

블럭펄스 함수를 이용한 확률시스템의 제어기 설계

임윤식 · 이재춘 · 이명규 · 안두수

* 성균관대학교 전기전자컴퓨터공학부 ** 경성대학교 전기전자컴퓨터공학부

Controller Design of the Nonlinear Stochastic System using Block Pulse Function

Yun-Sic Lim · Jae-Chun Lee · Myung-Kyu Lee · Doo-Soo Ahn

*Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ. **Dept. of Electrical Eng. Kyung Sung Univ.

Abstract - The orthogonal polynomials have been widely employed to solve control problems, but the LQG(linear quadratic gaussian) problem remains unsolved. In this paper, we obtained the solutions of Riccati equation and covariance matrix Riccati equation by two point boundary problem and matrix fraction method using BPF(Block Pulse Function), respectively. This solutions are solved the problem of the LQG controller design.

1. 서 론

제어기 설계시 제어기의 고유한 강인 특성을 인정하는 확정계에서의 설계가 대부분이나, 실제로는 플랜트 노이즈나 측정 노이즈에 의한 변동을 고려해야 한다. 시간 함수로 주어진 직교함수는 Walsh 함수에 의한 최적제어 응용 이후 이 분야에 대한 관심이 높아졌다. Chang과 Lee(1986)는 직교함수 유한급수 전개에 의해 LQG 문제를 해결하였으나[3], 유한급수 전개를 이용하여 리카티 방정식과 공분산 행렬 리카티 방정식을 직접 풀기 위해서는 두 행렬의 곱이 크로네커 곱(Kronecker product)으로 표시되어 시스템의 차수가 n 이고 전개 함수가 m 인 경우 $2nm \times 2nm$ 차 적분 연산 행렬이 필요하며, 시변 시스템인 경우는 구간 마다 적분 연산 행렬을 대입해야 하므로 많은 계산량이 요구된다. 본 논문에서는 BPF를 이용하여 리카티 방정식과 공분산 행렬 리카티 방정식을 각각 2점 경계치 문제와 행렬 분해법으로 제어 이득과 필터 이득을 구하였다. 제시한 방법은 $2n \times 2n$ 차 미분 방정식을 BPF에 의해 대수방정식으로 변환하여 해를 구한다. 따라서 구간에서 반복적인 연산만이 이루어지는 매우 간단한 알고리즘에 의해 LQG 문제의 해를 구할 수 있다.

2. BPF 정의

BPF는 구간에서 "1" 값만 갖는 함수로 어떤 함수를 급수 형태로 근사화할 때 푸리에 급수 전개보다 표현이 간단하고 연속 시스템을 이산화하여 해석할 수 있으므로 컴퓨터 연산에 직접 적용할 수 있는 계산상의 잇점이 있다. BPF $b_k(t)$ 는 구간 $0 \leq t < t_f$ 에서 다음을

만족하는 직교함수이다[4].

$$b_k(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)\frac{t_f}{m} \leq t < k\frac{t_f}{m} \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (2.1)$$

단, $k=1, 2, \dots, m$, (m : BPF의 전개항수)

비결합특성

$$b_k(t) b_l(t) = \begin{cases} b_k(t), & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (2.2)$$

직교특성

$$\int_0^{t_f} b_k(t) b_l(t) dt = \begin{cases} t_f/m, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (2.3)$$

3. BPF를 이용한 확률계의 최적제어

확률 제어 문제란 확률 동적 시스템과 평가함수가 각각 다음과 같이 주어질 때 J 를 최소화하는 제어벡터 $u(\tau)$ 를 구하는 문제이다[5-6].

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\omega(t) \quad (3.1)$$

$$z(t) = C(t)x(t) + \theta(t) \quad (3.2)$$

$A(t) : n \times n$, $B(t) : n \times r$, $G(t) : n \times r$, $C(t) : r \times n$

$$J = E \left\{ \int_0^{t_f} x^T(\tau) Q_1(\tau) x(\tau) + u^T(\tau) R_1(\tau) u(\tau) d\tau \mid z(\sigma) \right\} \quad (3.3)$$

단, $Q_1(t)$ 는 양의 한정, $R_1(t)$ 는 양의 반한정

3.1 제어기 설계

BPF 변환에 의한 최적 제어 문제는 확률계가 배제된 확정계에 대해 해밀토니안 방정식을 유도하고, 2점 경계치 문제를 풀어 리카티 방정식의 해를 구함으로써 평가함수를 최소화하는 제어 이득을 구하는 것이다 [7-9]. 제어이득은 다음과 같이 천이행렬로 나타남으로 천이행렬의 해를 구하면 입력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -R_1^{-1}(t) B(t) \lambda(t) \\ &= -R_1^{-1}(t) B(t) \phi_{22}^{-1}(t_f, t) \phi_{21}(t_f, t) x(t) \end{aligned}$$

$$= -G(t) x(t) \quad (3.4)$$

천이행렬을 한 번 미분하면 다음과 같고,

$$\dot{\Phi}(t_f, t) = -F(t) \Phi(t_f, t) \quad (3.5)$$

여기서,

$$F(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B^T(t) R_1^{-1}(t) B(t) \\ -Q_1(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}$$

이며, 천이행렬과 $F(t)$ 를 BPF 변환

$$\Phi(t_f, t) = \sum_{k=1}^m \phi_k b_k(t) \quad (3.6)$$

$$F(t) = \sum_{k=1}^m F_k b_k(t) \quad (3.7)$$

BPF의 비결합 특성에 의해 다음이 성립한다.

$$F(t) \Phi(t_f, t) = \sum_{k=1}^m F_k \phi_k b_k(t) \quad (3.8)$$

F_k 와 ϕ_k 는 각각 $F(t)$ 와 $\Phi(t_f, t)$ 의 k 번째 BPF의 계수 행렬로 천이행렬의 BPF 계수 ϕ_k 는 다음의 반복적인 연산에 의해 구할 수 있다[7].

$$\phi_m = \left(I - \frac{t_f}{2m} F_m \right)^{-1} \quad (3.9)$$

$$\phi_k = \phi_{k+1} \left(I + \frac{t_f}{2m} F_{k+1} \right) \left(I - \frac{t_f}{2m} F_k \right)^{-1} \quad (3.10)$$

단, $k = m-1, m-2, m-3, \dots, 1$

$R_1^{-1}(t), B(t), G(t)$ 를 BPF 변환하고

$$B(t) = \sum_{k=1}^m B_k b_k(t) \quad (3.11)$$

$$R_1(t) = \sum_{k=1}^m R_{1k} b_k(t) \quad (3.12)$$

$$G(t) = \sum_{k=1}^m G_k b_k(t) \quad (3.13)$$

BPF의 비결합 특성을 이용하여 계산 이득의 BPF 계수를 구하면 다음과 같다.

$$G_k = -R_{1k}^{-1} B_k^T \phi_{22k}^{-1} \phi_{21k} \quad (3.14)$$

$x(t), u(t), A(t)$ 를 BPF 변환하면 다음과 같다.

$$x(t) = \sum_{k=1}^m X_k b_k(t) \quad (3.15)$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^m U_k b_k(t) \quad (3.16)$$

$$A(t) = \sum_{k=1}^m A_k b_k(t) \quad (3.17)$$

BPF의 반복적인 연산에 의해 상태벡터와 최적제어 벡터는 다음과 같이 구한다[7].

$$X_1 = \left(I - \frac{t_f}{2m} \hat{A}_1 \right)^{-1} X_0 \quad (3.18)$$

$$X_{k+1} = \left(I - \frac{t_f}{2m} \hat{A}_{k+1} \right)^{-1} \left(I + \frac{t_f}{2m} \hat{A}_k \right) X_k \quad (3.19)$$

$$U_k = -G_k X_k \quad (3.20)$$

$$\text{단, } \hat{A}_k = A_k + B_k R_{1k}^{-1} B_k^T \phi_{22k}^{-1} \phi_{21k} \\ k = 1, 2, 3, \dots, m-1$$

3.2 칼만 필터 설계

본 연구에서는 비선형인 분산 행렬 리카티 방정식을 직접 풀지 않고 행렬 분할 기법을 이용하여 해를 구하고자 한다[10]. 행렬 분할 기법에 의하여 분산행렬 리카티 방정식은 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$P(t) = V(t) W^{-1}(t) \quad (3.21)$$

여기서 $V(t)$ 와 $W(t)$ 는 다음과 같은 동차 선형미분 방정식을 만족하는 $n \times n$ 의 행렬이다.

$$\dot{W}(t) = -A^T(t) W(t) + C^T(t) R_2^{-1}(t) C(t) V(t)$$

$$\dot{V}(t) = G(t) Q_2(t) G^T(t) W(t) + A(t) V(t) \quad (3.22)$$

식 (3.22)은 다음과 같은 헤밀토니안 형태로 표기한 후 치환하면 다음과 같고

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = M(t) \xi(t) \quad (3.23)$$

여기서, $\xi(t) = [W(t) \quad V(t)]^T$,

$$M(t) = \begin{bmatrix} -A^T(t) & C^T(t) R_2^{-1}(t) C(t) \\ G(t) Q_2(t) G^T(t) & A(t) \end{bmatrix}$$

식(3.23)의 해는 다음과 같다.

$$\xi(t) = \Phi(t, t_0) \xi(t_0) \quad (3.24)$$

$\Phi(t, t_0)$ 는 상태천이 행렬로 다음을 만족한다.

$$\dot{\Phi}(t_0, t) = -\Phi(t_0, t) M(t) \quad (3.25)$$

$\xi(t)$ 와 천이행렬을 BPF 변환하면 다음과 같고

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^m \xi_k b_k(t) \quad (3.26)$$

$$\Phi(t_0, t) = \sum_{k=1}^m \phi_k b_k(t) \quad (3.27)$$

$$M(t) = \sum_{k=1}^m M_k b_k(t) \quad (3.28)$$

식(3.25)의 해는 BPF 변환에 의하여 다음과 같은 반복적인 대수식으로 블럭펄스 계수를 얻을 수 있다[7].

$$\phi_1 = \left(I + \frac{t_f}{2m} M_1 \right)^{-1} \quad (3.29)$$

$$\phi_{k+1} = \phi_k \left(I - \frac{t_f}{2m} M_k \right) \left(I + \frac{t_f}{2m} M_{k+1} \right)^{-1} \quad (3.30)$$

칼만계인은 다음과 같은 BPF 급수로 구할 수 있다.

$$H(t) = \sum_{k=1}^m (\phi_{21k} + \phi_{22k} P_{0k}) \\ \times (\phi_{11k} + \phi_{12k} P_{0k})^{-1} C_k^T R_{2k}^T b_k(t) \quad (3.31)$$

3.3 상태추정

상태추정을 위한 상태추정 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = [A(t) - H(t)C(t)] \hat{x}(t) + H(t)z(t) \quad (3.32)$$

다음과 같은 대수반복식으로 추정상태에 대한 BPF 계수를 얻을 수 있다[7].

$$\hat{X}_1 = \left[I - \frac{t_f}{2m} D_1 \right]^{-1} \cdot \left[\hat{X}_{k-1} + \frac{t_f}{2m} H_1 Z_1 \right] \quad (3.33)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \left[I_{n \times n} - \frac{t_f}{2m} D_k \right]^{-1} \times \left[\left(I + \frac{t_f}{2m} \right) \hat{X}_k + \frac{t_f}{2m} (H_k Z_k + H_{k+1} Z_{k+1}) \right] \quad (3.34)$$

4. 시뮬레이션

다음과 같은 선형 시변 시스템에 플랜트 잡음과 측정 잡음이 존재하는 시스템을 고려하자.

$$A(t) = \begin{bmatrix} -10t & 1 \\ 1 & -5t^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

시뮬레이션에 주어진 조건은 다음과 같다.

최종시간 $t_f = 1$ 초, BPF의 전개항수 $m = 50$

초기상태 $x(t_0) = [1 \quad 2]^T$, $\hat{x}(t_0) = [0.8 \quad 1.8]^T$

$Q_1 = \text{diag}(10, 10)$, $R_1 = 1$, $Q_2 = 0.1$, $R_2 = 0.01$

시뮬레이션 결과는 다음과 같다.

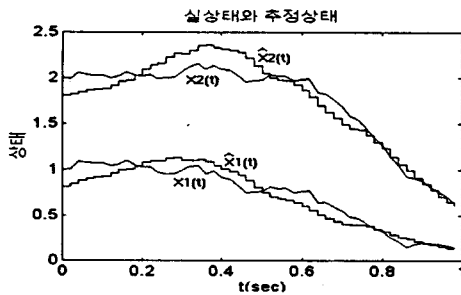


그림 1. 실상태와 추정된 상태의 비교

Fig. 1 Comparison of real states and estimated states

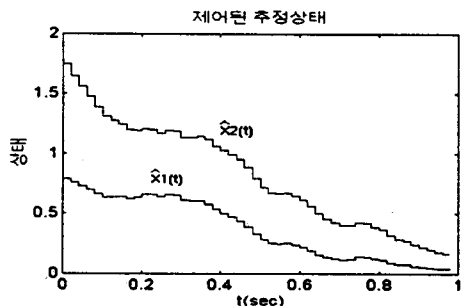


그림 2. 제어된 추정 상태

Fig. 2 Control of estimation states

5. 결론

연속 시스템의 해석이나 제어기 설계시 모든 연속 신호를 BPF 변환하여 이산 신호로 바꾸어 처리함으로써 직접 디지털 컴퓨터의 프로세서를 이용하여 시스템의 신호를 분석하여 처리하고 처리된 계산 값은 다시 BPF와 곱해져 급수 형태로 재 표현되어 구간 연속인 제어 입력 신호를 복원할 수 있다. 또한 모든 연산을 BPF의 대수 방정식으로 바꾸어 샘플링 구간의 크기 값인 계수 값만으로 제어이득과 필터이득을 구할 수 있어 계산이 단순하고 빠름을 알 수 있다. 이는 기존의 수치 해석적인 방법으로 계산하는 것과 비교할 때 적분연산 행렬의 상대각 부분만 계산되고 나머지 부분은 계산이 생략되므로 계산량이 줄어든다.

[참고 문헌]

- [1] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering & Prediction Problems", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 35-45, 1960.
- [2] R. E. Kalman & R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, Vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [3] Y. F. Chang & T. T. Lee "General orthogonal polynomials approximation of the linear quadratic-gaussian control design", Int. J. Control, Vol. 43, No. 6, pp. 1879-1895, 1986.
- [4] Z. H. Jiang, and W. Schaufelberger, "Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [5] M. S. Grewal & A. P. Andrews "Kalman Filtering Theory and Practice", Prentice-Hall, 1993.
- [6] A. P. Sage "Optimal system control", Prentice-Hall, 1977.
- [7] L. S. Shieh, C. K. Yeung & B. C. McInnis, "Solution of state space equations via block pulse functions", Int. J. Sys. Sci., vol. 28, No. 3, pp. 383-392, 1978.
- [8] K. R. Palanisamy & D. K. Bhattachary, "System identification via block pulse functions", Int. J. Sys.Sci., vol. 12, No. 5, pp. 643-647, 1981.
- [9] N. S Hsu & B Cheng, "Analysis and control of time varying linear systems via block pulse functions", Int. J. Cont., vol. 33, No.6, pp. 1107-1122, 1981.
- [10] S. Maybeck, "Stochastic models, estimation, and control", Academic Press., 1982.