Proceedings of the 12th KACC, October 1997

상태와 제어입력에 시간지연을 가지는 선형 시스템의 출력궤환 H^∞ 제어

Output Feedback H^∞ Control for Linear Systems with Delayed State and Control Input

°정은태*, 권성하*, 이상경**, 박홍배**

* 창원대학교 제어계측공학과(Tel : +82-551-79-7557; Fax : +82-551-62-5064; E-mail : jet26@sarim.changwon.ac.kr)

** 경북대학교 전자전기공학부(Tel : +82-53-950-5548; Fax : +82-53-950-5505; E-mail : hbpark@ee.kyungpook.ac.kr)

Abstracts This paper presents an H^∞ controller design method for linear time-invariant systems with delayed state and control. Using the second method of Lyapunov, the stability for delayed systems is discussed. For delayed systems, we derive a sufficient condition of the bounded real lemma(BRL) which is similar to BRL for nondelayed systems. And the sufficient conditions for the existence of an output feedback H^∞ controller of any order are given in terms of three linear matrix inequalities(LMIs). Futhermore, we briefly explain how to construct such controllers from the positive definite solutions of their LMIs and give a simple example to illustrate the validity of the proposed design procedure.

Keywords Time-delay, H^∞ control, Output feedback, BRL, LMI

1. 서론

대부분의 시스템에는 모델링오차나 불확실성을 포함하고 있으므로 이러한 시스템에 대한 H^∞ 제어이론이 1980년대 초부터 많은 관심을 받아 왔다. 1989년 Doyle 등[3]은 상태공간에서 Riccati 방정식을 기초로 하여 H^∞ 제어기 설계에 대한 효과적인 방법을 제안하였다. 그들은 H^∞ 제어기가 존재할 필요충분조건을 두개의 Riccati 방정식과 spectral radius 조건으로 나타내었고, 모든 H^∞ 제어기를 Riccati 부등식의 안정화 해를 이용하여 매개변수화하였다. 상태공간에서 H^∞ 제어기 설계를 위한 다른 접근은 선형 행렬부등식(LMI: linear matrix inequality)을 이용한 방법이 있다. Gahinet 등[4]과 Iwasaki 등[5]은 선형 행렬부등식을 기초로 하여 일반 H^∞ 제어문제를 다루었다. 그들은 일반 H^∞ 제어문제에서 H^∞ 제어기가 존재할 필요충분조건을 세개의 선형 행렬부등식으로 나타내었고, 모든 H^∞ 제어기를 선형 행렬부등식의 양정의(positive definite) 해를 이용하여 매개변수화하였으며 선형 행렬부등식의 해를 이용하여 제어기의 차수를 결정하였다.

대부분의 H^∞ 제어문제는 시간지연이 없는 시스템에 관한 것이었지만, 시간지연이 폐루프 시스템을 불안정하게 만드는 요인이 될 수 있으므로 시간지연 시스템에 대한 H^∞ 제어문제도 최근에 상당한 관심을 받고 있다. Petersen 등[10]이 제시한 상태궤환 H^∞ 제어기 설계기법을 기초로 하여, Lee 등[7]은 상태에 시불변 시간지연이 있는 시스템에 대한 상태궤환 H^∞ 제어기를 설계하였고, Choi 등[2]과 정 등[11]은 상태와 입력에 시불변 시간지연이 있는 시스템으로 확장하여 상태궤환 H^∞ 제어기를 설계하였다. 그들은 각각 Riccati 방정식과 선형 행렬부등식을 이용하여 시간지연 시스템이 지연시간의 크기에는 관계없이 점근적으로 안정함을 판별하였다. 그리고 Jeung 등[6]은 Gahinet 등[4]과 Iwasaki 등[5]이 제시한 선형 행렬부등식을 기초로 하여, 상태에 시변 시간지연을 가지는 시스템에 대한 출력궤환 H^∞ 제어기를 설계하였다.

본 논문에서는 상태와 제어입력에 시불변 시간지연을 가지는 시스템에 대하여 Choi 등[2]과 정 등[11]의 결과를 출력궤환으로 확장한다. Lyapunov 함수를 이용하여 시간지연을 가지는 폐루프 시스템이 지연시간의 크기에는 관계없이 점근적으로 안정함을 Riccati 부등식 혹은 선형 행렬부등식으로 나타내고, 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하고 H^∞-노옴이 γ보다 작다는 BRL(bounded real lemma)의 충분조건을 Riccati 부등식 혹은 선형 행렬부등식으로 제시한다. 그리고 선형 행렬부등식을 이용하여 시불변 시간지연 시스템에 대하여 출력궤환 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건을 제시한다. 특히, 출력궤환 H^∞ 제어문제에서는 선형 행렬부등식을 만족하는 양정의 행렬을 이용하여 제어기의 차수를 결정할 수 있음을 보이고, 제어기 설계 알고리듬을 제시한다.

2. 문제 설정

상태와 입력에 시불변 시간지연을 가지는 시스템

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_{d_1}x(t-d_1) + B_1 w(t) \\
&\quad + B_2 u(t) + B_{d_2} u(t-d_2) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) \\
x(t) &= 0, \quad t \le 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

을 고려한다. 여기서 $x(t) \in \mathrm{R}^n$는 상태, $w(t) \in \mathrm{R}^l$는 제곱적분 가능한 외란, $u(t) \in \mathrm{R}^m$는 제어입력, $z(t) \in \mathrm{R}^p$는 제어하고자 하는 출력, $y(t) \in \mathrm{R}^q$는 측정출력이다. 모든 행렬은 적절한 차원을 가지는 상수행렬이고, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$는 지연시간이다. 시간지연 시스템 (1)에 출력궤환 H^∞ 제어기

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A_K\xi(t)+B_Ky(t)\\ u(t) &= C_K\xi(t)+D_Ky(t)\end{aligned} \tag{2}$$

를 적용하였을때, 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= A_{cl}\eta(t)+A_{cl_1}\eta(t-d_1)+A_{cl_2}\eta(t-d_2)\\ &\quad +B_{cl}w(t)+B_{cl_2}w(t-d_2)\\ z(t) &= C_{cl}\eta(t)+D_{cl}w(t)\end{aligned} \tag{3}$$

이며, 여기서

$$\begin{aligned}&\eta(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix}, && A_{cl}=\begin{bmatrix}A+B_2D_KC_2 & B_2C_K\\ B_KC_2 & A_K\end{bmatrix},\\ &A_{cl_1}=\begin{bmatrix}A_{d_1} & 0\\ 0 & 0_k\end{bmatrix}, && A_{cl_2}=\begin{bmatrix}B_{d_2}D_KC_2 & B_{d_2}C_K\\ 0 & 0_k\end{bmatrix},\\ &B_{cl}=\begin{bmatrix}B_1+B_2D_KD_{21}\\ B_KD_{21}\end{bmatrix}, && B_{cl_2}=\begin{bmatrix}B_{d_2}D_KD_{21}\\ 0_{k\times l}\end{bmatrix},\\ &C_{cl}=[\,C_1+D_{12}D_KC_2\ \ D_{12}D_K\,], && D_{cl}=D_{11}+D_{12}D_KD_{21}\end{aligned} \tag{4}$$

이다. 시간지연 시스템에 대한 출력궤환 H^∞ 제어문제는 폐루프 시스템 (3)이 점근적으로 안정하고 $w(t)$에서 $z(t)$까지의 H^∞-노옴이 주어진 $\gamma>0$보다 작게 하는 출력궤환 제어기 (2)를 찾는 것이다. 즉, 제어기의 변수 A_K, B_K, C_K와 D_K를 결정하는 문제이다. 따라서 제어기의 변수들을

$$K:=\begin{bmatrix}D_K & C_K\\ B_K & A_K\end{bmatrix} \tag{5}$$

와 같이 하나의 행렬로 표현하면, 폐루프 시스템 (3)의 행렬들은

$$\begin{aligned}&A_{cl}=A_{00}+B_{00}KC_{00},\\ &A_{cl_1}=A_{10}E_{10}, && A_{cl_2}=B_{20}E_{20}KC_{00},\\ &B_{cl}=B_{10}+B_{00}KD_{20}, && B_{cl_2}=B_{20}E_{20}KD_{20},\\ &C_{cl}=C_{10}+D_{10}KC_{00}, && D_{cl}=D_{11}+D_{10}KD_{20}\end{aligned} \tag{6}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned}&A_{00}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0_k\end{bmatrix},\ A_{10}=\begin{bmatrix}A_{d_1}\\ 0_{k\times n}\end{bmatrix},\\ &B_{00}=\begin{bmatrix}B_2 & 0\\ 0 & I_k\end{bmatrix},\ B_{10}=\begin{bmatrix}B_1\\ 0_{k\times l}\end{bmatrix},\ B_{20}=\begin{bmatrix}B_{d_2}\\ 0_{k\times m}\end{bmatrix},\\ &C_{00}=\begin{bmatrix}C_2 & 0\\ 0 & I_k\end{bmatrix},\ C_{10}=[\,C_1\ \ 0_{p\times k}\,],\\ &D_{10}=[\,D_{12}\ \ 0_{p\times k}\,],\ D_{20}=\begin{bmatrix}D_{21}\\ 0_{k\times l}\end{bmatrix},\\ &E_{10}=[\,I_n\ \ 0_{n\times k}\,],\ E_{20}=[\,I_m\ \ 0_{m\times k}\,]\end{aligned} \tag{7}$$

이다. (7)은 단지 시간지연 시스템 (1)의 행렬들로 구성되어 있고, (6)의 폐루프 시스템 행렬들은 제어기 행렬 K의 affine 형태이다. 이러한 제어기 행렬 K를 구하는 방법을 다루기 전에, 본 논문에서 자주 사용되는 행렬부등식과 선형 행렬부등식에 관한 잘 알려진 결과들을 살펴본다.

보조정리 1[15],[18] 임의의 대칭행렬 $L=\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{12}^T & L_{22}\end{bmatrix}$에 대하여, 다음은 서로 등가이다.

1) $L<0$,
2) $L_{11}<0,\quad L_{22}-L_{12}^TL_{11}^{-1}L_{12}<0$,
3) $L_{22}<0,\quad L_{11}-L_{12}L_{22}^{-1}L_{12}^T<0$.

보조정리 2[11],[4],[5] 대칭행렬 Ψ와 적절한 차원을 가지는 Π와 Θ에 대해서,

$$\Psi+\Pi K\Theta^T+\Theta K^T\Pi^T<0$$

을 만족하는 K가 존재할 필요충분조건은

$$\Pi_\perp^T\Psi\Pi_\perp<0,\quad \Theta_\perp^T\Psi\Theta_\perp<0$$

이다.

3. 시간지연 시스템에 대한 BRL의 충분조건

이 장에서는 폐루프 시스템 (3)이 시간지연에 관계없이 점근적으로 안정할 충분조건과 폐루프 시스템의 H^∞-노옴이 γ보다 작거나 같을 충분조건을 제시한다.

보조정리 3 모든 시간 t에 대해서, $w(t)=0$인 폐루프 시스템 (3)을 고려한다. Riccati 부등식

$$\begin{aligned}&A_{cl}^TP+PA_{cl}+E_{10}^TQ_1E_{10}+C_{00}^TK^TE_{20}^TQ_2E_{20}KC_{00}\\ &\quad +PA_{10}Q_1^{-1}A_{10}^TP+PB_{20}Q_2^{-1}B_{20}^TP<0\end{aligned} \tag{8}$$

을 만족하는 양정의 행렬 P, Q_1, Q_2가 존재하면, 폐루프 시스템 (3)은 지연시간에 관계없이 점근적으로 안정하다.

증명 지면관계상 증명은 생략. ■

보조정리 3은 시간지연에 무관하게 시간지연 시스템의 안정성 판별을 Riccati 부등식을 만족하는 양정의 행렬 P, Q_1, Q_2의 존재성으로 나타낸 것이다. 그리고 보조정리 3은 여러개의 시간지연을 가지는 시스템으로 쉽게 확장 가능하다.

보조정리 4 폐루프 시스템 (3)을 고려한다. $\sigma_{\max}(D_{cl})<\gamma$을 가정하고 Riccati 부등식

$$\begin{aligned}&A_{cl}^TP+PA_{cl}+PA_{10}Q_1^{-1}A_{10}^TP+E_{10}^TQ_1E_{10}+\gamma^{-2}C_{cl}^TC_{cl}\\ &+(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})(I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})^T\\ &+PB_{20}Q^{-1}B_{20}^TP+PB_{cl_2}(I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}B_{cl_2}^TP\\ &+[\,C_{00}^T+(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})(I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}D_{20}^T]K^TE_{20}^TQE_{20}\\ &\times K[\,C_{00}^T+(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})\times(I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}D_{20}^T]^T<0\end{aligned} \tag{9}$$

을 만족하는 양정의 행렬 P, Q_1, Q_2가 존재한다고 가정한다. 여기서

$$Q=[\,Q_2^{-1}-E_{20}KD_{20}(I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}\times D_{20}^TK^TE_{20}^T]^{-1}>0 \tag{10}$$

이다. 이때

1) 폐루프 시스템 (3)은 시간지연에 관계없이 점근적으로 안정
2) $\|T_{zw}(j\omega)\|_\infty\le\gamma$

을 만족한다. 여기서

$$\begin{aligned}T_{zw}(j\omega) &= D_{cl}+C_{cl}(j\omega-A_{cl}-A_{cl_1}e^{-j\omega d_1}\\ &\quad -A_{cl_2}e^{-j\omega d_2})^{-1}(B_{cl}+B_{cl_2}e^{-j\omega d_2})\end{aligned} \tag{11}$$

이다.

증명 지면관계상 증명은 생략. ■

4. 출력궤환 H^∞ 제어기의 존재조건

이 장에서는 보조정리 4를 기초로 하여 출력궤환 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬부등식으로 나타내고, 출력궤환 H^∞ 제어기 설계 알고리듬을 제시한다.

보조정리 1을 이용하여, $\sigma_{\max}(D_{cl}) < \gamma$을 만족하고 (9)와 (10)을 만족하는 양정의 행렬 P, Q_1, Q_2가 존재할 필요충분조건은 선형 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^TP+PA_{cl} & C_{00}^TK^TE_{20}^T & PB_{cl} & C_{cl}^T & PA_{10} & PB_{20} & E_{10}^T \\ E_{20}KC_{00} & -Q_2^{-1} & E_{20}KD_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{cl}^TP & D_{20}^TK^TE_{20}^T & -\gamma I & D_{cl}^T & 0 & 0 & 0 \\ C_{cl} & 0 & D_{cl} & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ A_{10}^TP & 0 & 0 & 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_2 & 0 \\ E_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

을 만족하는 양정의 행렬 P가 존재하는 것이다. 등가적으로 (7)을 (12)에 대입하면

$$\Psi + \Sigma\Pi K\Theta^T + \Theta K^T\Pi^T\Sigma^T < 0 \tag{13}$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} \Sigma &= diag\{P,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I\}, \\ \Pi &= [B_{00}^T\ \ E_{20}^T\ \ 0\ \ D_{10}^T\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T, \\ \Theta &= [C_{00}\ \ 0\ \ D_{20}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T \end{aligned} \tag{14}$$

이고

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_{00}^TP+PA_{00} & 0 & PB_{10} & C_{10}^T & PA_{10} & PB_{20} & E_{10}^T \\ 0 & -Q_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{10}^TP & 0 & -\gamma I & D_{11}^T & 0 & 0 & 0 \\ C_{10} & 0 & D_{11} & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ A_{10}^TP & 0 & 0 & 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_2 & 0 \\ E_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^{-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

이다. 보조정리 2로부터 행렬부등식 (15)를 만족하는 K가 존재할 필요충분조건은

$$\Pi^T\Sigma^{-1}\Psi\Sigma^{-1}\Pi < 0, \tag{16}$$

$$\Theta^T\Psi\Theta < 0 \tag{17}$$

을 만족하는 것이다. 수식의 간편성을 위해서 P와 P^{-1}를

$$P=\begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & ? \end{bmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} X & M \\ M^T & ? \end{bmatrix} \tag{18}$$

와 같이 둔다. 여기서 $X, Y \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $M, N \in \mathbf{R}^{n\times k}$이고, ?는 관심없는 부분이다. 그리고

$$\overline{\Pi} := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_2^T & -D_{12}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \overline{\Theta} := \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$\overline{X} := \begin{bmatrix} XA^T+AX & 0 & XC_1^T & B_1 & A_{d_1} & B_{d_2} & X \\ 0 & -Q_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1X & 0 & -\gamma I & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ B_1^T & 0 & D_{11}^T & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ A_{d_1}^T & 0 & 0 & 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ B_{d_2}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_2 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^{-1} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\overline{Y} := \begin{bmatrix} A^TY+YA & YB_1 & C_1^T & YA_{d_1} & YB_{d_2} & I \\ B_1^TY & -\gamma I & D_{11}^T & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ A_{d_1}^TY & 0 & 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ B_{d_2}^TY & 0 & 0 & 0 & -Q_2 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^{-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

을 정의한다. 여기서 $[U_1^T\ U_2^T]^T$는 $[C_2\ D_{21}]^T$의 직교보이다. (16)과 (17)의 조건을 이용하여, 시간지연을 가지는 시스템 (1)에 대한 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건을 정리 2에 세개의 선형 행렬부등식으로 나타낸다.

정리 1 $[U_1^T\ U_2^T]^T$를 $[C_2\ D_{21}]^T$의 직교보라 두었을때, 선형 행렬부등식

$$\overline{\Pi}^T\,\overline{X}\,\overline{\Pi} < 0, \tag{22}$$

$$\overline{\Theta}^T\,\overline{Y}\,\overline{\Theta} < 0, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \tag{24}$$

을 만족하는 양정의 행렬 Q_1, Q_2, X와 Y가 존재하면, 시간지연 시스템 (1)에 대한 H^∞ 제어기가 존재한다. 더우기 (22)-(24)를 만족하는 양정의 행렬 X와 Y에 대해서

$$Rank(I-XY) = k < n \tag{25}$$

을 만족하는 X와 Y가 존재하면, 차수가 k인 H^∞ 제어기가 존재한다.

증명 지면관계상 증명은 생략. ■

정리 1은 시간지연 시스템 (1)에 대한 H^∞ 제어기를 찾은 것이 아니라 제어기가 존재할 충분조건을 제시한 것이다. H^∞ 제어기를 얻기 위해서, 세개의 선형 행렬부등식 (22)-(24)를 만족하는 양정의 행렬 X, Y, Q_1, Q_2를 찾아야 한다. 그러나 (22)와 (23)은 X와 Y에 대해서는 선형 행렬부등식이지만, Q_1과 Q_2에 대해서는 선형 행렬부등식이 아니기 때문에, 세개의 선형 행렬부등식 (22)-(24)를 만족하는 양정의 행렬 X, Y, Q_1, Q_2를 동시에 찾을 수 있는 알고리듬은 없다. 따라서 양정의 행렬 Q_1과 Q_2를 적절히 선정한 후, (22)-(24)를 만족하는 해 (X, Y)를 찾는다. 그리고 (18)로부터

$$MN^T = I - XY \tag{26}$$

와 같은 관계를 얻을 수 있고, (22)-(24)를 만족하는 해 (X, Y)를 (26)에 대입하여 (26)을 만족하는 풀열계수(full-column-rank) 행렬 $M, N \in \mathbf{R}^{n\times k}$을 구한다. 그 다음에 선

형방정식

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \tag{27}$$

으로부터 유일한 해 P를 얻을 수 있다. Y가 양정의 행렬이고 M이 풀열계수일때, (27)은 항상 풀려질 수 있다[9]. (13)은 K에 대해서 선형 행렬부등식이므로, (27)의 해 P를 (13)에 대입하여 (13)을 만족하는 어떠한 행렬 K도 (1)과 같은 시간지연 시스템에 대한 출력궤환 H^∞ 제어기가 될 수 있다.

5. 예제

이 장에서는 예제를 통하여 제시한 결과들을 검증한다. 시불변 시간지연을 가지는 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-d_1) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-d_2) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ \ 3]\, x(t) + w(t) \\ x(t) &= 0, \quad t \le 0 \end{aligned} \tag{28}$$

을 고려한다. 제어 목적은 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하고 H^∞-노옴이 3이하(즉, $\gamma=3$)가 되도록 제어기를 설계하는 것이다. $Q_1 = I_2$, $Q_2 = 0.1$로 두고, (22)-(24)를 만족하는 양정의 행렬 X와 Y는

$$X = \begin{bmatrix} 1.0287 & -0.0592 \\ -0.0592 & 0.4381 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3.2347 & 2.2358 \\ 2.2358 & 4.3184 \end{bmatrix} \tag{29}$$

이고 (26)을 만족하는 해들 중의 한 쌍은

$$M = \begin{bmatrix} -0.9412 & -0.3379 \\ -0.3379 & 0.9412 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2.3326 & 0 \\ 2.1810 & -0.0241 \end{bmatrix} \tag{30}$$

이다. (27)을 만족하는 양정의 행렬 P는

$$P = \begin{bmatrix} 3.2347 & 2.2358 & 2.3326 & 0 \\ 2.2358 & 4.3184 & 2.1810 & -0.0241 \\ 2.3326 & 2.1810 & 2.4133 & -0.0022 \\ 0 & -0.0241 & -0.0022 & 0.0104 \end{bmatrix} \tag{31}$$

이고 (13)을 만족하는 H^∞ 제어기 행렬 중의 하나는

$$K = \left[\begin{array}{c|c} D_K & C_K \\ \hline B_K & A_K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} -2.2691 & -2.4114 & -0.0618 \\ \hline -0.6655 & -2.0202 & 0.0205 \\ 5.2817 & -1.1367 & -18.3623 \end{array} \right] \tag{32}$$

이다.

6. 결론

본 논문에서는 상태와 입력에 시불변 시간지연을 가지는 시스템에 대하여 출력궤환 H^∞ 제어기를 설계하였다. H^∞ 제어문제를 다루기 위해, 시간지연 시스템의 BRL의 충분조건을 제시하였고, 이러한 BRL를 만족하는 양정의 행렬은 시간지연이 없는 시스템의 BRL를 만족하기 때문에 기존의 BRL를 타당성 있게 시간지연 시스템으로 확장한 것이다. 그리고 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건을 세개의 선형 행렬부등식으로 제시하였고, 더우기 출력궤환 H^∞ 제어기의 차수는 선형 행렬부등식의 해로부터 결정할 수 있었다. 또한, 출력궤환 H^∞ 제어기를 설계하는 알고리듬을 간략하게 설명하였다. 그리고 예제를 통하여 제시한 이론의 타당성을 보였다.

참고문헌

[1] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[2] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H_∞ controller design method for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 31, no. 6, pp. 917-919, 1995.

[3] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug. 1989.

[4] P. Gahinet and P. Apkarian, "An LMI-based parametrization of all H_∞ contro- llers with applications," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 656-661, Dec. 1993.

[5] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1307-1317, 1994.

[6] E. T. Jeung, J. H. Kim, and H. B. Park, "H^∞ output feedback controller design for linear systems with time-varying delayed state," will be published in *IEEE Automatic Control*, 1996.

[7] J. H. Lee, S. W. Kim, and W. H. Kwon, "Memoryless H^∞ controllers for state delayed systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 159-162, Jan. 1994.

[8] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, Systems and Control Series, vol. 9, North-Holland, 1987.

[9] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker, "A collection of robust control problems leading to LMI's," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 1245-1250, Dec. 1991.

[10] I. R. Petersen, "Disturbance attenuation and H^∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 32, no. 5, pp. 427-429, May 1987.

[11] 정은태, 이갑래, 이재명, 박홍배, "시간지연을 가지는 선형 시스템에 대한 상태궤환 H^∞ 제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템 공학회 논문지, 제 2권 1호, pp. 1-4, 3월 1996.