불확정성 선형시스템의 원판내 강인 극점배치

°박 상민**, 김 진훈*, 유 정웅**
충북대학교 제어계측공학과*, 충북대학교 전기공학과**

Robust pole assignment inside a disk of uncertain linear system

°Sang-Min Park**, Jin-Hoon Kim*, Jeong-Woong Ryu**
Dept. of Control and Instrume., Chungbuk National Univ.*
Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National Univ.**

Abstract - In this paper, we consider the robust pole assignment inside the circular region for linear systems with time-varing uncertainty. The considered uncertainties are the norm bounded uncertainty and the matrix polytopes type uncertainty. Since the considered uncertainties are time-varying, it should remind that the closed loop system be time-varing system. Therefore, we should consider not only the pole assignment but also the stability. We present new conditions that guarantee the robust pole assignment and the robust stability. Finally, we show the usefulness of our results by an example.

1. 서 론

선형 시스템의 동적 특성은 시스템의 극점 위치에 따라 크게 좌우되므로, 폐루프 시스템의 극점을 원하는 부분에 위치시키는 것은 중요한 문제이며 많은 연구가 있다[1]. 또한, 물리적 시스템의 수학적 모델에서 설계된 시스템의 극점은 불확정성 또는 시스템 파라미터 변동의 영향으로 이동될 수 있다.

선형 시스템에서 불확정성이 없는 경우 모든 극점들을 원하는 값 또는 영역에 정확하게 위치하도록 하는 것이 가능하다[2][3]. 그러나, 불확정성을 포함하는 선형 시스템의 경우 모든 극점이 원하는 위치에 있도록 하는 것은 불가능하므로 특정한 영역에 위치하도록 하는 연구 및 이러한 영역에 모든 극점이 있을 때 전체 시스템의 안정도 및 2차 가격함수의 상한을 구하는 연구가 진행되고 있다. 먼저, 불확정성이 시불변(time-invariant)인 경우의 강인 극점 배치에 관한 대표적인 결과로는 Anderson과 Moore[2], Furuta과 Kim[4]의 것이 있고, 불확정성이 시변(time-varying)인 경우의 대표적 결과로는 Haddad와 Bernstein[5], Petersen[6], Lou와 Bosch[7]이 있다. 특별히, 불확정성이 시변인 경우 불확정성이 없는 공칭시스템(nominal system)이 선형 시불변일지라도 전체 시스템은 시변이므로 안정성은 극점만으로 판별할 수 없다. 따라서, 시변 불확정성인 경우에는 강인 극점배치 뿐만 아니라 안정성 문제도 별도로 다루어야한다.

이 논문에서는 시간에 따라 변화하는 비구조적 또는 구조적 불확정성을 가지는 선형 시스템의 모든 극점이 L.H.P.상의 중심이 α 이고 반경이 r인 원판 $D(\alpha, r)$ 내에 위치하도록 하면서 전체 시스템의 안정성이 보장되는 조건들을 제시하였다. 여기서 고려된 불확정성은 불확정성의 노옴 상한만이 알려진 비구조적 불확정성과 알려진 행렬의 조합의 형태인 구조적 불확정성 두가지이다. 끝으로 예제를 통하여 제시된 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서 $(\cdot)^T$ 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고, $\lambda_{\min(\max)}(\cdot)$은 대칭 행렬 고유치의 최소(최대)를 나타낸다. 한편, $\|\cdot\|$ 는 Euclidean 벡터노옴 또는 이것의 유사행렬(induced matrix) 노옴을 말하고, 대칭 행렬 X 에 대하여 $X>0$ 는 행렬 X 가 양확정(positive-definite)임을 나타낸다. 끝으로, I_n은 $n\times n$ 항등행렬을 의미한다.

2. 강인 극점배치 및 안정성

불확정성을 포함하는 선형 시스템에 상태궤환제어를 행하면 일반적으로 다음의 폐루프 시스템을 얻는다.

$$\dot{x}(t)=(A+E(t))x(t) \tag{1}$$

여기서, $x(t)\in R^n$는 상태, $A\in R^{n\times n}$는 주어진 안정한 상수 행렬이다. 또한 시변 불확정성을 나타내는 행렬 $E(t)$는 다음의 비구조적 불확정성

$$\|E(t)\| \le \eta, \quad \forall t\ge 0 \tag{2.1}$$

또는 구조적 불확정성

$$E(t)=\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\ E_i \tag{2.2}$$

인 경우를 고려한다. 여기서, $E_i\in R^{n\times n}$는 알려진 상수 행렬이다.

이 논문에서는 불확정성 식(2)를 가지는 시스템(1)의 모든 극점들이 복소평면상에서 중심이 $-\alpha$ $(\alpha>0)$이고 반경이 r인 원판

$$D(\alpha, r)=\{\ \lambda\in C\ :\ \ |\lambda+\alpha|\le r\ \} \tag{3}$$

에 위치하도록 하면서 시스템 (1)의 안정성이 보장되는 조건을 구하는 것이다. 따라서, 불확정성이 없는 시스템 행렬의 극점은 일반성을 저해하지 않으면서 $\lambda_i(A)\in D(\alpha, r)$라 가정한다.

다음의 예비결과들은 앞으로 제시되는 주요결과들의 증명에 이용된다.

보조 정리 1 : 대칭행렬 $X, Y \in R^{n \times n}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lambda_{\max}(X+Y) \le \lambda_{\max}(X) + \lambda_{\max}(Y)$$

$$\lambda_{\min}(X+Y) \ge \lambda_{\min}(X) + \lambda_{\min}(Y)$$

보조 정리 2 : 주어진 행렬 $A \in R^{n \times n}$의 고유치가 L.H.P.의 $D(\alpha, r)$에 위치하게될 필요충분조건은 $P = P^T > 0$인 행렬이 존재하여 다음을 만족하는 것이다.

$$\frac{(A+\alpha I)^T}{r} P \frac{(A+\alpha I)}{r} - P = -Q \qquad (4)$$

여기서 행렬 Q는 양확정인 임의 행렬이다.

증 명 : 행렬 A의 고유치가 원판 $D(0,1)$에 있을 필요충분조건은 임의의 행렬 $Q = Q^T > 0$에 대하여 $A^T PA - P = -Q$ 를 만족하는 $P = P^T > 0$가 존재하는 것이므로[8], 행렬 A의 고유치가 $D(\alpha, 1)$에 있을 필요충분 조건은 임의의 행렬 $Q = Q^T > 0$에 대하여

$$(A+\alpha I)^T P (A+\alpha I) - r^2 P = -Q$$

를 만족하는 $P = P^T > 0$ 가 존재하는 것이다. 따라서, 행렬 A의 고유치가 $D(\alpha, r)$에 있을 조건은 임의의 행렬 $Q = Q^T > 0$에 대하여 식(4)를 만족하는 $P = P^T > 0$가 존재하는 것이다.

보조 정리 3 : 불확정성 시스템(1)을 고려하자. 다음을 만족하는 행렬 $P = P^T > 0$인 P가 존재한다면

$$\frac{(A+\alpha I+E(t))^T}{r} P \frac{(A+\alpha I+E(t))}{r} - P < 0 \qquad (5)$$

불확정성 (2)를 가지는 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$내에 있고, 또한 시스템 (1)은 안정하다.

증 명 : 식(5)를 만족하면 행렬 $A+E(t)$의 고유치가 원판 $D(\alpha, r)$에 있음은 보조정리 1에 의해 명확하다. 다음으로 조건식 (5)를 만족하면 시스템 (1)이 안정함을 보인다. 안정성을 보이기 위해서 Lyapunov후보 함수를 $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ 이라 하고, 시스템(1)의 궤적에 따른 이것의 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\dot{V}(x) = x^T(t)[(A+E(t))^T P + P(A+E(t))]x(t) \qquad (6)$$

또한, (5)의 행렬 부등식을 다시 쓰면 다음이 되므로

$$(A+E(t))^T P + P(A+E(t)) < -\frac{1}{\alpha}(A+E(t))^T P(A+E(t)) - \frac{(\alpha^2 - r^2)}{\alpha} P$$

이를 (6)에 적용하고, $\alpha > r$을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &< -x^T(t)\left(\frac{1}{\alpha}(A+E(t))^T P(A+E(t))\right)x(t) \\ &< -x^T(t)\left(\frac{\alpha^2 - r^2}{\alpha}\right)x(t) \\ &< 0, \quad \forall x \ne 0\end{aligned}$$

따라서 식(5)를 만족하면 시스템 (1)의 모든 고유치는 $D(\alpha, r)$내에 있고 또한 시스템 (1)은 안정하다.

다음으로는 불확정성 (2)를 가지는 시스템 (1)의 모든 극점이 (3)에 정의된 $D(\alpha, r)$내에 존재하면서 또한 시스템의 안정성이 보장되는 조건들을 제시한다. 먼저 (2.1)의 비구조적 불확정성의 경우에 대한 결과를 제시한다.

정리 1 : 비구조적 불확정성 식(2.1)을 가지는 시스템 (1)을 고려하고, 행렬 $P = P^T > 0$를 (4)의 해(solution)라고 하자.
만약 다음을 만족하는 상수 $\varepsilon > 0$과 $Q = Q^T > 0$이 존재하면

$$\eta \le r \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{(1+\varepsilon)\lambda_{\min}(Q) - \varepsilon\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\max}(P)}\right)^{1/2} \qquad (7)$$

불확정성 (2.1)을 가지는 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$의 내부에 위치하게 되고 시스템 (1)은 안정하다.

증 명 : 먼저 보조정리 3으로부터 불확정성 (2.1)를 가지는 시스템 (1)이 $D(\alpha, r)$의 내부에 위치하게 되고 시스템 (1)의 안정할 조건은

$$\frac{(A+\alpha I+E(t))^T}{r} P \frac{(A+\alpha I+E(t))}{r} - P < 0 \qquad (8)$$

이다. 따라서 식(7)을 만족하려면 식(8)을 만족함을 보이면 된다. 먼저 (2.1)의 $\|E(t)\| \le \eta$을 이용하면 식(7)을 만족하여 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\max}(E^T E) < \frac{1}{(1+\frac{1}{\varepsilon})\lambda_{\max}(P)} \cdot \lambda_{\min}((1+\varepsilon)r^2 Q - \varepsilon r^2 P) \\
&\Rightarrow (1+\tfrac{1}{\varepsilon})\lambda_{\max}(E^T PE) < \lambda_{\min}((1+\varepsilon)r^2 Q - \varepsilon r^2 P) \\
&\Leftrightarrow \lambda_{\max}\left((1+\tfrac{1}{\varepsilon})E^T PE\right) < -\lambda_{\max}(-(1+\varepsilon)r^2 Q + \varepsilon r^2 P) \\
&\Rightarrow \lambda_{\max}\left(-(1+\varepsilon)r^2 Q + \varepsilon r^2 P + (1+\tfrac{1}{\varepsilon})E^T PE\right) < 0 \\
&\Rightarrow -(1+\varepsilon)r^2 Q + \varepsilon r^2 P + (1+\tfrac{1}{\varepsilon})E^T PE < 0 \\
&\Leftrightarrow -r^2 Q + (1+\tfrac{1}{\varepsilon})E^T PE + \varepsilon(-r^2 Q + r^2 P) < 0 \\
&\Leftrightarrow -r^2 Q + (1+\tfrac{1}{\varepsilon})E^T PE + \varepsilon(A+\alpha I)^T P(A+\alpha I) < 0 \\
&\Rightarrow -r^2 Q + E^T PE + \varepsilon(A+\alpha I)^T P(A+\alpha I) \\
&\qquad + \tfrac{1}{\varepsilon}E^T PE < 0 \\
&\Leftrightarrow -r^2 Q + E^T PE + (A+\alpha I)^T PE + E^T P(A+\alpha I) < 0 \\
&\Rightarrow (A+\alpha I)^T P(A+\alpha I) + E^T PE + E(t)^T P(A+\alpha I) \\
&\qquad + (A+\alpha I)^T PE(t) - r^2 P < 0 \\
&\Rightarrow \frac{(A+\alpha I+E(t))^T}{r} P \frac{(A+\alpha I+E(t))}{r} - P < 0
\end{aligned}$$

따라서 식(7)을 만족하면 불확정성 (2.1)을 가지는 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$의 내부에 위치하게 되고 시스템 (1)은 안정하다.

정리 2 : 구조적 불확정성 식(2.2)을 가지는 시스템 (1)을 고려하고, 행렬 $P = P^T > 0$를 식(4)의 해(solution)라고 하자.
만약 다음을 만족하는 상수 $\varepsilon > 0$과 $Q = Q^T > 0$이 존재하면

$$\sum_{i=1}^{m} q_i^2(t) \leq r \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{(1+\varepsilon)\lambda_{\min}(Q)-\varepsilon\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\max}(P)\lambda_{\max}(E_o)}\right)^{1/2} \qquad (9)$$

불확정성 (2.2)를 가지는 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$의 내부에 위치하게 되고 시스템 (1)은 안정하다. 여기서 $E_O = \sum_{i=1}^{m}(E_i^T E_i)$이다

증 명 : 다음의 관계

$E^T P E \leq \lambda_{\max}(P) \cdot \sum_{i=1}^{m} q_i^2(t) \cdot \sum_{i=1}^{m}(E_i^T E_i)$ 를 이용하여 정리 1의 증명과 같은 방법으로 하면 쉽게 증명이 되므로 여기서는 생략한다.

3. 수치 예제

예제 1 : 다음으로 기술되는 불확정성를 가지는 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = [A + E(t)]x(t) \qquad (10)$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이고 $\lambda_i(A) = \{-1, -2\}$이다.

우리는 시스템 (10)의 모든 극점이 $D(1.5, 1)$, 즉 중심이 -1.5이고 반지름이 1인 원내에 있을 불확정성의 범위를 찾는 것이다.

먼저, (2.1)의 비구조적 불확정성인 경우의 불확정성의 범위를 구하기위하여는 (7)을 최대로 하게하는 $\varepsilon > 0$ 과 $Q = Q^T > 0$를 찾아야 한다. 우리는 MATLAB^{TM}의 최적화 Toolbox 중의 constr.m을 이용하여 이를 구하였다. 구한 결과는 $Q = \begin{bmatrix} 0.7938 & 0.3634 \\ 0.3634 & 0.3613 \end{bmatrix}$과 $\varepsilon = 0.0036$을 얻었고 불확정성의 범위 $\eta = 0.0118$을 얻었다.

4. 결 론

이 논문에서는 시변 불확정성을 가지는 선형 시스템의 모든 극점이 주어진 원판내에 위치하고 또한 이 시스템의 안정성이 보장되는 조건을 제시하였다. 고려된 불확정성은 비구조적인 경우와 구조적인 경우이다. 또한 조건상의 최대치를 구하는 최적화 문제는 MATLAB^{TM} 의 최적화 Toolbox를 이용하였다. 또한 예제를 통하여 제시된 결과의 유용성을 보였다.

[참 고 문 헌]

[1] Y.T.Juang, Z.C.Hong, Y.T.wang. "Pole-Assig-nment for uncertain systems with structured Perturbations" IEEE Trans. on circuit and sys. Vol. 37, No.1, pp 107-110, 1990.

[2] B.D.O.Anderson, T.B.Moore. " Optimal Control ", Prentice-Hall intern., 1989.

[3] R.V.Patel, M.Toda. "Robustness of linear Quadratic state feedback design in the presence of systems uncertainty" IEEE Trans. on Autom. control, Vol AC-22, No 6, pp 945-947, 1977.

[4] K.Furuta, S.B.Kim. . "pole-assignment in a specified disk", IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-32, No 5, 1987

[5] W.M Haddad, D.S.Berstein "Cotroller Design with Regional pole Constraints" IEEE Trans. on Autom. control Vol. 37, No.1, pp 54-69, 1992.

[6] S.O.R. Moheinamin, I.R.Petersen "Quadratic guaranted cost control with robust pole placenent in a disk", IEE Proc-Control Theory, Appl. Vol 143, No 1, pp 37-43, 1996.

[7] J.S.Lou, P.P.J.Vanden Bosch, S.weiland. "New sufficient condition for robust root clustering of linear state space model with structured uncertainty" IEEE Proc.-control Theory Appl., Vol. 143, No. 3, pp 244-246, 1996.

[8]S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron,V.Balakrishnan, "Linear matrix inequalities in systems and control theory", SIAMP, hiladelphia, PA, 1994

[9] R.K.Yedavalli " Perturbatiom bounds for robust stability in linear state space models" INT.J. Control, Vol.42 No,6 pp 1507-1517, 1985.