

## 최적 제어에 대한 퍼지 유전 알고리즘의 적용 연구

### Fuzzy Genetic Algorithm for Optimal Control

°박 정식, 이 태 용

한국 과학 기술원, 화학공학과 (Tel: 869-3966; Fax: 869-3910; E-mail: cspark@zeus.kaist.ac.kr)

**Abstract** This paper uses genetic algorithm (GA) for optimal control. GA can find optimal control profile, but the profile may be oscillating feature. To make profile smooth, fuzzy genetic algorithm (FGA) is proposed. GA with fuzzy logic techniques for optimal control can make optimal control profile smooth. We describe the Fuzzy Genetic Algorithm that uses a fuzzy knowledge based system to control GA search. Result from the simulation example shows that GA can find optimal control profile and FGA makes a performance improvement over a simple GA.

**Keywords** Optimal Control, Genetic Algorithm, Fuzzy Technique

#### 1. 서론

유가식 반응기에서 주입 양을 최적 제어한다든지, 반응 시간 동안 최적의 온도 프로파일을 구하는 일 등은 생물 공학이나 화학 공학 산업에서 매우 중요하다. 원하는 생성물의 양이나 반응 시간 등을 최적의 상태로 하기 위하여, 반응기에 주입되는 유량 및 시간에 따른 유량 변화 프로파일을 구하는 과정이 필요한데, 이를 위하여 여러 가지 형태의 방법들이 제안되어 왔다. 그러나 수학적으로는 Maximum Principle(MP)을 사용하는 것을 피할 수 없으며, 풀려고 하는 문제가 복잡해지면 수식뿐 아니라, 반응 시스템 자체에 대한 이해가 필요하게 된다. 이것은 optimal control 에서 발생하는 bang-singular의 모습 때문이다. 생물 반응기의 경우, Lim 등의 방법이 제일 이론적이고 상세하게 서술되어 있다. Lim 등은 수학적으로는 Maximum Principle을 사용하였고, 생물학적으로 정형화된 몇 가지 제어 형태를 정립하여 사용하였다.

반응기의 상태 방정식이 간단한 형태인 경우, 최적 프로파일은 수치 해석적인 반복 연산 방법을 사용하지 않고도 간단히 해석적인 방법으로 구하여 진다. 그러나 대부분의 경우, 컴퓨터에 의존하게 되며, 이때 수식의 경계조건이 반응 시작과 끝에 대해 주어지는 이점 경계치 문제를 푼다든지, bang-singular 모양의 switching 시간을 구하는 것은 컴퓨터로도 쉽지 않다. 따라서 해당 반응기와 반응물에 대해 최상의 이해도를 가진 전문가에게 의존하거나 아니면 많은 시행 착오를 거친 후에야 가능할 것이다.

이 논문에서는 Maximum Principle을 사용하지 않고 optimal control 프로파일 구하는 일을 genetic algorithm (GA)을 이용하여 수행하였다. 또한 보통의 GA에서 보이는 최종 수렴 지연 현상을 극복하고 제어 프로파일을 곡선의 모양으로 만들기 위해 fuzzy GA (FGA)가 제시되었다.

#### 2. 최적화 문제

우리가 다루는 비선형 모델 방정식의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (1)$$

여기서  $x$ 는  $n$ 차원의 상태 변수 벡터이고,  $u$ 는 제어 변수이다.  $u$ 를 변화시켜 최적해를 구하는 목적 함수는 다음의 식 (2)를 최대화하는 것이다.

$$I(u(t)) = G(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u) dt \quad (2)$$

제어되는 변수  $u$ 는 다음 범위 속의 값을 갖는다.

$$u_* \leq u \leq u^* \quad (3)$$

##### 2.1 Maximum Principle

위 문제를 Maximum Principle로 해결하려면 먼저 Hamiltonian 이 다음과 같이 정의된다.

$$H = F(x, u) + \lambda^T f(x, u) \quad (4)$$

여기서  $\lambda$ 는 Lagrange multiplier로서 시간의 함수이고, 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (5)$$

최적의  $u(t)$  profile은 다음과 같이 구하여진다.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} > 0, \quad u &= u^* \\ 2. \quad \frac{\partial H}{\partial u} < 0, \quad u &= u_* \\ 3. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad u &= u_s(t) \end{aligned} \quad (6)$$

##### 2.2 sensitivity analysis

제어되는 변수가 최적해에 미치는 sensitivity에 대한 분석은 다음과 같다. 먼저  $(x^*, u^*)$ 가 위의 식(4)에서  $\nabla H(x, u) = 0$ 을 만족한다고 하면, 이점에서 Taylor 확장으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta H(x^*, u^*) = \frac{1}{2} [\delta x^T \delta u^T] [A] \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} H & \nabla_{xu} H \\ \nabla_{xu} H & \nabla_{uu} H \end{bmatrix}$$

이고,

$$\delta H(x, u) = \frac{1}{2} \delta u^T [\nabla_{uu} H] \delta u$$

는 최적 프로파일로부터 벗어난 것에 대한 평가를 말해준다.

## 2.2 퍼지 유전 알고리즘

위에서처럼 Maximum Principle을 사용하여  $u$ 에 대한 최적 profile을 찾는 일은 식 (1)과 (5)를 동시에 풀어야 하는 두 점 경계값 문제가 되어 일반 해석적인 방법으로는 풀기 어렵고, 수치 해석적인 방법으로도 시행 착오를 계속하는 반복 연산 방법을 사용하여야 한다. 이러한 반복 연산 과정 속에는 식 (6)에서와 같은 세 구간들이 어떤 순서로 배열되는 지를 결정하는 일도 포함된다. 이 논문에서는 유전 알고리즘을 이용해 위 문제를 풀기 위하여  $u(t)$ 를 시간에 대하여 세분하였고, 식 (3)과 같은 범위 속의  $u(t_i)$  값이 유전 알고리즘의 각 세대를 거치면서 개선 되도록 하였다. 이때  $u(t)$ 의 프로파일에 진동 현상이 일어날 수 있는데, 이것은 다음과 같은 fuzzy rule을 도입하였다. 진동 정도 또는 거칠기를  $s$ 라고 하고, 그에 따라 제거해야되는 돌출 제어 행동의 개수를  $y$ 라고 하면

IF  $s$  is A, then  $y$  is B.

여기서 A는  $s$ 의 정도로서 그림 1과 같이 나타내어지고, B는 제어 개수로서 그림 2와 같이 나타내어진다. 즉, 그림 1과 그림 2는 Fuzzy GA에서 사용한 fuzzy 규칙이다.

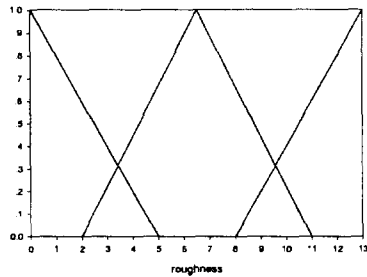


그림 1 fuzzy 규칙 - 전건부

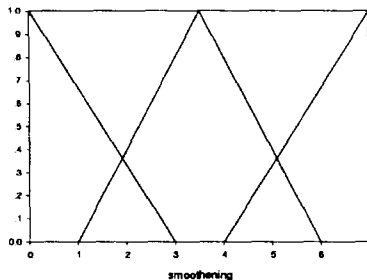


그림 2 fuzzy 규칙 - 후건부

## 3. 전산 모사

다음과 같은 간단한 반응식이 있다

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(u + \frac{1}{2} u^2) x_1, & x_1(0) &= 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u x_1, & x_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 최적화 목표는  $x_2(t_f)$ 를 최대화하는  $u(t)$ 를 구하는 것이다. 목적 함수는 식 (8)과 같다

$$I(u(t)) = x_2(t_f) \quad (8)$$

Hamiltonian과 그 미분은 다음과 같이 구해진다.

$$H = -\lambda_1 (u + \frac{1}{2} u^2) x_1 + \lambda_2 u x_1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1 (1 + u) x_1 + \lambda_2 x_1 \quad (10)$$

adjoint 시스템인  $\lambda$ 에 대한 식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\lambda_1 (u + \frac{1}{2} u^2) + \lambda_2 u, & \lambda_1(t_f) &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= 0, & \lambda_2(t_f) &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

이 문제는 singular 제어가 있을 후에  $u^*$ 에 의한 제어가 있고, 해석적인 방법으로 해를 구할 수 있다. singular 제어가 끝나는 시간을  $t^*$ 라고 하면 이 값은 다음 식 (12)로부터 구해지고 두 구간에서의 상태 방정식은 식 (13), (14)와 같다.

$$t^* = 1 + \frac{1}{u^* + 0.5 u^{*2}} \ln\left(\frac{0.5 u^*}{1 + u^*}\right) \quad (12)$$

구간  $t \in [0, t^*]$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(u + \frac{1}{2} u^2) x_1, & x_1(0) &= 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u x_1, & x_2(0) &= 0 \\ \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2} (u^3 + u^2), & u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (13)$$

구간  $t \in [t^*, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(u^* + \frac{1}{2} u^{*2}) x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u^* x_1 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $u_0$ 는 다음 식 (15)로 부터 구하여 지는 값이다.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+u_0}{u_0}\right) - \frac{1}{u_0} &= C_1 \\ C_1 &= -0.5 - \frac{1}{u^*} + \ln\left(\frac{1+u^*}{u^*}\right) - \frac{\ln\frac{u^*}{2(1+u^*)}}{u^*(2+u^*)} \end{aligned} \quad (15)$$

이와 같이 해석적인 방법으로 구하는 것을 Direct substitution 방법이라 하고, 그림 3은 이렇게 구한 값과 sensitivity analysis를 통하여 결과에 오차 1% 이하의 영향을 주는 구간을 나타내었다. 이 그래프에서  $u$ 의 값은  $0 \leq u \leq 4$  이다. 이 경우 해석적으로 구한  $x_2(t_f)$ 의 값은 0.57228이다.

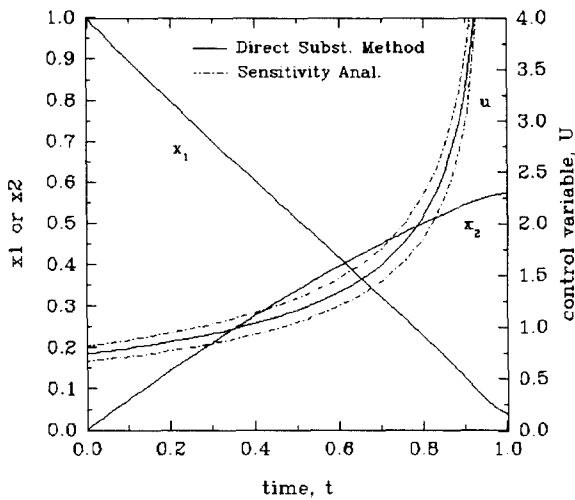


그림 3 해석적으로 구한 해와 sensitivity 분석에 의해 오차 1% 구간

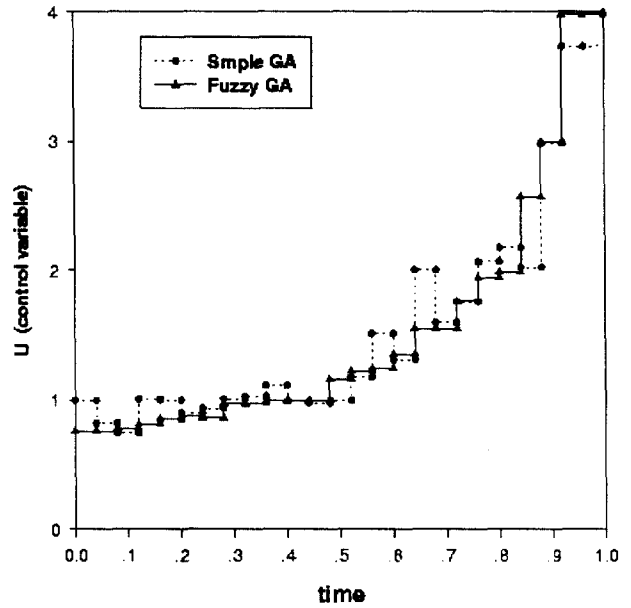


그림 5 GA와 Fuzzy GA의 결과 비교 - profile의 모습

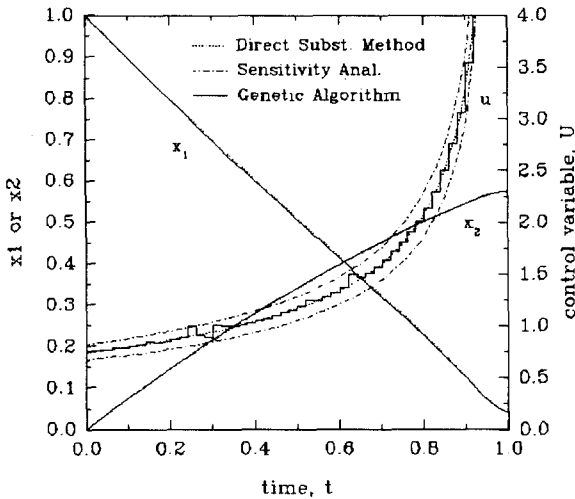


그림 4 Simple GA의 결과

그림 4에서는 50개의 조각으로 이루어진 제어변수를 사용하였고, 반복연산 횟수는 수만 번으로 한 GA의 결과를 보여준다. Fuzzy GA의 결과는 그림 5와 그림 6에서 나타내었다. 여기서의 GA는 25개의 조각으로 이루어진 제어변수를 사용하였고, 연산 횟수는 수백 번으로 하였다. 그림 5는 simple GA와 Fuzzy smoothening 기법을 사용하여 얻은 각각의 control profile이다. 그림 6에서는 fitness value가 수렴해 나가는 과정을 보여준다. 이 두 그림에서는 Fuzzy GA가 simple GA에 비해 제어 변수의 프로파일의 모양도 좋을 뿐 아니라, 수렴속도도 빠른 것을 알 수 있다.

이 그림들은 singular 제어 구간과  $u_{max}$  제어 구간의 구분이 없이 각 구간의 제어 변수 값을 가지고 수행한 유전 알고리즘이 결과적으로 Maximum Principle과 같은 해석적인  $u$  프로파일을 모사할 수 있음을 보여준다.

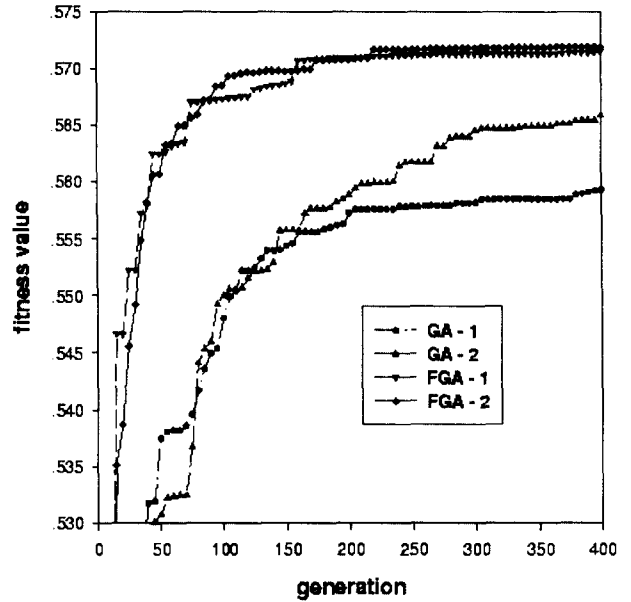


그림 6 GA와 Fuzzy GA의 비교 - 수렴속도

#### 4. 결론

optimal control은 대개의 문제의 경우, 해석적인 풀이가 불가능하다. 그래서 수치 해석적인 방법으로 접근한다. 또한 두 점 경계값 문제와, 예상되는 일련의 제어 구조 조합을 같이 풀어나가는 과정은 많은 반복 연산을 필요로 한다.

예제의 결과를 보면 유전 알고리즘은 이 문제에 최대값 제어 구간이 있는 지도 모르는 상태에서 제어 프로파일을 찾았다. 구한 답은 1%이하의 오차를 가진다. 반면에 Maximum Principle을 사용하여 문제를 푸는 것은 비록 정확한 답을 구할 수 있다고 하지만 그 과정에는 시스템에 대한 정확한 이해가 앞서야 한다.

유전 알고리즘은 이러한 문제의 특성에 상관없이 제어 프로

파일을 구한다는 점에서 Maximum Principle에 비해 장점이 된다. 즉, 유전 알고리즘은 제어 구조 조합을 결정하는 일부러 진화 연산이 적용되어 시스템에 대한 깊은 이해가 있기 이전에 사용 가능하다. 유전 알고리즘으로부터 구하여진 답은 Maximum Principle을 사용하여 얻은 답과 큰 차이를 보이지 않는다는 점에서, 유전 알고리즘은 optimal control의 프로파일을 구하는 다른 해법이라고 제안한다.

유전 알고리즘으로 얻어진 답이 심한 진동을 보일 수 있는데, 이것은 smoothing 기법으로 fuzzy 알고리즘을 사용함으로써 개선하였다. fuzzy 규칙은 시스템에 따라 여러 가지를 결합하여 사용할 수가 있도록 확장하는 것이 용이하다.

## 5. 감사의 글

본 연구에 재정적 지원을 준 포항공대의 공정산업의 지능 자동화 연구센터에 감사드립니다.

## 6. 참고 문헌

1. H. C. Lim et. al., "Computational Algorithms for Optimal Feed Rates for a Class of Fed-Batch Fermentation: Numerical Results for Penicillin and Cell Mass Production", *Biotech. and Bioeng.*, Vol. XXVIII, Pp. 1408- 1420 (1986)
2. D. E. Goldberg, "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison-Wesley, 1989.
3. Z. Michalewicz, "Genetic Algorithms + Data Structure = Evolution Programs", 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.
4. E. B. Lee and L. Markus, "Foundations of Optimal Control", Wiley, New York, 1973.
5. J. W. Eaton and J. B. Rawlings, "Feedback control of Chemical Processes Using On-line Techniques", *Computers and Chemical Engineering*, Vol.14, 4/5, Pp. 469- 470, 1990.