

## 유한요소법과 유전 알고리즘을 이용한 전기비저항 탐사법의 저항역산

임 성기, 김 민규, 김 흥규, 정 현교  
서울대학교 공과대학 전기공학부 전기역학연구실

## Electric Resistive Tomography using Finite Element Method and Genet

Sung-Ki Lim, Min-kyu Kim, Hong-kyu Kim, Hyun-Kyo Jung  
School of Electrical Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea

**Abstract** - 지구 물리학이나 의공학 분야등에서 이용되왔던 전기비저항 탐사법은 관심 영역에 전류 입력을 가한 후, 그에 대한 전압 응답을 측정하여 관심 영역 내의 전기비저항 분포를 규명하는 방법으로서 역해석 문제의 범주에 포함된다. 따라서 일반적인 역해석 문제가 지니고 있는 해의 존재성, 유일성, 그리고 측정 데이터에 대한 해의 연속적 의존성이라는 기본적 문제들을 가지게된다. 이러한 역해석 문제의 해결에는 정확한 정해석 풀이법과 효율적인 역해석 방법이 요구되어진다. 본 논문에서는 정해석 방법으로 유한요소법을, 역해석 방법으로는 전체 최적점을 발견할 가능성이 높은 유전 알고리즘을 최적화 방법으로 사용하였다. 기존의 역해석 문제의 해결책으로 제시되어왔던 기울기 방법에 기반한 결정론적 최적화 알고리즘이나, 있는 국소해로의 수렴, 즉 단순한 전기비저항 분포의 불연속성 확인이라는 한정된 정보의 획득을 넘어서 실제 전기비저항 분포와 가장 가까운 분포는 전체 최적점 근처에서 발견될 수 있음을 보이고자 한다. 이러한 전기비저항 분포의 역해석적인 규명을 간단한 2차원 수치해석문제를 풀어보므로서 확 인해본다.

### 1. 서 론

지구 물리학 분야에서는 지상 건물이나 지하 구조물의 구축에 장애가 되는 지하 공간의 파쇄대나 균열대의 분포 상황을 규명해야하는 문제가 발생한다. 또한 지하 수맥의 발견이나 지하 자원의 탐사는 물리 탐사의 매우 중요한 목적에 해당한다. 이러한 목적을 위해서는 고분해능의 탐사기술이 요구되어진다.<sup>[1]</sup> 의공학 분야에서는 인체에 해를 주지 않는 비 침습적인 방법을 사용하여 인체 외부에서 데이터를 측정하여 인체 내부의 병소를 조기에 진단하여 치료해야 할 필요가 요구되고 있다.<sup>[2]</sup> 이러한 분야들에서의 요구사항을 충족시키기 위해 많은 방법들이 개발되어 왔으며 이 방법들에는 저주파 전류에서 초음파, 초고주파, x레이와 자기공명장치

에 이르기까지 다양한 수단들이 사용되고 있다.

이 방법들중에서 전기비저항 탐사법은 관심 영역 내부의 전기비저항 분포를 규명하기위해서 영역 표면에서 이산적으로 직류 전류 또는 저주파 전류를 가한 후, 그에 대한 전압 응답을 측정하는 방법이다.<sup>[1, 2]</sup> 이 방법은 효율적 알고리즘의 개발을 통해서 다른 방법에 비해 비교적 저렴한 비용과 간단한 장비만으로도 구현할수있다는 장점을 갖추고 있다.

그러나, 이것은 유한갯수의 입력과 출력 데이터를 이용해서 관심 영역 내부를 규명해야하기 때문에, 역해석 문제의 해가 가지는 ill-posedness의 성질을 지니게된다.<sup>[2, 3]</sup> 이것은 물리적으로 내부에서 큰 변화가 일어나도 외부에서는 단순히 작은 변화만이 감지된다는 의미이다. 수학적인 측면에서는 문제 자체가 해가 존재하지 않는 문제이거나, 설사 해가 존재하더라도 유일하지 않은 다수의 해가 발견되는 문제일수 있으며 또한 여러 측정 데이터들에 대해서 해가 연속적으로 수렴하지 않는 성질을 말한다. 이 중에서 세 번째 성질은 해석 방법의 차수를 높여도 오히려 오차가 증대되는 문제를 발생시키므로서 역해석 알고리즘의 개발에 많은 장애를 야기시켜왔다. 기존의 많은 역해석 방법들은 결정론적 최적화 방법과 regularization 방법등을 결합하여 세 번째 문제를 해결하려고 시도하여왔다.<sup>[3]</sup> 그러나, 결정론적 최적화 알고리즘들은, 특히 기울기 방식의 알고리즘들은 초기 시작값에 민감하게 의존하는 균원적 문제를 가지고있다. 즉, 그 초기값에 따라서 수렴속도가 영향을 받으며, 몇몇 경우에 있어서는 수렴을 하지못하거나 수렴을 하는 경우에 있어서도 가장 가까운 국소 해로 수렴하는 문제에 직면하게 된다.<sup>[4]</sup> 이것은 전기비저항 탐사법에서 단순히 전기비저항의 불연속적 분포의 규명이라는 결과에서 만족해야하는 상황을 야기시켰다.<sup>[1]</sup>

본 논문에서는 정해석 방법으로 유한요소법을, 역해석 방법으로는 전체 최적점을 찾을 수 있는 가능성을 지닌 유전 알고리즘을 사용하였다. 이 방법들을 통해 표면에서의 전압 측정치를 야기하는 실제 전기비저항의 분포가 전체 최적점 근처에서 규명되

어짐을 보이고자한다.

## 2. 본 론

역해석 문제를 풀기위해서는 먼저 정해석의 측정 데이터가 요구되어진다. 이 데이터들로는 실제의 실험 데이터가 이용되어야하나 본 논문에서는 알고리즘의 유효성을 검증하기 위하여 수치해석기법인 유한요소법을 사용하여 정해석 문제를 풀어서 잡음이 거의 없는 정확한 측정데이터를 얻어내었으며 알고리즘이 찾아야하는 전체 최적점의 값들을 구해놓았다. 또한 문제의 단순화를 위해서 정해석과 역해석에서의 대상 공간은 2차원 영역이 되도록 전류 전원 배치와 해석 영역을 잡았다.

### 2.1 ERT의 유한요소 정해석

지표 아래를 전기 전도도  $\sigma$ 들의 분포를 갖는 2차원의 단면으로 가정한다. 문제의 단순화를 위하여, 전기 전도도 값을 알고자 하는 영역을  $\sigma_1$ 과  $\sigma_2$ 의 값을 가지는 2개의 영역으로 구분한 후 나머지 영역은 무한 경계 조건의 근사화를 위해 선택하였다. 여기서  $\sigma_1$ 과  $\sigma_2$ 의 값들은 모두 동일한 400[ $\Omega/m$ ]으로 선택하여 정해석을 수행하였다. 전류 전원은 지표 표면에 박아놓은 전극봉으로 입력하며 하나에는 +1A를 다른 하나에는 -1A를 입력한다. 각 전극봉의 간격은 2m 간격이며 전압을 측정하는 전극봉 역시 동일 간격으로 설치한다. 하나의 전류 배치에 대해서 11개의 전압 측정봉을 설치한 후 각각의 전압  $E$ 를 측정하여 모두 10개의 전압차 값들을 구해놓는다. 전압차를 구하는 것은 주어진 잡음 상황에서 가장 적은 측정오차가 들어간 데이터를 얻을 수 있는 방법이다. 이러한 입력 배치를 모두 10개 사용하여 총 측정 데이터는 100개의 전압차 값들로 구성된다.

직류 전류 전원에 대한 맥스웰 방정식을 고려하면 전계식과 자계식이 분리되어 전계식만을 고려한 방정식을 이용할수 있게된다. 따라서 전기 스칼라 포텐셜  $\phi$ 를 이용한 스칼라 방정식을 아래의 순서대로 유도할수 있다.

- (1)  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$
- (2)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ,  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  in  $\Omega$ (영역내부)
- (3)  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ ,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

이때 지표 표면  $\Gamma_1$ 는 전류 전원 입력부와 나머지 부분으로 나뉘어서 경계조건을 가지게된다.

$$(4) \hat{n} \cdot \vec{j} = js \text{ on } \Gamma_1 \text{ (전류 전원 입력부)}$$

$$(5) \hat{n} \cdot \vec{j} = 0 \text{ on } \Gamma_2 \text{ (전류 전원이 없는 곳)}$$

무한 경계면을 나타내는  $\Gamma_2$ 는 전기 스칼라 포텐셜이 0이 되는 곳으로 간주한다. 위의 식들을 전기 스칼라 포텐셜  $\phi$ 를 이용하여 다음과 같은 식들로 정리한다.

$$(6) -\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = 0 \text{ in } \Omega \text{ (영역내부)}$$

$$(7) -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = js \text{ on } \Gamma_1 \text{ (전류 전원 입력부)}$$

$$(8) -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_2 \text{ (전류 전원이 없는 곳)}$$

$$(9) \phi = 0 \text{ on } \Gamma_2 \text{ (무한 경계면)}$$

위의 식들을 1차 선형 요소를 써서 Galerkin 방법으로 유한요소해석을 하였다. 그럼 1은 유한요소해석을 수행하였을 때의 요소분할도와 등전위도를 나타낸 것이다. 이 때 전류 전원 배치는 10번째의 경우이다.

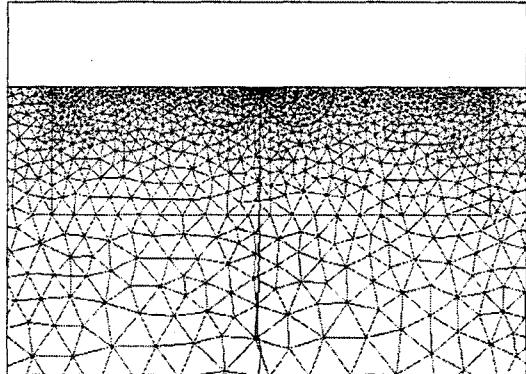


그림 1. 전류 전원 배치 10에 대한 등전위 포텐셜

### 2.2 유전알고리즘을 이용한 역해석

유전 알고리즘은 적자 생존과 자연 도태의 원리를 이용하여, 목적함수의 분포를 개체가 존재하고 있는 가혹한 환경으로 모사하고, 목적함수의 값을 그 환경에 대한 적합도로서 가지는 각 개체들을 설계변수로 대응시키는 최적화방법이다. 이 방법은 집단(population)에 속해있는 개체들이 각 세대에서 그 환경에 가장 적합한 개체들의 선택(selection), 그 선택받은 개체들간의 유전 작용인 교배(crossover), 그리고 각 개체 내부 단일 유전 정보들의 변종(mutation)에 의해 그 환경에 가장 잘 적응하는 개체들이 진화해서 살아남는다는 자연 진화 현상을 모사한 것이다.[5] 이것은 다수의 국소해가 존재하는 상황에서도 이를 극복할 가능성이 매우 높기 때문에, 규명하고자 하는 전기비저항 값들이 전체 최적점 근처에서 찾아지는 전기비저항 탐사법에 적합한 알고리즘이라 생각되어진다. 우리가 쓰는 컴퓨터에서 이러한 알고리즘을 구현하기 위해서는 각 개체들의 유전자를 표현할 방법(representation scheme)이 필요한데, 컴퓨터의 비트 스트링이 주로 사용되어진다. 또한 이 방법은 combinatorial 최적화 문제처럼 목적함수의 값만을 필요로 하므로, 기울기를 이용하는 결정론적 방법들과는 달리 목적함수의 미분을 필요로 하지않아서 더 넓은 범위의 문제들에서 활용되어질수 있다.

전기 전도도를 역산하기위해서 다음과 같이 최적화문제로 정식화한다. 먼저 설계변수인 2개 영역의 전기 전도도의 범위는 관심 지역에 대한 어느정도의 사전 정보가 있다는 가정하에서 300[ $\Omega/m$ ]과 600[ $\Omega/m$ ]사이의 값으로 제한한다. 목적함수를 정

해석에서 구해진 전압 차들과 역해석에서 계산되는 전압 차들간의 차이를 제곱하여 합한것으로 잡으면

$$\text{maximaize } F(\sigma)$$

$$F(\sigma) = 1500 - \sum_{i=1}^{10} \left[ \sum_{j=1}^{10} \{ f_m^i(\sigma) - f_c^i(\sigma) \}^2 \right]$$

$$300 \leq \sigma_1 \leq 600, 300 \leq \sigma_2 \leq 600$$

유전 알고리즘은 기본적으로 목적함수를 최대화시키는 경우만을 다룰수 있기 때문에 여기서는 원 목적함수에서 1500의 값을 뺀 것을 목적함수가 되도록 한다. 1500은 목적함수를 음수로 만들지 않는 다른 값으로 대신할 수 있다. 여기서  $i$ 는 각 전류 배치에 대해서,  $j$ 는 그 전류 배치에 대한 전압 차를 측정하는 경우이다.  $f_m^i$ 은 유한요소해석으로 측정되어진 전압 차를  $f_c^i$ 는 역해석시에 유한요소법에 의해 계산되어지는 전압 차를 표시한다.

일반적으로 집단 내 개체수(population size)는 많을수록 좋지만 본 논문에서는 유한요소법으로 목적함수의 값을 계산해야하므로 계산량을 고려하여 100개의 개체로 제한하였다. 그러나 이와 같이 작은 개체수는 초기에 집단 내 개체들을 어느 하나의 개체로 포화시킬 가능성이 크기 때문에 이를 방지하기 위하여 선형 스케일링을 사용하였다. 또한 한 정된 시간을 생각하여 알고리즘은 100세대의 진화를 거친후에 종결하도록 하였다. 각 설계변수는 변화의 정도가 1단위로도 충분하기 때문에 9비트의 길이를 갖도록 하였으며 2개 설계변수의 대해서 chromosome의 길이는 총 18비트이다. 각 세대에서 수행되는 유전 연산인 교배와 변형은 실제 자연에서는 선택된 개체들에서 항상 일어나는 현상이 아니라 임의의 확률 값을 가지고 일어나므로 여기서는 교배의 확률을 0.85로 변형의 확률을 0.01로 잡았다. 이 확률들은 자연 현상의 기본적 전제를 만족시키는 한도에서 이외의 값들이 선택될 수 있다.

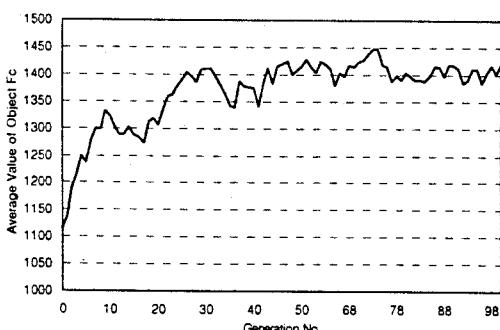


그림 2. 각 세대에서의 목적함수들의 평균값  
그림 2는 집단 내 개체들의 목적함수의 평균값을 각 세대별로 도시한 그림이며 표 1은 초기에 random하게 발생시킨 가장 좋은 개체의 값들과 초기 집단을 진화시켜 100세대 후에 얻은 값들, 그리고 그들 각각의 목적함수 값을 나타낸다.

표 1. 초기 전기전도도와 100세대후의 전기전도도

	초기값			100세대 후		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	목적함수	$\sigma_1$	$\sigma_2$	목적함수
test1	552	396	1482	394	399	1489
test2	589	398	1488	389	399	1498
test3	388	399	1498	400	399	1499

### 2.3 수치해석의 결과 검토

그림 2에서 집단 내의 목적함수들의 평균은 1113에서 시작하여 진화 후에는 1400근처에서 종결하였다. 이것은 집단 내의 환경에 적합한 개체들이 점점 더 자신들의 자손을 늘리는 현상으로 이해될수 있다. 더욱 더 세대 수를 늘린다면 목적함수의 평균값은 최적값인 1500에 보다 가까운 값으로 수렴하리라 예상된다. 그러나 항상 존재하는 변형의 확률로 인해 전체 집단의 평균값은 결코 1500이 될 수는 없을 것이다.

각 세대에서 집단 내 개체들의 목적함수 값들을 확인해 보면 목적함수의 분포는 많은 국소해를 가지는 구조로 되어있었다. 이러한 분포임에도 각각의 수치실험 예들은 초기 집단의 개체들이 최적점에 가까운 값을 가지고 있던지 아니던지 간에 세대를 반복해 나가면서 결국은 전체 최적점을 찾게됨을 보여준다.

### 3. 결 론

본 논문에서는 전기비저항 탐사법의 역산 방법으로서 국소 해로의 수렴을 극복하고 전체 최적점을 발견할 가능성이 있는 유전 알고리즘을 사용하므로 모든 경우의 수를 전부 검사하지 않고서도 실제의 값에 가장 가까운 전기비저항의 분포를 규명할 수 있음을 보였다. 간단한 수치해석 예를 통하여 전체 최적점 근방에서 실제의 전기비저항 값과 가장 가까운 값이 복원되므로 그 유효성을 검증하였다. 실제 전기 비저항의 분포는 단순히 2개의 변수로 표현할수 있는 간단한 구조는 아니지만 여러 개의 설계 변수를 사용하고 알고리즘의 효율성을 향상시켜서 실제에서도 그 구현이 시도될 수 있으리라 생각되어진다.

### (참 고 문 헌)

- [1] A.Dey & H.F.Morrison, "Resistive modeling for arbitrarily shaped 2-dimesional structures", Geophys. Prosp., Vol 27, pp106-136, 1979
- [2] C.R. Johnson, "Computational Inverse Problems in Medicine", IEEE Comp. Sci. & Eng., pp42-45, 1995
- [3] P.Neittaanmaki et al. "Inverse Problems and Optimal Design~", Clarendon press, 1996
- [4] E.K.P.Chong et al. "Introduction to Optimization", A Wiley-Interscience Pub., 1996
- [5] Goldberg, "Genetic Algorithms in search, ~", Addison-Wesley, 1989