

시변 선형 시스템의 웨이브렛망 근사화와 가중치의 학습

Wavelet Network Approximation and Coefficient Learning of Linear-Time-Varying System

°이영석*, 김동욱**, 이인수***, 서보혁**

*영진전문대학 전기과(Tel:+082-53-940-5240;E-mail:lys9@palgong.kyungpook.ac.kr)

**경북대학교 전자전기공학부(Tel:+082-53-950-5604;E-mail:kdo@palgong.kyungpook.ac.kr)

***상주산업대학교 전자전기공학과(Tel:+082-582-30-5324;E-mail:islee@samback.sangju.ac.kr)

Abstract - This paper discusses approximation modelling of discrete-time linear time-varying system(LTVS). The wavelet transform is considered as a tool for representing and approximating a LTVS. The joint time-frequency properties of wave analysis are appropriate for describing the LTVS. Simulation results is included to illustrate the potential application of the technique.

keywords - Wavelet transform, System identification, LMS adaptive algorithm

1. 서 론

최근 수년간 웨이브렛 이론[7,8]은 많은 공학 분야에 응용이 되고 있다. 특히 신호처리[4], 영상처리를 필요로 하는 곳에서는 그 유용성이 입증되고 있다. 이러한 접목에 힘입어 많은 시스템 연구자들은 웨이브렛 이론을 시스템이론과 접목을 시도 하고 있으며 특히 시스템의 모델링에 많은 관심이 쏠리고 있으며 많은 연구 결과가 발표되고 있다.

선형 시불변 시스템의 모델링에 있어서 많은 연구가 있어 왔다. 특히 적응 기법에 기인한 여러 방법들이 발표 되었으며 선형 시스템에 이용되고 있으며 시변 시스템이나 비선형 시스템의 해석에 있어서도 선형화의 기법을 이용해서 해석을 시도 하여 새로운 기법이 발표 되고 있으며 이에대한 결과도 많이 이용되고 있다. 그러나 모델링 오차가 항상 존재하게 되며 이러한 오차를 줄일 수 있는 여러 수학적 기법이 연구 되고 있다.

시변 선형 시스템의 해석에 있어서 선형 시스템의 해석 기법으로는 시변성에 대한 보상이 없기 많은 오차를 가지게 된다. 이러한 시변이 있는 시스템의 해석에 푸리에 변환과 같은 수학적 기법이 동원 되었다.

본 논문에서는 시변 선형 시스템의 모델링을 푸리에 변환의 특성을 가지면서 다해상도 해석이 가능한 웨이브렛 시리즈 기법[2,10]을 이용하여 시스템의 임펄스 리스펀스(impulse response)의 근사화를 이루며, 이러한 웨이브렛 표현을 행렬 계산의 형태로 표현이 가능하고 행렬 표현에서의 계수행렬을 웨이브렛망[9]의 가중치 행렬로 나타낼 수 있다. 그러면 근사

화의 결과를 웨이브렛망(Wavelet Network)으로 표현이 가능하게 되며, 웨이브렛 계수의 선정에 있어서 웨이브렛망을 출력 오차로부터 계수 행렬을 적절한 값으로 수렴시키는 학습 법칙[3,5]을 온-라인으로 이용하여 학습하며 이의 결과가 시스템의 결과에 추정함을 보인다. 사례연구는 [6]의 시변 선형 시스템을 사용하였으며 임펄스 함수의 근사화와 입력에 따른 시스템의 출력을 비교함으로써 함수 근사화가 이루어 짐을 입증한다.

본 논문의 구성은 2장은 웨이브렛 이론에 대한 간략한 내용이 기술이 되고 3장은 시변 선형 시스템의 웨이브렛 표현과 이러한 표현에 의거한 최적 필터 설계 기법을 기술하고 이러한 최적 필터에 접근하기위한 일환으로 시스템의 출력과 근사 함수의 출력을 최소로 하기 위해 적응기법인 LMS 알고리즘을 이용하여 웨이브렛 함수의 계수를 학습한다. 4장에서는 이러한 연구의 결과에 대한 타당성을 위해 [6]의 시스템을 대상으로 사례연구에 대한 결과와 고찰을 보여주며, 5장은 결론을, 마지막으로 참고문헌의 순으로 구성된다.

2. 웨이브렛 이론

웨이브렛 변환은 신호를 Short-time Fourier Transform(STFT)과 같이 시간-주파수 평면[3,4]에 주어진 신호의 특성을 나타내는 해석 방법이다.

웨이브렛 변환은 비정상신호(nonstationary signal)의 해석에 대해서 지금까지 고전적으로 사용되어왔던 short-time Fourier변환(STFT)이나 Gabor변환과는 다른 관점을 제공하

고 있어서 관심을 끌고 있다. STFT와 웨이브렛 변환 사이의 기본적인 차이점은 STFT가 하나의 해석 윈도우(window)를 사용하는데 비해서 웨이브렛 변환은 높은 주파수에서는 짧은 윈도우를 사용하고 낮은 주파수에서는 긴 윈도우를 사용하는 것이다. 웨이브렛 변환을 정의 하기 전에 허용함수를 정의한다. 어미 웨이브렛이 되기 위한 함수는 허용적이어야한다. 하나의 $L^2(R)$ 함수 g 는 다음 조건을 만족하는 허용함수이다.

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1)$$

여기서 $G(\omega)$ 는 g 의 Fourier변환이다.

웨이브렛 변환 연산자 Φ_g 를 사용하면 주어진 허용함수 웨이브렛 g 에대해서 임의의 신호 $y(t)$ 의 웨이브렛 변환은 다음과 같이 정의된다.

Wavelet domain coefficient at scale a and translation τ

$$\begin{aligned} \Phi_g y(a, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int y(t) g^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt \\ &= \langle y, \frac{1}{\sqrt{|a|}} g \left(\frac{t-\tau}{a} \right) \rangle \\ &= \langle y, g_{a, \tau} \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적을 나타낸다. 웨이브렛 요소 $g_{a, \tau}$ 는 $g(t)$ 가 축적(scale)파라미터 a 에 의해서 축적되고 병진(translation)파라미터 τ 에 의해서 이동된 형태이다. 이것은 임의의 (a, τ) 에서 웨이브렛 계수가 축적의 넓은 범위에 대해서 잘 비교되거나 결합되도록 한다. 특정한 응용분야에서 최적의 동작을 위해서 자유롭게 어미 웨이브렛을 선택할 수 있도록 한다.

웨이브렛 역변환식은 식 (2)에서 설명된 웨이브렛 변환으로부터 유도된다.

$y(t)$ 와 $g(t)$ 가 유한 에너지함수이고 $g(t)$ 가 허용어미 웨이브렛이면 웨이브렛 역변환 W_g^{-1} 는 축적-병진평면 $\Psi(a, \tau)$ 에서의 평면을 1차원의 시간 또는 공간 평면으로 대응시킨다.

축적-병진 평면이 어미 웨이브렛 g 또는 $\phi(a, \tau) = \Phi_g y(a, \tau)$ 에 대한 $y(t)$ 의 웨이브렛 변환인 경우에 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Phi_g^{-1} : \Phi_g(a, \tau) &\rightarrow y(t) \\ y(t) &= \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g y(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g \left(\frac{t-\tau}{a} \right) \frac{d\tau da}{a^2} \end{aligned} \quad (3)$$

역변환은 축적되고 이동된 형태의 어미 웨이브렛이 적절하게 가중된 합에 의해서 원래의 신호를 생성한다. 가중치는 웨이브렛 계수 $\Phi_g y(a, \tau)$ 이다. 역변환은 2차원 축적-병진 공간에 대한 합이다. 시간과 공간 평면 함수는 웨이브렛 평면 계수 $W_g y(a, \tau)$ 와 어미 웨이브렛 g 로부터 생성된다.

지금까지 유도된 연속 웨이브렛 변환은 이산(discrete)형태로 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$DWT_x(m, n) = \sum_k x(k) \psi_{m, n}(k) \quad (4)$$

$$\psi_{m, n}(k) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi \left(\frac{k - nb_0 a_0^m}{a_0^m} \right) \quad (5)$$

식(4)는 이산 (discrete-time) 신호 $x(n)$ 에 대한 이산 웨이브렛변환을 나타내는 일반식이다. $\psi(k)$ 는 어미(mother) 웨이브렛이 scale과 translation을 나타내는 m 과 n 은 a_0 와 b_0 에 따라 팽창과 이동을 한다.

3. 웨이브렛에 근거한 함수 근사화

안정한 이산 시간 선형 시변 시스템을 식(6)과 같이 가정한다.

$$d(k+1) = G * x(k) \quad (6)$$

여기서, $x(k)$, $d(k+1)$ 은 시스템의 입, 출력을 나타낸다. 그리고 G 은 시스템의 임펄스 응답을 나타내며 $*$ 는 중첩(convolution)을 나타낸다.

이러한 임펄스 응답 함수에 웨이브렛 시리즈를 적용하면 식(7)과 같이 표현할 수 있다.

$$G = \sum_{m, n} a_{mn} \Phi_{mn}(l) \quad (7)$$

여기서 $\Phi_{mn}(k)$ 는 웨이브렛 함수를 나타내며 mn 은 스케일링과 천이의 요소로서 $m, n \in L$ 이며 L 은 정수의 집합이다.

식(7)을 식(6)에 대입하면 다음의 식(8)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} d(k+1) &= G * u(k) \\ &= \sum_{m, n} a_{mn} \Phi_{mn}(k) * u(k) \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)을 다시 전개하면,

$$\begin{aligned} d(k) &= \sum_{m, n} a_{mn} \sum_j \Phi_{mn}(k-j) x(j) \\ &= \sum_{m, n} a_{mn} C_{mn}(k) \\ &= a^T C \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $C_{mn}(k) = \sum_j \Phi_{mn}(j) x(k-j)$ 이다.

그러면 시스템을 추종하기 위한 근사 함수의 출력을 $\hat{y}(k)$ 라 하자. 그러면 $\hat{y}(k)$ 는 식(10)로 표현 될 수 있다.

$$\hat{y}(k) = \hat{h} * x \quad (10)$$

그러면 $\hat{h}(k)$ 는 식(11)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\hat{h}(k) = \sum_{m, n} \hat{a}_{mn} \Phi_{mn}(k) \quad (11)$$

여기서 mn 은 스케일링과 천이의 요소로서 $m, n \in \hat{L}$ 이다. 즉 $\hat{L} \subseteq L$ 이다.

그러면 근사 함수의 출력은 식(12)과 같다.

$$\hat{y}(k) = \sum_{m, n} \hat{a}_{mn} \sum_j \Phi_{mn}(j) x(k-j) \quad (12)$$

여기서

$\hat{C}_{mn}(k) = \sum_j \Phi_{mn}(j)x(k-j)$ 로 두면 식 (12)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= \sum \hat{a}_{mn} \hat{C}_{mn}(k) \\ &= \hat{a}^T \hat{C}(k) \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)의 a 를
 $a = [a_1, a_2]$

로 둔다면 이에 대응하는
 $C(k) = [C_1, C_2]$ 로 생각 할 수 있다.

최적의 근사 함수를 구하기 위한 오차 함수를 식(14)로, 에너지 함수를 식(15)로 둔다.

$$e(k) = d(k) - y(k) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J &= E\{|e(k)|^2\} = E\{|d(k) - y(k)|^2\} \\ &= E\{|a^T C - \hat{a}^T \hat{C}\|^2\} \\ &= E\{d(k)d(k)\} - 2E\{d(k)y(k)\} + E\{y(k)y(k)\} \end{aligned} \quad (15)$$

이러한 에너지 함수에서 최적의 근사 함수를 이루는 \hat{a} 를 구하면 다음과 같다.

$$-a_1^T R_{11} - \hat{a}^T R_{11} - a^T R_{12} = 0 \quad (16)$$

$$\hat{a} = a_1 + R_{11}^{-1} R_{12} a_2 \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} R_{11} &= E\{r_1(k)r_1^T(k)\}, R_{12} = E\{r_1(k)r_2^T(k)\} \\ R_{21} &= E\{r_2(k)r_1^T(k)\}, R_{22} = E\{r_2(k)r_2^T(k)\} \end{aligned} \quad (18)$$

이다.

만약 입력 신호가 랜덤 신호라면 $R_{11} = I, R_{12} = 0$ 되고

$$C^* = C_1 \text{ 이 된다.}$$

만약 입력 신호가 랜덤 신호가 아니더라도 웨이브렛은 정규직교 베이스 함수를 가지기 때문에 $R_{11} \approx I, R_{12} \approx 0$ 되므로

$$C^* \approx C_1 \text{ 이 된다.}$$

그러므로 오차 함수 $e(k)$ 는 식 (19)와 같이 된다.

$$e(k) = d(k) - y(k) = a_2 C_2 \quad (19)$$

그러면 에너지 함수는

$$\begin{aligned} J &= E\{e(k)^2\} \\ &= a_2^T R_{22} a_2 \approx a_2^T a_2 \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)은 최적의 근사 함수를 구함에 있어서 모델링 되지

않은 a_2 에 의해 오차가 생성 됨을 알 수 있다. 최적인 상태의 근사 함수를 이루는 최적의 계수를 온-라인으로 구하기 위해서 최소 자승법에 근거한 적응 계수 조절이 필요하다. 적응 알고리즘은 식 (21)과 같다.

$$\hat{a}_{mn}(k+1) = \hat{a}_{mn}(k) + \eta_{mn} C_1(k) e(k) \quad (21)$$

여기서 η_{mn} 은 적응률로서 정규화된 값이다.

4. 사례연구와 검토

사례연구에 사용한 시스템[6]은 식(22)과 같은 시변 선형 시스템이다. 그리고 전체 블록 다이어그램은 그림 1과 같다.

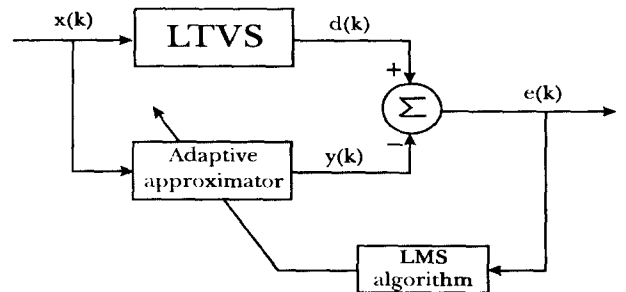


그림 1. 적응 시스템

Fig. 1 Overall adaptive system

$$G(k, l) = \frac{k}{256} g_1(l) + (1 - \frac{k}{256}) g_2(l) \quad (22)$$

여기서 $0 \leq l \leq k \leq K, K = 256$ 이며 $g_1(l), g_2(l)$ 은 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{z^{-3}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.41z^{-2} + 0.267z^{-3}} \\ G_2(z) &= \frac{0.85z^{-3}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.475z^{-2} + 0.87z^{-3}} \end{aligned} \quad (23)$$

시스템의 입력은 식 (24)와 같다.

$$u(k) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi k}{25}\right) + \frac{6}{5} \cos\left(\frac{4\pi k}{125}\right) \quad (24)$$

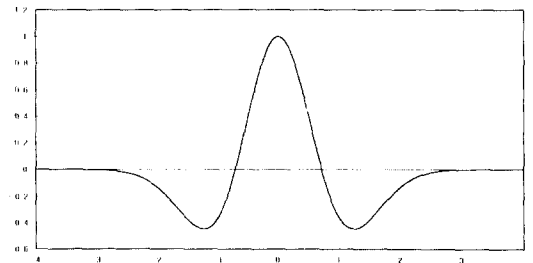


그림 2. 어미 웨이브렛 함수

Fig. 2 Mother wavelet

본 논문의 사례연구에 사용된 어미 웨이브렛[1]은 그림 2와 같으며 식(22)의 임펄스 응답을 그림 3에 나타내었다.

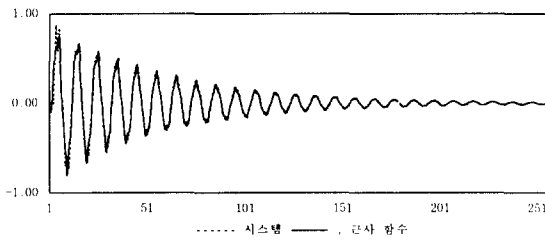


그림 3. 시스템의 임펄스 응답
Fig. 3 Impulse response of system

시변 선형 시스템의 입력에 대한 출력의 결과를 그림 4에, 근사화 오차를 그림 5에 나타내었다. 웨이브렛 변환에 의한 함수 근사화가 잘 이루어 짐을 알 수 있다.

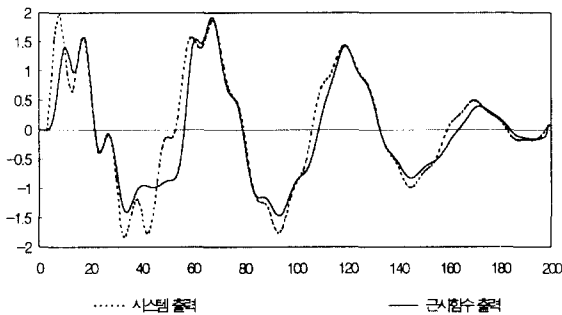


그림 4. 시스템과 근사화 함수의 응답 비교
Fig. 4 Comparison between real and approximate value

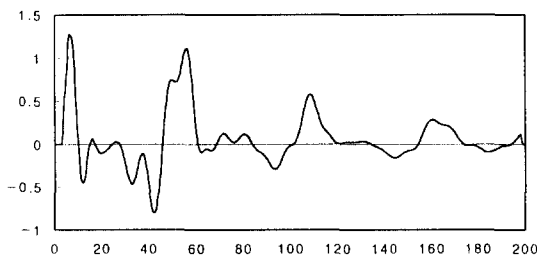


그림 5. 시스템과 근사화 함수의 오차
Fig. 5 Approximation error

5. 결 론

본 논문은 이산 시간 시변 시스템의 임펄스 응답의 근사화를 위한 기법으로서 푸리에 변환, STFT와 Gabor 변환등의 고정된 해상도를 가지는 해석 기법의 단점을 보완 하고자 웨이브렛 변환 기법을 사용하여 시스템의 함수 근사화에 새로운 기법을 제안 하였다. 웨이브렛 변환을 사용함으로써 시변 시

스템의 근사 함수를 적용 기법을 이용하여 쉽게 찾아낼 수 있었다.

웨이브렛 계수로 이루어진 상수 행렬을 이용한 근사 기법을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 시스템의 응답과 근사 함수의 출력과 비교함으로써 근사가 잘 이루어 짐을 확인할 수 있었다. 앞으로의 연구과제로는 좀 더 적절한 계수 행렬을 찾을 수 있는 기법과 이를 이용한 제어기법의 연구가 수행 될 것으로 사료된다.

(참 고 문 헌)

- [1] A. Cohen, J. Kovacevic, "Wavelets: The Mathematical Background", *Proceedings of the IEEE*, vol.84, No.4, April pp. 514-522. 1996.
- [2] M. I. Doroslovacki, H. Fan, "Wavelet-Based Linear System Modeling and Adaptive Filtering", *IEEE, Trans. SP.* vol.44, No.5, May pp. 1156-1167. 1996.
- [3] S. Haykin, "*Adaptive Filter Theory*", Prentice hall, 1991.
- [4] N. H. Nielsen, M. V. Wickerhauser, "Wavelets and Time-Frequency Analysis", *Proceedings of the IEEE*, vol.84, No.4, April pp. 523-540 1996.
- [5] J. G. Proakis, C. M. Rader, "*Advanced Digital Signal Processing*", Macmillan, 1992.
- [6] H. Rotstein and S. R., "Gabor Transform Approximation of Time-Varying Systems", *Proceedings of 1995 the American Control Conference*, pp.2424-2429.
- [7] G. Strang, T. Nguyen, "*Wavelets and Filter Banks*", Wellesley-Press, 1996.
- [8] M. Vetterli, J. Kovacevic, "*WAVELETS and subband coding*", Prentice hall, 1995.
- [9] Q. Zhang, A. Benveniste, "Wavelet Networks", *IEEE, Trans. NN.* vol. 3, No. 6, November 1992.
- [10] 이영석, 김동욱, 안대찬, 서보혁, "웨이브렛 변환을 이용한 시변 선형 시스템의 근사화", 대한전기학회 하계 학술대회 논문집, pp.717-719, 1997.