ_1 의 각변위가 90° 근방에 위치할 경우 제어 불가능하게 된다.

3. 제어기의 설계

드립진자의 GSC 설계는 각 평형점에서 얻어진 선형 모델에 근거한 LQG/LTR 제어이득을 구하는 과정과 이들 이득을 scheduling 변수의 함수로 표현하여 실현하는 과정으로 이루어진다.

3.1 선형모델에 대한 LQG/LTR 제어기 설계

LQG/LTR 제어기는 LQG 제어기와 같이 상태추정을 위한 KF와 상태제어 제어이득으로 구성된다. 본 논문에서는 비선형 상태추정을 위해 EKF를 도입하였다. 제어기에 추적특성을 부여하기 위하여 식(10)과 같이 상태벡터에 입력의 적분요소를 첨가하였다.

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ u]^T \quad (10)$$

위의 상태변수에 대한 선형모델을 다음과 같고

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A' x + B' u \\ y &= C' x \end{aligned} \quad (11)$$

이 계통에 대한 EKF는 다음으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A_f \hat{x} + H e \\ e &= y - \hat{y} \\ \hat{y} &= C' \hat{x} \end{aligned} \quad (12)$$

이 EKF는 다음 전달함수를 가진다.

$$\hat{y} = C'(sI - A_f)^{-1} H \quad (13)$$

목표필터루프설계는 EKF 전달함수 루프형상이 요구되는 강인성을 보장해주는 주파수영역 및 시간영역 응답을 갖도록 식(14)의 필터이득행렬 H 를 결정하는 것이며 이는 식(15)의 ARE (Algebraic Riccati Equation) 내의 설계 파라미터 Q_f 와 R_f 를 적절히 선정함으로써 달성된다.

$$H = P C'^T R_f^{-1} \quad (14)$$

$$A_f' P + P A_f' + Q_f - P C'^T R_f^{-1} C' P = 0 \quad (15)$$

여기서 A_f' 는 EKF의 시스템 근사 행렬이다. EKF와 제어기를 포함한 전체 시스템의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{y}{w} = C(sI - A')^{-1} B' K \phi_r(s) H \quad (16)$$

$$\begin{aligned} w &= \text{ref} - y \\ \phi_r(s) &= sI - (A_f' - H C - B' K) \end{aligned}$$

루프전달회복은 식(16)의 루프형상이 식(13)의 목표 필터의 루프형상으로 회복되도록 식(17)의 제어이득 행렬 K 를 결정하는 문제로 귀착되며 이는 식(18)의 ARE 내의 설계 파라미터 Q_c 와 R_c 를 적절히 선정함으로써 달성된다.

$$K = R^{-1} B'^T S \quad (17)$$

$$S A' + A'^T S + Q_c - S B' R_c^{-1} B'^T S = 0 \quad (18)$$

3.2 LQG/LTR을 이용한 이득조정제어

전술한 바와 같이 이 독립진자의 모든 평형상태는 θ_1 에 의해 규정된다. 따라서 본 연구에서는 $0^\circ \sim 80^\circ$ 구간에 대하여 θ_1 에 의해 규정되는 각 동작점에서 구해진 선형모델에 대해 선형 제어이득행렬 결정하고 구해진 결과를 다음과 같이 Scheduling 변수 (θ_1)의 함수로 표현함으로써 비선형 제어이득행렬 $K(\theta_1)$ 로 실현하였다.

$$\begin{aligned} K(\theta_1) &= [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_5]^T \\ K_1 &= -134.65096 \theta_1^4 + 63.19786 \theta_1^3 - 119.50276 \theta_1^2 \\ &\quad + 13.613075 \theta_1 - 139.19116 \\ K_2 &= -131.99882 \theta_1^4 + 162.07414 \theta_1^3 - 129.66131 \theta_1^2 \\ &\quad + 13.531192 \theta_1 - 106.93756 \\ K_3 &= -655.09601 \theta_1^4 + 797.76920 \theta_1^3 - 588.49665 \theta_1^2 \\ &\quad + 66.597663 \theta_1 - 640.64443 \\ K_4 &= -649.12970 \theta_1^4 + 798.44779 \theta_1^3 - 653.58684 \theta_1^2 \\ &\quad + 66.664505 \theta_1 - 493.89484 \\ K_5 &= 0.4251908 \theta_1^4 - 0.2312247 \theta_1^3 + 0.6663561 \theta_1^2 \\ &\quad - 0.01048178 \theta_1 + 0.2379632 \end{aligned} \quad (19)$$

이제 LQG/LTR에 근거한 GSC의 제어입력은 다음과 같다.

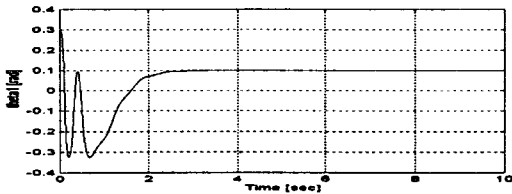
$$u = -K(\theta_1) \hat{x} \quad (20)$$

4. 시뮬레이션 및 성능검토

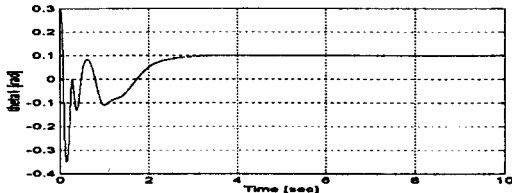
LQG/LTR을 이용한 GSC의 실질적 적용가능성을 검토하기 위하여 전상태제환을 이용한 GSC를 설계하고 두제어계의 성능을 비교검토하였다. 시뮬레이션에 사용된 시스템 파라미터는 표 1과 같다. 그림 2과 그림 3은 도립진자를 $\theta_1=0.1[\text{rad}]$, $\theta_2=-0.1[\text{rad}]$ 에 위치시킨 경우이다. LQG/LTR을 이용한 GSC기법이 전상태제환 GSC와 거의 동일한 제어성능을 가짐을 보여주고 있다.

표 1 도립진자의 파라미터

I_1 (kg-m ²)	Pivot arm의 관성	0.0019
I_m (kg-m ²)	분동의 관성	0.000024
I_b (kg-m ²)	진자의 관성	0.0012
M_{enc} (kg)	엔코더와 braket의 무게	0.154
M_m (kg)	분동의 무게	0.189
M_b (kg)	진자의 무게	0.081
L_m (m)	첫 번째 링크의 중심점으로부터 분동까지의 거리	0.43
L_b (m)	두 번째 링크로부터 진자의 무게중심까지의 거리	0.215
r (m)	첫 번째 링크에서부터 두 번째 링크까지의 거리	0.16
b_1	점성마찰	0.0008
b_2	점성마찰	0.000181
K_t (Nm/A)	토오크 상수	0.1336902
J_m (kg-m ²)	모터의 관성력	0.00022597
N	기어비	1
D (Nm/(r/s))	점성 관성 계수	0.0018



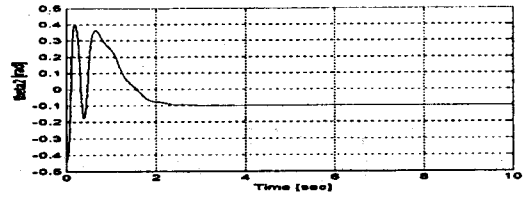
a) 전상태제환을 이용한 GSC



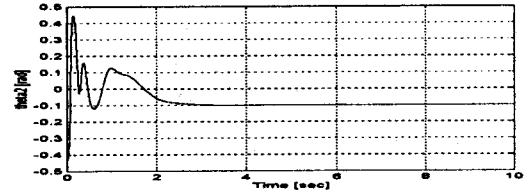
b) LQG/LTR을 이용한 GSC

그림 2. $\theta_1=0.3(\text{rad})$, $\theta_2=-0.43(\text{rad})$ 의 초기상태일때 출력 θ_1

기준입력 $\theta_{1ref}=0.1(\text{rad})$ $\theta_{2ref}=-0.1(\text{rad})$



a) 전상태제환을 이용한 GSC



b) LQG/LTR을 이용한 GSC

그림 3. $\theta_1=0.3(\text{rad})$, $\theta_2=-0.43(\text{rad})$ 의

초기상태일때 출력 θ_2

기준입력 $\theta_{1ref}=0.1(\text{rad})$ $\theta_{2ref}=-0.1(\text{rad})$

3. 결 론

본 논문에서는 대표적인 비선형 시스템인 도립진자의 제어를 위해 LQG/LTR이론에 근거한 GSC기법을 제안하였고 시뮬레이션을 통하여 전상태제환을 이용한 GSC와 그 성능을 비교 검토함으로써 제안된 기법의 유용성을 입증하였다. 제안된 GSC기법의 적용 결과는 제안된 기법이 단일 입력 다중 출력을 가지는 비최소위상 비선형 시스템의 제어에도 효과적으로 도입될 수 있음을 보여준다.

[참 고 문 헌]

- [1] Karl Chrisman, "Coplanar Inverted Pendulum and Pivot Arm", M.S. thesis, Mechanical Engineering, Univ. of Washington, 1994.
- [2] Yurkovich S., Widjaja M., "Fuzzy controller synthesis for an inverted pendulum system", Control Engineering Practice, vol. 4, no. 4, pp. 455-469, 1996
- [3] 강민구 외, "퍼지-뉴럴 제어를 이용한 도립진자 제어기의 실현", '91 한국자동제어학술회의논문집, pp. 878-883, 1991
- [4] Frank L. Lewis, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall, 1992.
- [5] Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews, *Kalman Filtering Theory and Practice*, Prentice-hall, 1993.