'97 대한전기학회 창립 50주년 하계학술대회 논문집 (CIP53)

H_∞ 적응 제어기의 설계.

박 승 규, 안 호균, 장 우영
창원대학교 전기공학과 (Tel:0551-79-7514: E-mail:skpark@sarim.changwon.ac.kr)

A Design of H_∞ Adaptive controller

Seung-Kyu Park, Ho-kyun An, Woo-Young Jang.
Department of Electrical Engineering Changwon National University.

Abstract - A H_∞ adaptive controlller is designed by using polynomial approach. The H_∞ robust controllers for adaptive system were designed by Grimble. But they did not minimize the mixed sensitivity H_∞ cost function which is the H_∞ sum of weighted sensitivity and complementary sensitivity terms Moreover pole placement is dependent of cost function. In this paper, the mixed sensitivity H_∞ cost function is minimized by employing the Youla parameterization and polynomial approach at the same time. And pole plaement is independent of weighting function.

1. 서 론

제어계통의 강인성을 향상시키기에 적합한 H_∞ 제어 이론은 크게 다음과 같은 두가지 방식으로 발전해왔다.

1. 상태공간 접근 방식(State-space approach)
2. 다항식 접근 방식(Polynomial approach)

다항식접근에서는 입출력간의 전달함수만을 안다고 가정하기 때문에 감도함수(Sensitivity funcion)와 부감도함수(Complementary sensitivity function)의 합인 혼합감도함수의 H_∞ 놈을 최소화하는 것이 기본 개념이다[1]. 그러나 이 설계방법의 대부분은 루프 쉐이핑(Loop shaping)등의 절차가 필요하므로 적응제어 적용이 용이하지 않다[2]. 이에 Grimble은 자기동조(Self-tuning)제어에 적합한 H_∞ 강인 제어기를 발전시켰고 많은 좋은 결과들을 얻었다. 그러나 이러한 논문에서는 하중함수들이 바뀔 때만 극배치(pole-placement)가 가능하였고 전통적인 H_∞ 비용함수를 최소화시키지 못하였다. 본 논문에서는 다항식 접근방식에서 Youla제어기를 사용하여 전형적인 비용함수를 최소화시킴과 동시에 적응제어 이론을 도입함으로써 H_∞견실 적응제어기를 구성하였다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

본 논문에서는 그림 1과 같은 이산치 단일 입출력계통을 고려하기로 한다.

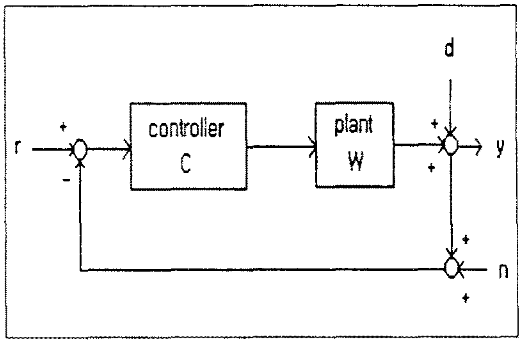

그림 1. 단일 입출력 궤환시스템.

표기를 간단하게 하기 위하여 다항식의 표기에 있어서 z^{-1}을 생략하기로 한다. 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$W = A^{-1}B \tag{1}$$

좋은 견실성은 아래의 비용함수를 최소화시킴으로써 얻을수 있다.

$$J_{H_\infty} = \|(W_1S)^*(W_1S) + (W_2T)^*(W_2T)\| \tag{2}$$

S는 감도함수, T는 부감도함수를 나타내며 W_1, W_2는 하중함수이다.

2.2 제어기의 구조

본 논문에서는 제어목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 Youla 제어기를 사용한다.

$$C=\frac{N_0 + AK}{M_0 - BK} \tag{3}$$

여기서 M_0, N_0는 다음식을 만족한다.

$$AM_0 + BN_0 = 1 \tag{4}$$

K는 H_∞ 놈의 크기를 제한하는데 된다.

2.3 H_2 평가함수의 최소화

위의 제어기를 사용하는 경우 감도함수와 부감도 함수는 각각 다음과 같이된다.

$$S = (M_0-BK)A \tag{5}$$

$$T = (N_0+AK)B \tag{6}$$

따라서, 평가함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$J=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}((W_1S)^*(W_1S)+(W_2T)^*(W_2T))\frac{dz}{z} \tag{7}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(W_1(M_0-BK)A)^*(W_1(M_0-BK)A) + (W_2(N_0+AK)B)^*(W_2(N_0+AK)B)\frac{dz}{z} \tag{8}$$

위의 평가함수를 최소화할 수 있는 K는 다음 정리와 같다.

정리 1. H_2 평가함수를 최소화시키는 Youla 파라미터 K는 다음과 같다.

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{Y_{fn}Y_cW_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}} \tag{9}$$

$$\text{여기서 } G_l = GW_{2d}N_{0d}-LW_{1d}M_{0d} \tag{10}$$

F,G는 다음 diophantine 방정식을 만족시킨다.

$$W_{1d}M_{0d}F+W_{1d}^*Y_{fn}^*Y_c^*Gz^{-g} = W_{1n}^*W_{1n}M_{0n}A(BA)^*Y_{fd}^*z^{-g} \tag{11}$$

$$W_{2d}N_{0d}S+W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_c^*Lz^{-gl} = W_{2n}^*W_{2n}N_{0n}BY_{fd}^*z^{-gl} \tag{12}$$

증명은 참고 문헌[9] 참조

2.4 H_∞ 최소화

함수적으로 최소화시킬 수 있는 것은 H_2 놈이고 최소화시키고자 하는 것이 H_∞놈이므로 두 놈의 최소화간의 관계를 알아야만 한다. 다음 정리는 H_2 와 H_∞ 관계를 설명해주는 중요한 정리이다.

보조정리 1 다음과 같은 평가함수를 고려하자.

$$J = \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(X_0(z^{-1})\Sigma(z^{-1}))\frac{dz}{z} \tag{13}$$

위의 비용함수에서 실유리함수 $\Sigma(z^{-1})=\Sigma^*(z^{-1}) > 0$ 인 경우 J가 $|z|=1$ 위에서 적분항이 $X_0(z^{-1})\lambda^2$(실수)일 때 최소가 되도록하는 제어기는 $sup_{|z|=1}\|X_0(z^{-1})\|$를 역시 최소화시킨다. 하중함수의 변형에 의해 H_∞ 평가함수는 다음과 같다.

$$J_\infty = \sup\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(\overline{W_1}(M_0-BK)A)^*(\overline{W_1}(M_0-BK)A) + (\overline{W_2}(N_0+AK)B)^*(\overline{W_2}(N_0+AK)B)\frac{dz}{z} \tag{14}$$

$$W_1 \Rightarrow \overline{W_1},\quad W_2 \Rightarrow \overline{W_2} \tag{15}$$

$$\overline{W_1}=W_1\frac{B_\sigma}{A_\sigma},\quad \overline{W_2}=W_2\frac{B_\sigma}{A_\sigma} \tag{16}$$

$$F=F_0A_\sigma^*B_\sigma^*;\ S=S_0A_\sigma^*B_\sigma^* \tag{17}$$

정리 2 식(22)을 최소화시키는 K는 다음과 같다.

$$K = \frac{G_lY_{fd}}{B_\sigma Y_{fn}Y_cW_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}} \tag{18}$$

여기서 M_0, N_0은 다음 diophantine방정식을 만족한다.

$$A_\sigma W_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}F_l + W_{1d}^*W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_{cn}^*G_lz^{-gl} = B_\sigma(BA)^*Y_{fd}^*(W_{2d}W_{2d}^*N_{0d}W_{1n}W_{1n}^*AM_{0n} + W_{1d}W_{1d}^*M_{0d}W_{2n}W_{2n}^*BN_{0n})z^{-gl} \tag{19}$$

증명 : 위식의 적분항들은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$(T_1+T_2)^*(T_1+T_2)+\Sigma\frac{W_1^*W_1W_2^*W_2}{Y_f^*Y_f} \tag{20}$$

여기서, $\overline{Y_f^*Y_f}=\overline{W_1^*}\overline{W_1}+\overline{W_2^*}\overline{W_2}$.

$$Y_c^*Y_c=(BA)^*BA$$

$$G_a = G\overline{W_{2d}}N_{0d}-L\overline{W_{1d}}M_{0d}$$

$$T_1 = \frac{\overline{Y_f}Y_cK\overline{W_{1d}}M_{0d}\overline{W_{2d}}N_{0d}-G_a}{\overline{W_{1d}}M_{0d}\overline{W_{2d}}N_{0d}}$$

$$T_2 = -\frac{(F\overline{W_{2d}^*}z^g-S\overline{W_{1d}^*}z^{gl})}{(\overline{W_{1d}^*}\overline{W_{2d}^*}Y_{fn}^*Y_c^*)}$$

$$\Sigma=(\frac{B_\sigma^*B_\sigma}{A_\sigma^*A_\sigma})$$

$K=\dfrac{G_a\overline{Y_{fd}}}{Y_{fn}Y_c\overline{W_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}}}$ 일때 T_1은 0이며 따라서 다음식과 같이 정리될 수 있다.

$$T_2^*T_2+\Sigma\frac{W_1^*W_1W_2^*W_2}{Y_f^*Y_f} \tag{21}$$

보조정리 3.1이 적용되기 위해서는 다음식이 만족되어야 한다.

$$T_2^*T_2+\Sigma\frac{W_1^*W_1W_2^*W_2}{Y_f^*Y_f}=\Sigma\Lambda^2 \tag{22}$$

W_1W_2를아주작게 적당히 선택하면 $\Sigma\dfrac{W_1^*W_1W_2^*W_2}{Y_f^*Y_f}$

$F_l = F_0 W_{2d}^* z^g - S_0 W_{1d}^* z^{gl}$, 가 생략가능하며

$D_{fc} = W_{1d} W_{2d} Y_{fn} Y_c$ 라고 정의하면 다음식이 성립된다.

$$A_\sigma = D_{fc}\lambda \quad (23)$$

$$B_\sigma = F_l^* = F_{ls}$$

여기서 $G_l = G W_{2d} N_{0d} - L W_{1d} M_{0a}$라고 정의하면

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{B_\sigma Y_{fn} Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}} \quad (24)$$

풀어야할 Diophantine 방정식은 다음과 같다.

$$\lambda D_{fc} W_{1d} W_{1d} N_{0d} Y_{fn} Y_c F_l + W_{1d}^* Y_{fn}^* Y_{cn}^* G_l z^{-gl} = B_\sigma (BA)^* Y_{fd}^* (W_{1n} W_{1n*} A M_{0n} + W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) z^{-gl}$$

증명끝(참고 문헌[9]참조)

$W_{1d} = W_{2d}$로 선택하면 K와 G_l, F_{ls}를 구하는 식은 다음과 같이 간략화 된다.

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{B_\sigma Y_{fn} Y_c W_{1d} N_{0d}} \quad (25)$$

위의 G_l, B_σ는 다음 Diophantine 방정식의 해이다.

$$\lambda W_{1d} W_{1d} N_{0d} Y_{fn} Y_c F_l + W_{1d}^* Y_{fn}^* Y_{cn}^* G_l z^{-gl} = B_\sigma (BA)^* Y_{fd}^* (W_{1n} W_{1n*} A M_{0n} + W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) z^{-gl} \quad (26)$$

2.5 H_∞ 적응제어기의 구성

적응 제어를 위해서 RLS 알고리즘을 사용하였다.[11] 추정된 파라메터를 가지고, 전절의 H_∞ 제어기 설계방법을 도입하면 간접 적응 제어 계통을 설계하는 것이 된다.

식(1)의 플랜트를 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \ldots - a_n y(t-n) + b_0 u(t-d_0) + \ldots + b_c u(t-d_0-c) \quad (27)$$

여기서, 시스템의 차수는 $\max(n, d_0+m)$ 이다.

다시, 식(43)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta \quad (28)$$

여기서, $\theta^T = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n \ b_0 \ \ldots \ b_m]$

$$\varphi^T(t-1) = [-y(t-1) \ldots -y(t-n) \ u(t-d_0) \ldots u(t-d_0-m)]$$

그러면 파라메터를 추정은 다음의 RLS 알고리즘을 사용한다.

$$\hat\theta = \hat\theta(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat\theta(t-1)$$

$$K(t) = P(t-1)\varphi(t-1)(\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1}$$

$$P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1))P(t-1)/\lambda$$

여기서,

(a 는 스칼라값, I 는단위행렬)

H_∞ 제어기를 구성하는데 사용되는 추정된 파라메터의 형태는 다음과 같다.

$$A = [1 \ \hat\theta(1) \ \hat\theta(2)]$$
$$B = [\hat\theta(3) \ \hat\theta(4) \ \hat\theta(5)]$$

3. 결 론

Youla parameterization 과 다항식 접근방법에 의해 H_∞ 적응 제어기를 설계하였다.

이 제어기는 전형적인 H_∞ 비용 함수를 최소화 시킨다. 그리고 하중 함수의 변화없이도 극배치가 가능해 졌다.

[참 고 문 헌]

[1] H.K wakernaak, " Robustness optimization of linear feedback systems", 22nd CDC Conf.,Texas, 1983

[2] J.C.Dolye,BA.Francis,A.R.Tannenbaum, "Feedback Control Theory", 1992

[3] M.J.Grimble" Robust controller for self-tuning control application " Int.J. Control, 1987

[4] M.J.Grimble " Robust controller for self-tuning control application Part 2. Self-tuning and Robustness ", Int.J.Control, pp 117-156, 1987

[5] D.Fragopoulou, M.J.Grimble, " H_∞ controller design for the SISO case using a Wiener approach", IEEE AC-36 No.10, pp 1204-1208, 1991

[6] M.J.Grimble, " H_∞/H_2 robust control design for a generalized control structure and flight control application ", Int.J.Systems Sci, vol.26 No.11, pp2043-2068, 1995

[7] M.J.Grimble, " Optimal H_∞ robustness and the relationship to LQG design problems," Int.J.Control, vol.43, pp 351-372, 1986

[8] M.J.Grimble," GH_∞ self-tuning control for multivariable systems", Int.J.control, 1994, vol.60, no.3, 347-367

[9] 박승규, "적응제어를 위한 H_∞강인제어기 설계-다항식 접근 방법", 96 대한 전기학회 하계 학술회의 논문집 936-938 1996