

압전 트랜스듀서 설계를 위한 bond graph 모델링 Bond Graph Modeling Approach for Piezoelectric Transducer Design

문 원규

삼성종합기술원 Microsystems Lab.(Tel:+82-331-280-8276;Fax:+82-331-280-6955;E-mail:wkmoon@elim.net)

Abstract A bond graph modeling approach which is equivalent to a finite element method is formulated in the case of the piezoelectric thickness vibrator. This formulation suggests a new definition of the generalized displacements for a continuous system as well as the piezoelectric thickness vibrator. The newly defined coordinates are illustrated to be easily interpreted physically and easily used in analysis of the system performance. Compared to the Mason equivalent circuit model, the bond graph model offers the primary advantage of physical realizability. Compared to circuit models based on standard discrete electrical elements, the main advantage of the bond graph model is a greater physical accuracy because of the use of multiport energetic elements. While results are presented here for the thickness vibrator, the modeling method presented is general in scope and can be applied to arbitrary physical systems.

Key Words Piezoelectricity, Bond Graph Modeling, Transducer Modeling, Sonar Transducers.

1 서론

복잡한 시스템 설계시 동적 거동 해석과 이해에 많은 도움을 주는 graphs는 처음 발명에 불연속체로 모델 가능한 시스템에 쉽게 적용할 수 있도록 고안되었다 [1, 2]. 그러나 bond graphs는 구조적으로 많은 정보를 쉽고 빠르게 전달할 뿐만 아니라 작성 모델의 물리적 타당성 여부를 쉽게 확인할 수 있어서, 전통적으로 연속체로 모델되는 시스템에도 적용할 수 있는 방법이 모색되어 왔다.

압전 소자는 1900년대 초부터 초음파 발생기에 사용되어 왔으며, 그 후 그 응용 분야가 초음파 모터 등으로 급속히 확장되어 가고 있다 [4, 5]. 전통적으로 압전 소자는 연속체로 모델되어 왔고 주어진 경우에 대한 모델의 작성이 상당히 복잡하여서 제대로 모델을 작성하기 위해서는 상당한 시간을 투자해야 한다. 그러나 시스템 엔지니어가 한 부품의 모델 작성과 물리적 성질을 이해하는데 많은 시간을 투자한다는 것은 용이하지 않다 [5].

지금까지 초음파 발생기의 설계시에 사용되었던 접근 방식은 압전 현상을 잘 아는 엔지니어가 흔히 쓰이는 모양의 압전 구동기 소자에 대한 연속체 모델을 만들고 이를 바탕으로 동등한 회로 모델을 만들어 제공하고 시스템 엔지니어는 작성된 모델을 전력 증폭기나 초음파 발생기 구조물 등의 모델과 연결 시켜서 전체 시스템의 동적 거동 해석 등을 통해 성질을 규명하고 설계에 반영하는 식이었다. 이러한 동등 전기 회로 모델 접근 방식은 시스템 설계에 상당히 유용하나 가장 중요한 부분인 트랜스듀서에 대한 물리적인 이해와 감각을 시스템 엔지니어가 가질 수 있는 길을 차단하기 때문에 편리함을 위하여 치루어야 하는 가격이 작지 않다. 이러한 단점을 극복할 수 있는 방법은 유한 요소법을 이용하는 것이나 이 또한 기본적으로 연속체 모델과 유한 요소법에 대한 지식이 없이는 정확한 활용이 힘든 방법이다 [6, 7]. 이에 대하여 bond graph 모델이 트랜스듀서의 모델링에 유용하다는 주장이 제기되었다 [3]. 그러나 bond graph 모델링 방식은 불연속에 적용될 수 있도록 고안된 것이어서 연속체로 다루어지는 압전 소자에 적용하기 위해서는 접근 방식을 새롭게 고안해야 한다.

여태껏 주로 불연속체로 모델 가능한 시스템의 해석에 주로 사용되었던 bond graph 접근 방식은 동등 전기회로 모델을 이용한 해석 방법의 단점을 보완할 수 있으면서 회로 모델의 작성을 편리함을 유지할 수 있는 가능성이 있으므로, 트랜스듀서 모델의 작성과 이용에 적합하다 [3]. 그러나 앞에서 언급했듯이 bond graphs는 불연속 시스템의 모델링에 사용할 수 있도록 고안되어서 이를 압전 소자와 같은 연속체로 모델되어 왔던 시스템에 적용하려면 적용

기법을 새로이 개발하여야 한다.

연속체 모델로 부터 bond graph 모델을 이끌어 내는 방법에 대한 연구는 Masada와 Ingrim에 의하여 처음 체계적으로 연구되어졌으나 그 이론 또한 매우 난해하여 bond graph를 깊이 연구하는 사람이 아니면 사용하기 쉽지 않았다 [8, 9]. 본 논문에서 제시하고 있는 방법은 유한 요소법을 에너지 활용법으로 설명하여 bond graph를 유도하는 방법으로 유한 요소 이론을 알지 않더라도 쉽게 접근할 수 있을 뿐 아니라 전기 회로 소자의 bond graph 모델 뿐만 아니라 다양한 종류의 소자들의 bond graph 모델과도 쉽게 연결하여 사용할 수 있어 유용성이 크다.

본 논문에서는 압전 소자 중 흔히 사용되는 두께 방향 진동자의 유한 요소법과 동등한 bond graph 모델을 개발하고 그 성질을 살펴 본 후 이의 장단점을 알아보기 위하여 동등 전기 회로 이론과 비교하였다.

2 두께 방향 진동자

두께 방향 진동자는 자주 쓰이는 압전 소자의 한 사용 형태이다 [4, 5]. 두께 방향 진동자는 압전 세라믹으로 만들어지며 다음과 같이 수학적으로 정의 된다. 먼저 x, y, z 를 그림 1에 보인 바와 같이 재료에 부착된 직각 좌표계의 세 방향의 좌표라 하고 u, v, w 를 각각 x, y, z 방향 변위라 하자. 변형을 S_i 와 변위 u, v, w 와의 관계를 아래와 같은 선형 관계식을 사용할 때:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} & , & & S_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} & , \\ S_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} & , & & S_4 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & , \\ S_5 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & , & & S_6 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & . \end{aligned} \quad (1)$$

두께 방향 진동자의 경우는 아래와 같은 조건을 의미한다 [4, 5].

$$\begin{aligned} u &= 0 & , \\ v &= 0 & , \\ w &= w(z, t) & . \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 & , \\ D_2 &= 0 & , \\ D_3 &= D_3(t) & . \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 D_i 는 전속 밀도로서 i 의 값이 1,2,3으로 변화함에 따라서 각각 x, y, z 방향을 가리킨다.

응력을 \mathbf{T} , 전기장을 \mathbf{E} 라 하면 압전 재료 성질 방정식은 아래와 같다.

$$T_i = \sum_{j=1}^6 c_{ij}^D S_j - \sum_{k=1}^3 h_{ik} D_k, \quad (4)$$

$$E_m = -\sum_{j=1}^6 h_{jm} S_j + \sum_{k=1}^3 \beta_{mk}^S D_k, \quad (5)$$

여기서 c_{ij}^D 는 탄성 강성 계수(elastic stiffness), h_{ik} 는 압전 계수이고, β_{mk}^S 는 impermeability constants이다.

압전 세라믹의 경우는 81개의 재료 특성 계수들 중 25개만이 영이 아니므로 [4, 10] 두께 방향 진동자의 조건을 식 (4)과 (5)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$S_1 = S_2 = S_4 = S_5 = S_6 = 0, \quad (6)$$

$$T_1 = c_{13}^D S_3 - h_{13} D_3, \quad (7)$$

$$T_2 = c_{13}^D S_3 - h_{13} D_3, \quad (8)$$

$$T_4 = T_5 = T_6 = 0, \quad (9)$$

$$E_1 = E_2 = 0, \quad (10)$$

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3, \quad (11)$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3. \quad (12)$$

3 Bond Graph 모델

Bond graph 모델링은 에너지 접근 방식에 기초하여 다양한 물리적인 시스템을 전기회로를 그리듯이 도식적으로 표현하는 기법으로 [2], 기본적인 구성 요소는, 전기 회로의 capacitor 또는 기계 요소의 스프링과 같은 C 소자와 기계적 질량이나 전기적 inductor에 해당하는 I 소자로 이루어지는 에너지 저장소자와, 전기적 저항이나 기계적 damper에 해당되는 R 소자, 그리고 이들을 연결시켜주는 에너지의 연결관과 같은 bond, 또, 각 소자로부터 나온 bond들의 연결 조건을 알려주는 common effort junction과 common flow junction으로 이루어 진다. 기본적으로 bond graphs는 주어진 시스템의 각 소자들의 물리적 성질을 그림으로 표현한 후 서로 연결하여 시스템의 물리적 성질을 쉽게 파악할 수 있게 하는 방법으로, 이 그림은 모델을 작성하는 사람이 물리적인 시스템을 어떠한 이해했는가를 보여 준다. 한 구성 요소의 물리적 성질은 그 요소의 기능과 밀접한 관계를 가지므로 어떤 시스템의 bond graph를 작성하면 그 시스템 안에서 각 요소들의 기능과 성질을 동시에 빨리 짐작할 수 있다. Bond graph에 대한 더 자세한 사항은 참고 문헌 [2]등을 참고바란다.

두께 방향 진동자의 bond graph 모델을 작성하기 위해서는 시스템에 저장된 에너지를 계산하여야 한다. 압전 소자의 위치 에너지 U 는 아래와 같이 정의되므로 [12]:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \sum_{i=1}^6 T_i S_i + \sum_{j=1}^3 E_j D_j \right\} dx dy dz. \quad (13)$$

두께 방향 진동자의 조건과 재료 성질을 적용하여 아래의 식을 얻는다. (식 (6), (12) 참조)

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ c_{33}^D S_3^2 - 2h_{33} S_3 D_3 + \beta_{33}^S D_3^2 \right\} dx dy dz. \quad (14)$$

시스템에 저장되는 에너지 계산법을 결정한 다음에는 bond graph 모델을 작성하는데 가장 중요한 것 중에 하나인 동력 변수(power variable)를 결정해야 한다. Bond graph 모델에서는 동력 변수를 두 가지로 분류한다. 하나는 힘 변수와 (effort variable) 다른 하나는 흐름 변수(flow variable)이다. 힘 변수는 기계 시스템의 기계적 힘과 같이 주어진 bond graph element의 동적 응답을 일으키는 변수이고 흐름 변수는 기계적 시스템의 속도와

같이 상태를 나타낼 수 있는 변수로서 각 변수는 언제나 짝을 가지며 한 짝인 힘 변수와 흐름 변수를 곱하면 항상 그 요소가 행하는 동력(power) 즉 에너지 변화율이 되어야 한다.

Bond graph 모델은 불연속 시스템에 적용하기 쉽게 고안되었으므로 연속체에서와 같이 상태 변수를 모든 물질점(material point)에 정의하기 쉽지 않다. Ingram은 벡터의 개념을 도입하여 물질점에 연속적으로 분포된 상태 변수들과 함수들의 내적을 이용하여 연속체의 bond graph 작성을 시도하였다. 그러나 그의 이론은 연속체로 모델한 시스템과 불연속체로 모델한 시스템을 함께 포함한 시스템에 적용하는데 많은 어려움을 유발한다. 따라서 여러 가지 복합적인 요소들을 가진 시스템의 모델에 사용하기에 유용하다고 말하기 힘들다.

본 논문에서는 유한 요소법에 적용되는 유한 차원의 함수 벡터 공간을 바탕으로 유한 요소 모델과 수학적으로 동등하나, 에너지 법으로 접근하여 bond graph 모델을 얻을 수 있도록 고안하였다. 고안된 bond graph 모델은 쉽게 불연속 시스템의 bond graph 모델과 연결할 수 있으며 정의된 상태 변수들도 물리적으로 그의 의미를 쉽게 찾을 수 있다.

본 논문에서 제시하는 두께 방향 진동자의 bnd graph 모델은 다음과 같은 가정에서 부터 출발한다:

어떤 연속체의 상태는 유한개의 상태 변수들로 충분한 정확도로 표현될 수 있다.

이는 유한 요소법등 여러 근사해법의 가정이며 수학적으로도 기반함수(basis function of a function space) 벡터를 잘 선택하면 적당한 수의 상태 변수로도 원하는 정확도의 해를 얻을 수 있다는 것을 증명할 수 있다 [13, 14, 15]. 본 논문에서 사용한 기반함수들은 유한 요소법에서 사용하는 것과 같은 것으로 이에 대한 여러 수학적 증명은 잘 알려져 있다 [13, 14].

두께 방향 진동자의 bond graph 모델은 먼저 연속체 모델에서와 같이 변위 $w(z,t)$ 와 진동자의 양면에 부착되어 있는 전도체 판 중에서 기준이 되는 판에 (두께 방향의 기준 방향에서 생각하면 아래쪽 전도체 판) 존재하는 자유전자가 기준 상태로 부터 얼마나 증감한가를 나타내는 전하량 $q(t)$ 를 기본 변수로 생각하고 시작한다. 앞서 제시한 가정을 상기하면 $w(z,t)$ 는 유한 개 변수에 대한 정보로 완벽하게 나타내어질 수 있어야 한다. 유한 요소법에서와 같이 Sobolev Space에서 정의 되는, 다음에 설명하는 방법으로 구성되는 basis function 들로 만들어 지는 subspace $H_n(a,b)$ 를 생각한다. Basis function $f_i(z)$ 는 두께 방향에 서로 다른 임의의 n 개의 지점 z_i 를 아래와 같이 정의하여

$$z_i = a + \frac{b-a}{n-1}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Basis function $f_i(z)$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$f_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } a \leq z \leq z_{i-1} \\ \frac{n-1}{b-a}(z - z_{i-1}) & \text{if } z_{i-1} \leq z \leq z_i \\ \frac{n-1}{b-a}(z_{i+1} - z) & \text{if } z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ 0 & \text{if } z_{i+1} \leq z \leq b \end{cases} \quad (16)$$

그림 1은 $n = 4$ 일 때의 basis function들을 보여 주는 것으로 $f_i(z)$ 는 i 번째 질점에서 1이라는 값을 가지며 다른 질점에서는 0이라는 것은 주목할 만하다. 이렇게 정의된 basis function들로 Sobolev Space의 subspace $H_n(a,b)$ 는 아래와 같이 정의된다 [16]:

$$H_n = \left\{ f(z) : f(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(z) \right\}, \quad (17)$$

여기서 α_i 는 임의의 상수이다.

이제 앞서 제시한 가정에 따라 어떤 주어진 순간의 두께 방향 진동자의 변위는 $H_n(a,b)$ 안에 존재한다고 생각할 수 있고 이러한 한 시각의 변위들을 어떤 시간 구간에 대하여 모으면 subspace $H_n(a,b)$ 안에서 마치 공간상의 곡선과 같은 것들을 구성할 수 있는데 이를 subspace $H_n(a,b)$ 의 매개변수 곡선(parametric curves)이라 하고 이의 모아 구성된 것을 아래와 같이 정의한다:

$$C = \{ w(z,t) : w(z,t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) f_i(z) \}, \quad (18)$$

여기서 $w_i(t)$ 는 임의의 시간에 대한 함수이다. C 의 구성 원소는 각각 시간에 따른 변위를 나타낼 수 있으므로 두께 방향 진동자의 변위 $w(z, t)$ 는 C 의 한 요소일 수밖에 없다.

이제 우리는 두께 방향 진동자의 변위를 C 의 한 요소이라는 가정에서 이 요소의 성질을 살펴보자. Basis function $f_i(z)$ 는 한 번 정해지면 시간에 따라 변화하지 않으므로 지배 방정식에 의하여 결정되는 것은 계수 $w_i(t)$ 들이다. 그런데

$$w_i(t) = w(z_i, t) \quad \forall t \in (0, \infty) \quad (19)$$

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{z=z_i} \quad , \quad (20)$$

따라서 선택한 질점의 변위를 연속체 안 모든 질점의 변위를 대표 하는 변수들로 생각할 수 있을 뿐 아니라, 주어진 질점의 속도도, $w_i(t)$ 를 직접 시간에 대하여 미분하여 구해지며, 모든 질점의 속도 분포도 이 주어진 질점의 속도 부터 계산할 수 있으므로 공간의 좌표와 같이 속도 구배에 대한 대표적 변수로 취급할 수 있다. 따라서 여기서 우리는 선택된 질점의 변위들 $w_i(t)$ 와 도전판의 전하 변화량 q 를 주어진 시스템(두께 방향 진동자)의 일반 좌표들이라고 정의할 수 있다. 다시 말하면 연속체를 비연속체처럼 유한개의 일반 좌표로 표현하는 것이다. 그러므로 비연속체에 적용되는 Hamilton's Principle을 적용할 수 있다.

이제 모델 작성을 위한 작업을 시작하는데 필요한 모든 준비를 마쳤으므로 첫째 단계를 시작하여 보자. 첫단계는 물성치 상태 방정식(constitutive relations)을 앞에서 정의한 변수로 표현하는 것이다. 변형률은 아래와 같이 나타내어지며

$$S_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^n w_i(t) f'_i(z) \quad , \quad (21)$$

여기서

$$f'_i(z) = \begin{cases} \frac{df_i}{dz} & \text{if it exists} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad , \quad (22)$$

이며, 이로 부터 potential energy를 아래와 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \iiint \left\{ c_{33}^D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i(t) w_j(t) f'_i(z) f'_j(z) \right. \\ &\quad - 2h_{33} \sum_{i=1}^n w_i(t) f'_i(z) q(t) / A_0 \\ &\quad \left. + \beta_{33}^S \{q(t) / A_0\}^2 \right\} dx dy dz \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\int_a^b c_{33}^D A_0 f'_i(z) f'_j(z) dz \right] w_i(t) w_j(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b h_{33} f'_i(z) dz \right] w_i(t) q(t) \\ &\quad + \frac{\beta_{33}^S (b-a)}{2A_0} \{q(t)\}^2 \quad . \quad (23) \end{aligned}$$

같은 방법으로 kinetic energy \mathcal{T} 도 아래와 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \iiint \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} \int_a^b \rho A_0 f_i(z) f_j(z) dz \right] \dot{w}_i(t) \dot{w}_j(t) \quad , \quad (24) \end{aligned}$$

여기서 $\dot{w}_i = \frac{dw_i}{dt}$.

위에서 계산한 에너지들을 이용하여 Lagrangian $L = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ 을 계산할 수 있고 이로 부터 일반화된 momentum 변수 p_i 를 아래와 같이 정의한다.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_i} \quad , \quad (25)$$

이제 두께 방향 진동자의 지배 방정식을 얻기 위하여 Lagrange's equation을 적용한다.

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial w_i} + F_i \quad , \quad (26)$$

여기서 F_i 는 질점 $z = z_i$ 에 작용되는 동등 외력이다. 식 (23)부터 식 (26)까지를 이용하여 두께 방향 진동자의 상태 방정식을 아래와 같이 구해낼 수 있다.

$$\dot{\vec{w}}(t) = [m_{ij}]^{-1} \vec{p} \quad (27)$$

$$\dot{\vec{p}} = -[k_{ij}] \vec{w}(t) + \vec{h}q + \vec{F} \quad (28)$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial q} = -\vec{h}^T \vec{w} + \frac{q}{C_{eq}} \quad (29)$$

여기서

$$m_{ij} = \int_a^b \rho A_0 f_i(z) f_j(z) dz \quad , \quad (30)$$

$$k_{ij} = \int_a^b c_{33}^D A_0 f'_i(z) f'_j(z) dz \quad , \quad (31)$$

$$h_i = \int_a^b h_{33} f'_i(z) dz \quad , \quad (32)$$

$$C_{eq} = \frac{A_0}{\beta_{33}^S (b-a)} \quad , \quad (33)$$

이고 e 는 바닥 전극판($z = a$)으로 부터 윗전극판($z = b$)까지의 전압 감소이다. 예를 들어 만약 저항 R 이 전선에 의하여 윗 아래 전극판과 연결되었다면 식 (29)은 아래식과 같이 된다.

$$-R\dot{q} = -\vec{h}^T \vec{w} + \frac{q}{C_{eq}} \quad . \quad (34)$$

여기서 주목할 만한 것은 질량 행렬 $[m_{ij}]$ 와 강성행렬 $[k_{ij}]$, 그리고 압전 효과 행렬 \vec{h} 은 유한 요소법의 그것들과 동일하다는 것이다.

이제 앞서 행한 계산으로 부터 bond graph를 그리는 방법을 도출하여 보자. 먼저 운동에너지 \mathcal{T} 를 시간에 대하여 미분하여 n 개의 port를 가진 I element와 그의 연결 bond, 그리고 중요 변수들에 대한 정보를 얻고, 위치에너지(potential energy)를 시간에 대하여 미분하여 $(n+1)$ 개의 port를 가진 C element와 그의 bond, 상태 변수에 대한 정보를 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}}{dt} &= \dot{\vec{w}}^T [m_{ij}] \ddot{\vec{w}} = \dot{\vec{w}}^T \dot{\vec{p}} \\ &= \dot{\vec{p}}^T \dot{\vec{w}} = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \dot{w}_i \quad . \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}}{dt} &= \vec{w}^T [k_{ij}] \dot{\vec{w}} - \vec{h}^T \dot{\vec{w}}q - \vec{h}^T \vec{w} \dot{q} \frac{q}{C_{eq}} \dot{q} \\ &= \left[[k_{ij}] \vec{w} - \vec{h}^T \vec{w}q \right]^T \dot{\vec{w}} + \left[-\vec{h}^T \vec{w} + \frac{q}{C_{eq}} \right] \dot{q} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n k_{ij} w_j - h_i \right] \dot{w}_i \\ &\quad - \left[\sum_{j=1}^n h_j w_j - \frac{q}{C_{eq}} \right] \dot{q} \quad . \quad (36) \end{aligned}$$

여기서 우리는 I element의 고유 동력 변수들(associated power variable)이 \dot{p}_i 와 \dot{w}_i 이라는 것을 알 수 있고 $(n+1)$ 개의 port를 가진 C element의 동력 변수(power variable)는 질점에 작용하는 동등 외력과 \dot{w}_i 이라는 사실을 쉽게 알 수 있다. 이는 C element와 I element의 port들은 같은 흐름 변수(flow variable) \dot{w}_i 를 공유한다는 의미이고 따라서 연결 요소(junction element)는 동 흐름 접합점(common flow junction)을 사용해야 한다. 이러한 고찰을 통해서 두께 방향 진동자의 bond graph는 그림 3에 낱넨 바와 같이 된다.

3.1 2 질점 Bond Graph 모델

많은 경우 여러 소자들로 이루어지는 복잡한 시스템의 특성을 알아 보기 위한 해석은 각 소자들의 간단한 모델을 필요로 한다. 이 각 소자들의 간단한 모델들은 수행하고자 하는 해석의 종류에 따라 각 소자의 원하는 종류의 특성을 정확하게 포함하도록 작성된다.

두께 방향 진동자는 많은 경우 여러 가지 소자와 어우러져 사용되므로 주위의 다양한 소자들과 함께 모델되어 전체가 하나의 시스템으로 그 특성을 파악하여야 하는 경우가 흔히 생긴다. 그런 경우에 쓰일 수 있는 간단한 모델로서 두께 방향 진동자의 2 질점 bond graph 모델을 생각할 수 있다.

현재까지 그러한 해석시에는 동등 전기 회로 모델을 작성하여 사용하여 왔으나 에너지의 변환이 일어나는 transducer의 동등 전기 회로 모델이 그 특성을 알기 쉽게 나타내지 않아 불편한 점이 있었을 뿐 아니라 여러 종류의 기계적 에너지 변환은 동등 전기 회로로는 그 특성을 제대로 나타내지 힘든 경우가 대부분이다. 이러한 관점에서 bond graph 모델은 에너지 변환 특성을 정확하게 나타낼 수 있을 뿐 아니라 일반적인 전기 회로 소자들도 쉽게 나타낼 수 있어 여러 잇점이 있다.

2 질점 bond graph 모델은 일반적인 모델인, 앞서 제시한 모델에 $n = 2$ 는 조건을 부여하여 간단하게 얻을 수 있다. 지배 상태 방정식들도 식 (27)부터 식 (29)까지에서 전체 질점수를 2로 하면 아래와 같은 방정식을 쉽게 얻는다. 먼저 기판 함수(basis function)의 정의식으로 보터 2 질점 경우의 기판 함수(basis function)를 구하면 아래와 같이 간단한 선형 함수가 되며

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{b-z}{b-a} \quad a \leq z \leq b, \\ f_2(z) &= \frac{z-a}{b-a} \quad a \leq z \leq b, \end{aligned} \quad (37)$$

지배 상태 방정식은 아래와 같이 간단하게 나타내진다.

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{4}{\rho A(b-a)} p_1 - \frac{2}{\rho A(b-a)} p_2 \\ w_2 &= -\frac{2}{\rho A(b-a)} p_1 + \frac{4}{\rho A(b-a)} p_2 \\ p_1 &= -\frac{c_{33}^D A}{b-a} (w_1 - w_2) - h_{33} q + F_1 \\ p_2 &= -\frac{c_{33}^D A}{b-a} (w_2 - w_1) + h_{33} q + F_2 \\ e &= -h_{33}(w_2 - w_1) + \frac{\beta_{33}^S (b-a)}{A} q \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 첫번째 질점은 두께 방향 진동자의 아랫면의 위치인 $z = a$ 이고 두번째 질점은 윗면의 위치인 $z = b$ 로 그 질점들에 정의된 변위들 $w_1(t) = w(a, t)$ 와 $w_2(t) = w(b, t)$ 가 상태 변수가 된다.

위의 상태 방정식을 행렬 식으로 표현하면 아래와 같이 두가지로 표현 할 수 있는데 하나는

$$\begin{aligned} &\frac{\rho A(b-a)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{c_{33}^D A}{b-a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \\ &h_{33} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} q + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

이고 다른 하나는

$$\begin{aligned} &\frac{\rho A(b-a)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{c_{33}^E A}{b-a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \\ &\frac{h_{33} A}{\beta_{33}^S d} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (40)$$

와 같다. 여기서 $c_{33}^E = c_{33}^D - \frac{(h_{33})^2}{\beta_{33}^S}$ 이고 식 (40)은 식 (29)을 이용하여 식 (39)로부터 쉽게 계산할 수 있다. 여기서 주목할 만한

것은 전기적 변수를 전하량 q 로 하느냐 전압 e 로 하느냐에 따라서 강성 행렬이 달라지는 것을 쉽게 계산할 수 있다는 것이다. 이 강성 행렬의 변화는 잘 알려진 대로 전기-기계 에너지 변환 작용의 영향으로 두개의 전극판을 전선으로 연결시킬 것인가 또는 절연 시킬 것인가에 따라서 기계적 특성 즉 고유 진동수가 달라진다는 것을 보여 주는 것이다.

여태까지 압전 transducer는 동등 전기 회로로 다루어져왔기 때문에 식 (39)에 $q = 0$ 라는 조건을 적용한후 구해낸 고유진동수를 anti-resonance frequency라 하고 식 (40)에 $e = 0$ 을 적용하여 구해낸 고유진동수를 resonance frequency라 하여 왔다. 이 명칭은 동등 전기 회로를 이용하여 해석할 때는 유용할런지 모르나 어떠한 물리적인 성질에 대한 정보를 제공할 수 없는 명칭이다. 물리적으로 본다면 anti-resonance frequency는 open-circuit resonance frequency이고 resonance frequency는 short-circuit resonance frequency이다.

그런데 이러한 물리적인 의미를 bond graph 모델을 보면 쉽게 파악할 수 있다. 그림 4에서 보면 두께 방향 진동자의 bond graph 모델은 세개의 열려진 bond를 가지고 있다. 두개의 bond는 기계적 경계조건에 의하여 결정되는 것이고 나머지 하나는 전기적 조건에 의하여 결정되는 것이다. 앞서 언급한 두개의 resonance는 이 bond graph 모델을 잠시만 살펴 보면 그 의미를 알 수 있다.

먼저 우리는 C element가 기계적 변수뿐만 아니라 전기적 변수에 의해서도 영향을 받는다는 사실로부터 기계적 성질이 전기적 조건에 의하여 영향을 받을 수 있다는 것을 쉽게 유추할 수 있다. 그런 후 쉽게 두 가지 극단의 전기적 조건을 생각할 수 있는데 그 하나가 short circuit 조건이고 다른 하나는 open circuit 조건이다. 따라서 이 두 가지 극단적인 전기적 조건에 따른 기계적 고유진동수가 다른 것을 짐작할 수 있고 그의 물리적 의미도 쉽게 알 수 있다.

또 관성을 나타내는 I element가 기계적 변수에만 의존하는 것을 쉽게 알 수 있으므로 이로 부터 resonance가 전기적 조건 보다는 기계적인 성질에 의하여 더 많이 좌우된다는 것 눈치챌 수 있다. 실제로 전기적인 영향을 무시하고 계산을 하더라도 15% 미만의 오차가 존재한다.

이상에서 살펴본 바와 같이 bond graph 모델은 여러 물리적인 성질에 대한 정보를 그림으로 빠르게 전달할 수 있을 뿐아니라 다른 소자의 bond graph 모델과도 쉽게 연결하여 사용할 수 있다. 더불어 동적 성질과 정적인 성질을 동시에 나타낼 수 있어 동등 전기 회로 모델과 차이를 보인다.

3.2 수치적 정확성

여기서 전개한 bond graph 모델은 앞서 언급한 대로 유한 요소법을 이용한 것과 같은 지배 상태 방정식을 제공하므로 전체 질점수를 늘리면 연속체 모델의 해에 가까워진다는 것은 이론적뿐만아니라 실제 계산을 통해서도 증명된 바 있다. 따라서 여기서 제시한 bond graph 모델의 정확성에 대하여 새삼 증명을 할 필요는 없다.

그러나 현재 압전 transducer는 물체의 거동해석을 위한 유한 요소 프로그램은 전기 현상을 나타내기 위한 독립 상태 변수로 전압을 쓰고 적용하는 물성치 상태 방정식의 형태도 전기장을 독립변수로 사용하여 여기서 제시한 방법을 기존의 유한 요소 프로그램으로 확인하기 위해서는 약간의 계산이 수행되어야 한다.

여기서는 그러한 전개 방식대신 표 1에서 보여주는 바와 같이 2, 4, 6 질점의 경우를 간단한 경계 조건에 한하여 알려진 해와 비교하였다. 표를 보면 쉽게 알 수 있듯이 상당히 빠른 속도로 정해에 접근해간다는 것을 볼 수 있다.

4 동등 전기회로 모델과 비교

동등 전기 회로 모델은 너무도 잘 알려진 방법이고 현재까지 많은 트랜스듀서 설계 엔지니어이 실제 설계에 사용하여온 설계도구이다. 그러나 bond graph 모델은 그 방법이 창안된지 얼마 오래 되지 않았을 뿐 아니라 압전에 대한 모델은 본 논문에서 새로이 제시하는 것이므로 그 기능의 우수함을 예로 보이기 위하여 bond graph 모델을 동등 전기 회로 모델과 비교하고자 한다. Bond graph 모델 방식은 전기회로 모델과 같이 복잡한 시스템의 거동 해석에 유용하므로 아래에 기술한 비교를 통하여 전기 회로 모델을 이용한 접근 방식에 대한 대안으로서의 가능성을 제시하고자 한다.

4.1 두께 방향 진동자의 동등 전기회로 모델

두께 방향 진동자의 동등 전기회로 모델은 아래와 같은 편미분 방정식에서부터 시작한다. [4, 5]

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_{33}^D \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} . \quad (41)$$

위에 보인 편미분 방정식의 특수해는 가진 주파수 ω 가 정해지면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$w(z, t) = [A \sin k(z - a) + B \cos k(z - a)]e^{j\omega t} . \quad (42)$$

여기서 k 는 파수(wave number)로 아래와 같이 나타낼 수 있고

$$k = \frac{\omega}{c_t^D} , \quad (43)$$

c_t^D 는 파동 전파 속도로 다음과 같이 계산된다.

$$c_t^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} . \quad (44)$$

진폭을 나타내는 계수인 A 와 B 는 아래와 같이 나타내지는데

$$A = \frac{U_2 + U_1 \cos k(b - a)}{j\omega \sin k(b - a)} , \quad (45)$$

$$B = -\frac{U_1}{j\omega} , \quad (46)$$

여기서 U_1 과 U_2 는 경계 부분 즉 위($z = a$)와 아래($z = b$)면의 속도의 진폭이고 (그림 5 참조)

$$-U_1 e^{j\omega t} = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{z=a} , \quad (47)$$

$$U_2 e^{j\omega t} = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{z=b} . \quad (48)$$

위 아래 면에 작용하는 외력 조건은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$T_3|_{z=a} = -\frac{F_1}{A_0} e^{j\omega t} , \quad (49)$$

$$T_3|_{z=b} = \frac{F_2}{A_0} e^{j\omega t} . \quad (50)$$

식 (42)와 식 (47)부터 식 (50)까지를 이용하여 F_1 와 F_2 를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} -F_1 &= [j\rho A_0 c_t^D \tan \frac{k(b-a)}{2}]U_1 \\ &+ \frac{\rho c_t^D A_0}{j \sin k(b-a)}(U_1 + U_2) - h_{33} D_0 A_0 , \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= [j\rho A_0 c_t^D \tan \frac{k(b-a)}{2}]U_2 \\ &+ \frac{\rho c_t^D A_0}{j \sin k(b-a)}(U_1 + U_2) - h_{33} D_0 A_0 . \end{aligned}$$

식 (11)과 식 (12), 그리고 전압의 정의로 부터 위($z = a$)와 아래($z = b$)면의 전압차를 아래와 같이 나타낼 수 있고

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E_3 dz \\ &= -h_{33} \{A \sin k(b - a) + B[\cos k(b - a) - 1]\}e^{j\omega t} \\ &+ (b - a)\beta_{33}^S D_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (52)$$

전류는 아래와 같이 나타내지므로

$$\begin{aligned} I &= A_0 \frac{dD_3}{dt} \\ &= j\omega A_0 D_0 e^{j\omega t} . \end{aligned} \quad (53)$$

Electric impedance는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V}{I} \\ &= -\left(\frac{h_{33}}{j\omega}\right) \left(\frac{U_1 + U_2}{j\omega D_0 A_0}\right) + \frac{\beta_{33}^S (b - a)}{j\omega A_0} . \end{aligned} \quad (54)$$

그림 5에 보인 동등 전기회로 모델은 앞서 서술한 식들로부터 작성할 수 있다 [4, 5]. 그림에 나타난 변압기의 변압비 N 은 아래와 같이 주어지고

$$N = \frac{j\omega D_0 A_0}{U_1 + U_2} = \frac{h_{33} A_0}{\beta_{33}^S (b - a)} , \quad (55)$$

기계적 impedances는 다음과 같다.

$$Z_1 = j\rho A_0 c_t^D \tan \frac{k(b-a)}{2} , \quad (56)$$

$$Z_2 = \frac{\rho A_0 c_t^D}{j \sin k(b-a)} . \quad (57)$$

4.2 두 모델의 비교

동등 전기회로 모델은 압전 트랜스듀서의 설계 및 해석에 있어서 매우 중요한 역할을 하여 왔다 [5]. 이러한 동등 전기회로 모델을 이용한 방법의 유용성은 아래와 같은 점을 들 수 있다.

1. 한번 어떠한 압전 소자의 동등 전기회로 모델이 작성되면, 이를 이용하는 시스템 엔지니어가 압전 현상과 압전 소자의 물리적 성질에 대하여 특별한 지식이 없더라도 쉽게 사용할 수 있다.
2. 동등 전기회로 모델은, 일반적인 회로 소자들과 동등하게 취급할 수 있으므로, 압전 소자 주위의 전기 소자들의 모델과 쉽게 연결시킬 수 있다.
3. 전체 시스템의 주파수 특성을 쉽게 구할 수 있다.

이러한 명백한 이점 외에 동등 전기회로 모델은 단점과 불편한 점이 있다. 대부분의 단점들은 음의 값을 가지는 capacitor $-C_0$ 와 Z_1 , 그리고 Z_2 등이 일반적 전기회로에서 볼 수 있는 모델이 아니라는 것이다 (식 (56)와 식 (57) 참조). 이러한 정체 불명의 전기회로 모델을 포함하는 것은 물리적인 성질을 이해하는데 도움을 전혀 주지 못하다.

일반적인 경우 전기회로가 그려지면 그로부터 회로에 대한 지식이 있는 사람이면 그 회로의 응답 특성에 대하여 정상적인 정보를 쉽게 포착할 수 있다. 그러나 압전 소자의 전기회로 모델을 포함하게 되면 이는 쉽지 않다. 예를 들어 앞서 언급한 resonance와 anti-resonance를 계산해내는데도 상당한 시간이 드는 계산 이전에 압전 현상에 대한 많은 이해가 필요하기 때문이다. 뿐만 아니라 이 두 가지의 resonance가 존재한다는 것을 어렵게 알게 되었다고 하더라도 이의 물리적 의미를 깨닫기는 여간 어렵지 않다. 앞서 언급대로 두 resonance를 물리적 현상과 무관하게 명명했다는 것이 이를 반증한다고 볼 수 있다. 앞서 기술한 바와 같이 bond graph model은 이러한 전기-기계적 연결 현상을 쉽게 나타내줄 뿐 아니라 이의 성격도 나타내므로 현상의 이해에 있어서 bond graph 모델이 매우 동등 전기회로 모델보다 더 유용하다 할 수 있다.

동등 전기회로 모델의 또 하나의 문제점은 정적인 응답 특성에 대한 오류이다. 그림 5의 전기쪽 단말에 일정한 전압을 부가한다면 기계적 단말에는 어떠한 전압도 전류도 발생할 수 없다. 그러나 압전 소자에 일정한 전압을 부가하면 기계적 변위가 생긴다는 것은 명백한 일이다. 따라서 가장 복잡한 동등 전기회로 모델인 그림 5도 정적 응답 특성을 제대로 나타내고 있지 않은 것이다. 이러한 오류가 발생하는 이유는 전기-기계적 상호작용 현상을 물리적 특성이 다른 잘못된 변환기로 표현했기 때문이다.

앞서 서술한 대로 bond graph 모델은 동적 응답뿐만 아니라 정응답도 정확한 경향을 알아보기 쉽게 보여준다. 그것은 bond

graph가 여러 에너지 변환의 성격을 정확하게 나타낼 수 있기 때문이다.

이상에서 살펴본 바와 같이 에너지 변환을 표현하는 데에는 bond graph가 커다란 편리함을 제공한다. 본 논문에서 제기한 압전 소자의 bond graph 모델은 계산을 행할 때에도 편리함을 제공한다. 동등 전기회로 모델의 경우 간단한 경계조건에 대해서만은 정해를 제공할 수 있다는 큰 이점이 있지만 그 과정이 매우 복잡할 뿐만 아니라 정해를 근으로 갖는, 많은 경우 해석적 방법으로는 풀리지 않는 방정식만을 제공하므로 수치적 해가 필요한 경우에는 수치 해석 방법으로 주어진 방정식을 풀어야 한다. 그러나 Bond graph 모델의 경우는 단순히 총 질점수만을 늘려가면 조금더 정확한 해를 얻을 수 있어서 계산 상 편리성이 있고 다양한 경계 조건에 대해서도 동일한 방법을 적용할 수 있다. 따라서 수치적인 계산에도 bond graph 모델의 유용함은 동등 전기회로 모델에 뒤지지 않는다고 할 수 있다.

Bond graph 모델도 매우 큰 단점이 있다. 전기회로는 대학 입학 이전에 그 기초를 습득할 만큼 많은 사람들에게 널리 알려지고 쓰이고 있으나 bond graph의 저변이 그렇게 넓지 않아서 이를 사용하려면 bond graph에 대하여 새로이 배워야 하는 경우가 대부분이다. 물론 bond graph를 배운다는 것은 물리적 현상과 이의 모델링을 배우는 것이므로 의미가 없는 것은 아니지만 이미 전기회로에 익숙한 사람들에게는 다르게 느껴질 수 있다.

5 결론

본 논문에서는 두께 방향 진동자의 bond graph 모델을 새롭게 제시하였으며 이의 특성을 이론적으로 고찰하였다. 새로 개발한 모델링 방법은 유한 요소법과 수학적으로 같은 것이어서 수치적 타당성을 쉽게 보장 받을 수 있는 방법이며 또 한편으로는 유한 요소법을 물리적 원리만으로 새롭게 설명한 것이다. 제시된 bond graph 모델은, 지금까지 그 기능의 관점에서 트랜스듀서 설계에 많이 사용되어 왔던 동등 전기회로 모델과 비교할 때, 기능상 그를 대치할 수 있을 뿐 아니라, 더불어 압전 소자의 성질을 쉽고 빠르게 이해하게 하여서 트랜스듀서 설계 및 해석에 더 유용하다는 것을 알 수 있었다.

여기서 제시한 압전 두께 방향 진동자의 bond graph 모델 작성 방법은 압전 두께 방향 진동자의 모델에만 국한되지 않고 거의 모든 선형 고체 구조물의 bond graph 모델 작성에 응용될 수 있다.

참고 서적

[1] Paynter, H. M., *Analysis and Design of Engineering Systems*, (MIT, Cambridge, 1961).
 [2] Karnopp, D. C., Margolis, D. L., and Rosenberg, R. C., *System Dynamics : A Unified Approach* (John Wiley and Sons, New York, 1990).
 [3] Busch-Vishniac, I. J., and Paynter, H. M., "Bond Graph Models of Transducers," *Special issue of J. Franklin Inst.* (invited paper), pp663-673, vol.328,1991.

[4] Mason, W. P., *Physical Acoustics : Volume I* (Academic Press, New York, 1964).
 [5] Wilson, Oscar Bryan, *An Introduction to the Theory and Design of Sonar Transducers* (U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1985).
 [6] Allik, H. and Huges, T., "Finite Element Methods for Piezoelectric Vibration," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, pp151-157, vol. 2, 1970.
 [7] Lerch, R., "Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements," *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, pp233-247, vol. 37, No. 2, May. 1990.
 [8] Ingram, M. E., and Masada, G. Y. "The Extended Bond Graph Notation," *Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, pp113 - 117, vol. 113, Mar. 1991.
 [9] Ingram, M. E. and Masada, G. Y., "Extended Bond Graph Reticulation of the Mixed Initial-Boundary Value Problem in Finite Hyperelasticity," *ASME J. Dyn., Sys., Meas. and Control*, in press.
 [10] Cady, W. G., *Piezoelectricity* (McGraw-Hill, New York, 1948).
 [11] Don Berlincourt, "Ultrasonic Crystals and Ceramics", *Chapter 2 of Piezoelectric Crystals and Ceramics* (Plenum Press, New York, 1971).
 [12] Eer Nisse, E. P., "Variational Method for Electroelastic Vibration Analysis," *IEEE trans. on Sonics and Ultrasonics*, pp153-160, vol. SU-14, no. 4, Oct. 1967.
 [13] Oden, J. T., *Applied Functional Analysis* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979).
 [14] Marti, J. T., *Introduction to Sobolev Spaces and Finite Element Solution of Elliptic boundary Value Problems* (Academic Press, London, 1986).
 [15] Adams, R. A., *Sobolev Spaces* (Academic Press, New York, 1975).
 [16] Hughes, T., *The Finite Element Method* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987).

표 1: Anti-resonance frequencies of the piezoelectric vibrator in two typical conditions (Free-Free and Clamped-Free) $\omega_0 = \sqrt{c_{33}^D/\rho}$

mode	Free-Free ($\times\omega_0$)				Clamped-Free ($\times\omega_0$)			
	Exact	2-node	4-node	6-node	Exact	2-node	4-node	6-node
1	0	0	0	0	1.5708	1.7321	1.5888	1.5773
2	3.1416	3.4641	3.2863	3.1935	4.7124	N/A	5.1962	4.8881
3	6.2832	N/A	7.3485	6.6999	7.8540	N/A	9.4266	8.6603
4	9.4248	N/A	10.3923	10.7758	10.9956	N/A	N/A	12.9863
5	12.5664	N/A	N/A	15.0943	14.1372	N/A	N/A	16.7033
6	15.7080	N/A	N/A	17.3205	17.2788	N/A	N/A	N/A

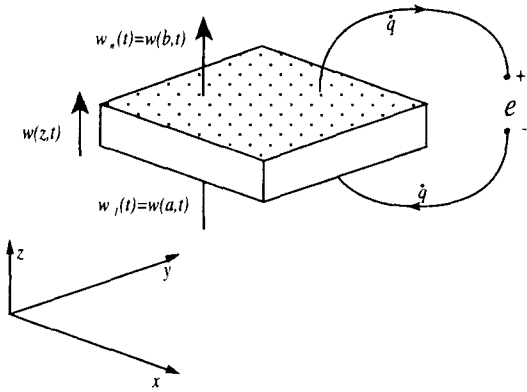


그림 1: Thickness Vibrator

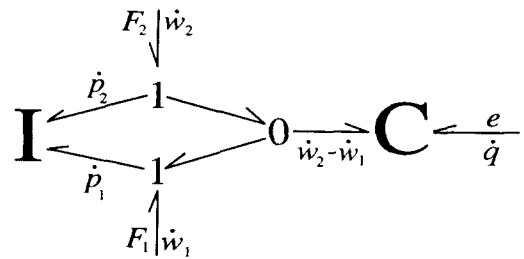


그림 4: Two node bond graph model of the thickness vibrator

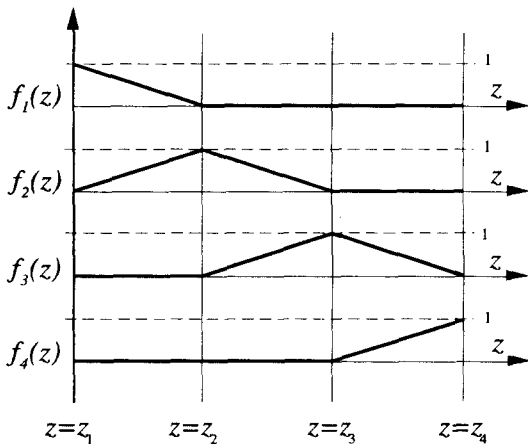


그림 2: Shape functions for 4-node bond graph model

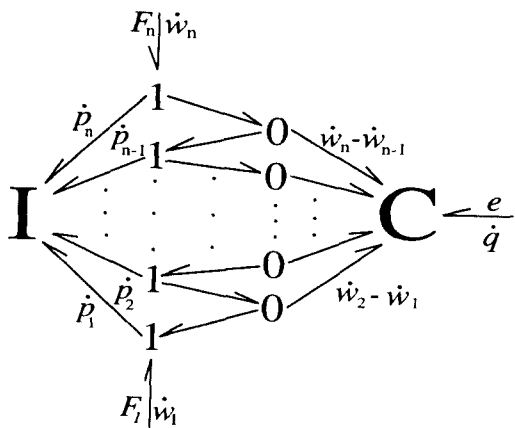
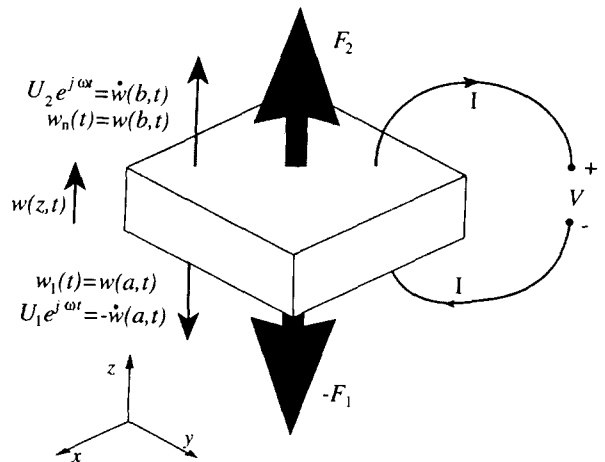


그림 3: n-node bond graph model of the thickness vibrator

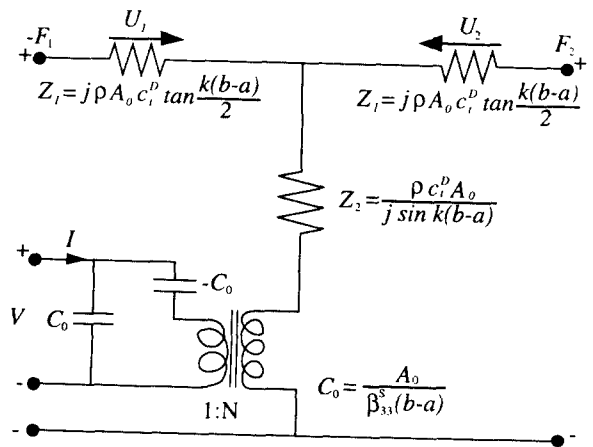


그림 5: Equivalent circuit model of the thickness vibrator