Proceedings of the 12th
KACC, October 1997

개선된 선형 샘플치 출력 조절기
(An Improved Linear Sampled-data Output Regulators)

°정 선 태
숭실대학교 전자공학과 (Tel: 820-0638; Fax: 814-1652; E-mail: cst@syscon.soongsil.ac.kr)

Abstracts In general, the solvability of linear robust output regulation problem are not preserved under time-sampling. Thus, it is found that the digital regulator implemented by time-sampling of analog output regulator designed based on the continuous-time linear system model is nothing but a 1st order approximation with respect to time-sampling. By the way, one can design an improved sampled-data regulator with respect to sampling time by utilizing the intrinsic structure of the system. In this paper, we study the system structures 랮 which it is possible to design an improved sampled-data regulator with respect to sampling time.

Keywords Output Regulation, Time-Sampling Effects, Sampled-Data Systems, Linear Systems, Digital Regulators

1. 서론

전체 폐루프 시스템을 안정화하면서, 외란을 제거하고 출력이 외부 기준입력을 추종하도록 하는 '출력 조절(output regulation)'의 문제는 가장 기본적인 제어 문제의 하나로 선형 시스템 뿐만 아니라 비선형 시스템에 대해서도 많은 연구가 진행되어 있다 [1,2,3,4,6]. 그런데, 주어진 연속시간 시스템에 대해 출력 조절을 달성하는 출력 조절기(output regulator)를 실제로 구현하게 될 때 설계된 연속시간 출력 조절기는 그 제어기 구조의 복잡성으로 인한 구현의 어려움 또는 경제성 등의 여러가지 이유로 디지털 구현을 고려하게 된다. [7]에서는 단일 입출력 선형 시스템의 경우에는 출력조절 설계 가능성이 샘플링에 대해 보존되지만, 일반적으로는 출력 조절기 설계 가능성이 샘플링에 대해 보존되지 않음을 보였다. 즉, 연속시간 선형 시스템에 출력 조절기 설계가 가능하더라도, 연속시간 시스템을 이산화한 샘플치 선형 시스템에 대해서는 출력 조절기 설계가 가능하지 않을 수도 있다. 이 경우, 연속시간 시스템에 대해 설계된 아날로그 조절기를 디지털로 구현하는 경우, 이는 샘플링 시간 간격 T 에 대해, 1차 근사적인 근사 샘플치 조절기에 불과하다. 따라서, 연속시간 시스템에 대해 설계된 아날로그 조절기를 디지털 구현하여 얻어진 샘플치 조절기보다 샘플링 시간 간격 T 에 대해 개선된 근사 샘플치 조절기 설계 가능성에 대한 연구의 필요성이 존재한다. 본 논문은 이에 따라, 복수 입출력 선형 시스템에 대해서 시스템이 어떤 특성을 갖게 되면, 샘플링 시간 간격 T 에 대해 개선된 근사 샘플치 조절기 설계가 가능할 것인지에 대해 연구한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 선형 시스템의 출력 조절의 문제와 그 해, 그리고 아날로그 출력 조절기의 디지털 구현에 대해 설명하며, 제 3절에서는 샘플링 시간에 대해 근사적인 근사 샘플치 출력 조절기 설계 문제에 필요한 기본 필요 사항을 기술한다. 제4절에서는 개선된 근사출력 조절기 설계에 대한 본 논문의 주요한 결과가 기술되며, 마지막으로 제 5절에 결론이 주어진다.

2. 선형 시스템의 출력 조절과 디지털 구현

출력 조절(output regulation)의 목적은 전체 폐루프시스템이 안정을 유지하면서 궁극적으로 외란을 제거하고 출력이 기준신호를 추종하도록 하는($\lim_{t\to\infty} e(t)=0$) 제어기(regulator)를 설계하는 것이다. 먼저 출력 조절을 위해 본 논문에서 고려한 선형 시스템은 다음과 같다.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw & (2.1a) \\ \dot{w} = Sw & (2.1b) \\ e = Cx + Qw & (2.1c) \end{cases}$$

여기에서 각 식의 의미는 다음과 같다. 첫번째 식은 상태 $x \in R^n$, 입력 $u \in R^m$ 을 가지며, Pw ($w \in R^s$)로 나타나는 외란의 영향을 받는 플랜트를 기술한다. 세번째 식은 실제 플랜트 출력 Cx 와 실제 플랜트 출력이 추종하여야 할 기준 입력 Qw 사이의 에러 $e \in R^p$ 을 나타내며, 두 번째 식은 외부시스템(exosystem)으로써, 외란과 (또는) 기준 신호의 동력학 시스템을 모델화한 것이다. A, B, P, S, C, Q 는 각각 적절한 차원을 갖는 상수 행렬들이다.

이 때, 만약 $\dot{x} = Ax$ 가 안정이면, 시스템 Σ 는 '내재적으로 안정하다(internally stable)'고 한다. 또, 만약 임의의 초기 상태들 $x(0), w(0)$ 과 입력 $u=0$에 대해, $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$ 이면, 시스템 Σ 는 '출력 조절됨(output regulated)'을 만족한다고 한다. 시스템 Σ 가 '내재적으로 안정' 하고, '출력조절됨'을 만족하면, 이는 이미 시스템 Σ 가 안정되어 있고 궁극적으로 외란을 제거하고 출력이 기준입력을 추종하므로 따로 제어기를 설계하지 않아도(즉, $u=0$) 출력조절의 목적을 달성한다. 그런데, 만약 시스템 Σ 가 내재적으로 안정하지 않고, 출력 조절됨도 만족하지 않을 때, 우리는 다음의 보상기 Γ 를 추가하여 이 출력 조절의 목적을 만족하도록 시도할 수 있다.

$$\Gamma : \begin{cases} \dot{z} = Fz + Ge \\ u = Hz \end{cases} \qquad (2.2)$$

이때, 얻어지는 폐루프 시스템은 다음의 시스템 Σ_c 와 같다.

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + BHz + Pw \\ \dot{z} &= Fz + GCx + GQw \\ \dot{w} &= Sw \\ e &= Cx + Qw \end{cases}$$

이때 $w=0$ 인 폐루프 시스템 Σ_c가 '내재적으로 안정'하고 (즉, $\dot{x}=Ax+BHz$, $\dot{z}=Fz+GCx$ 인 시스템이 안정), '출력 조절됨'(즉, 임의의 초기상태 $x(0)$, $z(0)$, $w(0)$ 에 대해 $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$ 을 만족)일 때, 우리는 보상기 Γ 을 '조절기(regulator)'라 하고, 이러한 조절기를 찾는 문제를 '출력 조절 문제' 라 한다. 또한, 출력 조절 문제를 풀 수 있을 때, 시스템 Σ 는 '출력 조절 가능(output regulatable)'이라고 한다.

이제, 출력 조절가능의 해의 존재조건에 대해 정리 기술한다 [4].

정리 2.1 [4] : 시스템 Σ 에서 $(A,\ B)$ 가 '안정화 가능(stabilizable)'하고 Σ 가 '검출가능(detectable)'하다고 하자. 그러면 다음의 방정식 (2.4)가 해 (Π, V) 를 가지면 시스템 Σ 는 '출력 조절가능'하다.

$$A\Pi + BV + P = \Pi S \qquad (2.3a)$$
$$C\Pi + Q = 0 \qquad (2.3b)$$

만약 S 가 반안정하면, 방정식 (2.3)의 해 존재는 또한 시스템 Σ 가 '출력 조절가능' 하기 위한 필요조건이 된다. ///

정리 2.1의 증명은 [4]를 참조하라. 또, 선형 이산 시스템과 선형 샘플치 시스템에 대해서도 정리 2.1 과 똑같은 정리가 성립함을 쉽게 보일 수 있다[7].

연속시간에 대해 설계된 출력조절기 (2.2)를 이산화하여 얻어진 샘플치 출력 조절기는 다음과 같다.

$$\Gamma(T): \begin{cases} z_{k+1} &= F(T)z_k + G(T)e_k \\ u_k &= Hz_k \end{cases} \qquad (2.4)$$

(여기서, $F(T)=e^{TF}$, $G(T)=\int_0^T e^{A\tau} G\, d\tau$)

이 경우, 샘플치 출력 조절기 (2.4)는 샘플링 시간 T 에 대해, 1차 선형근사 출력조절기에 불과함을 알 수 있다. 즉, 원래의 연속 시간 시스템 Σ 에 기반하여 설계된 연속시간 출력 조절기 Γ 를 이산화하여 얻은 선형 샘플치 출력 조절기는 단지 샘플링 시간에 대해 1차 근사화에 불과하다는 것을 쉽게 알 수 있다.

3. 근사 샘플치 선형 출력 조절기

원래의 연속 시간 시스템 Σ 에 기반하여 설계된 연속시간 출력 조절기 Γ 를 이산화하여 얻은 선형 샘플치 출력 조절기는 단지 샘플링 시간에 대해 1차 근사화에 불과하다. 그러면, 샘플링 시간에 대해 개선된 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해서는 시스템은 어떤 특성을 만족해야 할까? 먼저 추후의 논의 전개를 위해, 필요한 사항 및 정의를 기술한다.

선형 시스템 Σ 를 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템을 $\Sigma(T)$ 라 하자.

$$\Sigma(T): \begin{cases} x_{k+1} &= A(T)x_k + B(T)u_k + P(T)w_k \\ w_{k+1} &= S(T)w_k \\ e_k &= Cx_k + Qw_k \end{cases} \qquad (3.1)$$

(T : 샘플링 시간 간격, $x_k := x(kT)$, $A(T) := e^{TA}$, $S(T) := e^{TS}$, $B(T) := \int_0^T e^{A\tau} B\, d\tau$, $P(T) := \int_0^T e^{(T-\tau)A} P e^{\tau S} d\tau$)

여기서, 선형 샘플치 시스템에서의 '출력조절됨'과 '출력 조절가능'은 어떤 양의 실수 T^*가 존재하여, $0 < T < T^*$ 인 모든 샘플링 시간 간격 T 의 이산시스템 $\Sigma(T)$가 각각 '출력조절됨'과 '출력 조절가능'을 만족할 때를 의미한다. 따라서, 출력 조절가능의 경우, $T \in (0, T^*)$ 인 T 에 대해 다음의 식 (3.2)가 해 $\Pi(T), V(T)$ 를 갖는 것이 필요 충분조건이 된다.

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) \qquad (3.2a)$$
$$C\Pi(T) + Q = 0 \qquad (3.2b)$$

식 (3.2) 가 만족되면, 샘플치 선형 시스템 (3.1)에 대해 정확한 출력 조절을 달성하는 디지털 출력 조절기 설계가 가능하다. [7]에는 단일 입출력 시스템에서는 출력 조절 가능성이 보존되나, 일반적으로 선형 시스템의 '출력 조절가능성'은 샘플링에 대해 보존되지 않음이 보여졌다. [7]에는 또한, right invertible 하고 시스템의 transmission zeros 가 외부 시스템의 극점과 일치하지 않는 시스템은 완전한 샘플치 출력 조절기 설계가 가능함을 보여 주었다. 그외의 일반적인 시스템에서는 어떤지를 조사하기 위해, 먼저, 식 (3.2)의 근사적 해인 다음의 (3.3) 을 고려하자.

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) + O(T^{n+1}) \quad (n \geq 1) \qquad (3.3a)$$
$$C\Pi(T) + Q = 0 \qquad (3.3b)$$

(여기서, $O(T^{n+1})$은 다음을 만족하는 T 의 함수들을 가리킨다.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{O(T^{n+1})}{T^n} = 0 \ )$$

(3.3)의 관심은 물론, 정확한 출력 조절기 설계와 마찬가지로 다음과 같이 샘플링 시간 T 에 대해 n 차 근사 출력 조절기를 설계하는 데 있다. (3.3)이 성립하는 경우, 시스템 $\Sigma(T)$ 는 'n 차 출력 조절 가능' 임을 다음을 통해 알 수 있다. (2.4) 형태의 선형 샘플치 시스템의 출력 조절기 $\Gamma(T)$ 의 $F(T)$, $G(T)$, $H(T)$를 다음과 같이 결정하자.

1) $\begin{pmatrix} A(T), & P(T) \\ 0, & S(T) \end{pmatrix} - G(T)(C, Q)$ 가 안성인 행렬 $G(T)$ 를 구한다.

2) $A(T) + B(T)H_1(T)$ 가 안정인 행렬 $H_1(T)$ 를 구한다.

3) 식 (3.3)를 만족하는 $\Pi(T)$, $V(T)$ 에 대해,
$H_2(T) := -H_1(T)\Pi(T) + V(T)$,
$H(T) := [H_1(T)\ H_2(T)]$ 라 정의한다.

4) $F(T) := \begin{pmatrix} A(T), & P(T) \\ 0, & S(T) \end{pmatrix} - G(T)(C, Q) + \begin{pmatrix} B(T) \\ 0 \end{pmatrix} H(T)$

이제, 이렇게 구해진 출력조절기 $\Gamma(T)$ 가 n 차 출력조절을 이룸을 다음의 논의로부터 알 수 있다.

출력 조절기 $\Gamma(T)$ 를 사용한 후, 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\Sigma_c(T):\begin{cases} x_{k+1}^e = A_c(T)x_k^e + P_c(T)w_k \\ w_{k+1} = S(T)w_k \\ e_k = C_c\, x_k^e + Qw_k \end{cases}$$

$$\left(x^e := \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},\ A_c(T) := \begin{pmatrix} A(T), & B(T)H(T) \\ G(T)C, & F(T) \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. P_c(T) := \begin{pmatrix} P(T) \\ G(T)Q \end{pmatrix},\ C_c := (C,\ 0) \right)$$

먼저, $A_c(T)$ 는 안정함을 다음의 논의로부터 알 수 있다.

$G(T) := \begin{pmatrix} G_1(T) \\ G_2(T) \end{pmatrix}$ 라 하면, $\lambda I - A_c(T)$ 는 다음과 같이 3개의 행 부분들(row blocks)과 열 부분들(column blocks) 를 가진 행렬로 표현된다.

$$\lambda I - A_c(T) = \begin{vmatrix} \lambda I - A(T), & -B(T)H_1(T), & -BH_2(T) \\ -G_1(T)C, & \begin{pmatrix} \lambda I - A(T) + G_1(T)C \\ -B(T)H_1(T) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -P(T) + G_1(T)Q \\ -B(T)H_2(T) \end{pmatrix} \\ -G_2(T)C, & G_2(T)C, & \lambda I - S(T) + G_2(T)Q \end{vmatrix}$$

이때, 첫 번째 행 부분(row block)에 -1 을 곱한후, 두 번째 행 부분에 더한 다음, 다시 두 번째 열 부분(column block)을 첫 번째 열 부분에 더하면, 결과되는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - A(T) \\ -B(T)H_1(T) \end{pmatrix}, & -B(T)H_1(T), & -B(T)H_2(T) \\ 0, & \lambda I - A(T) + G_1(T)C, & -P(T) + G_1(T)Q \\ 0, & G_2(T)C, & \lambda I - S(T) + G_2(T)Q \end{vmatrix}$$

따라서,

$$det(\lambda I - A_c(T)) = det\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - A(T) \\ +B(T)H_1(T) \end{pmatrix}, & B(T)H(T) \\ 0, & \begin{pmatrix} \lambda I - \begin{pmatrix} A(T) & P(T) \\ 0 & S(T) \end{pmatrix} \\ + G(T)(C,Q) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$A(T)+B(T)H_1(T)$ 과 $\begin{pmatrix} A(T) & P(T) \\ 0 & S(T) \end{pmatrix} - G(T)(C,Q)$ 이 각각 안정하므로, $A_c(T)$ 도 안정함을 알 수 있다.

다음, $U(T) := \begin{pmatrix} \Pi(T) \\ I \end{pmatrix}$, $\Pi_c(T) := \begin{pmatrix} \Pi(T) \\ U(T) \end{pmatrix}$ 라 하면, $H(T)U(T) = V(T)$ 임에 유의하여 다음을 보일 수 있다.

$$A_c(T)\Pi_c(T) + P_c(T) = \Pi_c(T)S(T) + O(T^{n+1}) \quad (3.4a)$$
$$C_c\Pi_c(T) + Q = 0 \quad (3.4b)$$

식 (3.4a)가 성립하면, $u=0$에서,

$x_{k+1}^e - \Pi_c(T)w_{k+1} = A_c(T)(x_k^e - \Pi_c(T)w_k) + O(T^{n+1})$ 가 성립한다. $A_c(T)$ 가 안정하므로, $k \to \infty$ 에 따라,

$x_k^e - \Pi_c(T)w_k \cong O(T^{n+1})$ 가 성립한다. 또한 (3.4b)가 성립하므로,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} e_k &= \lim_{k\to\infty}(C_c x_k^e + Qw_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\{C_c(x_k^e - \Pi_c(T)w_k) + (C_c\Pi_c(T) + Q)w_k\} \\ &= O(T^{n+1}) \end{aligned}$$

따라서, 충분히 작은 샘플링 시간 T 에 대해, $\lim_{k\to\infty} e_k \cong 0$ 가 성립한다.

따라서, 앞의 논의에 따라 폐루프 시스템 Σ_c 는 n 차 근사 출력 조절됨을 알 수 있다.

이상의 논의를 바탕으로 다음의 정의를 기술한다.

정의 3.1 : 시스템 Σ 는 다음을 만족하는 어떤 양의 실수 T^* 가 존재하면, 'n 차 근사 샘플치 출력 조절가능' 이라 하자.

모든 $T \in (0,\ T^*)$에 대해, Σ 을 이산화하여 얻어진 선형 이산 시스템 $\Sigma(T)$ 에 대해, $(A(T), B(T))$ 가 안정가능, $\Sigma(T)$ 가 검출가능하고 $S(T)$가 반안정하며, 다음의 행렬방정식 (3.5)을 만족하는 해 $\Pi(T)$, $V(T)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) &= \Pi(T)S(T) + O(T^{n+1}) \quad (n \geq 1) \\ C\Pi(T) + Q &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

다음의 정리는 시스템 Σ 에 n 차 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해서는 원래 연속시간 시스템에 출력 조절기 설계가 가능해야 함을 의미한다.

정리 3.2 : 시스템 Σ 가 'n 차 근사 샘플치 출력 조절 가능'이면, 시스템 Σ 는 '출력 조절 가능'이다.

(증명) 안정화가능성, 검출가능성, 반안정성 등은 샘플링에 대해 보존되므로, $(A(T), B(T))$ 가 안정가능, $\Sigma(T)$가 검출가능하고 $S(T)$가 반안정하면, (A, B) '안정화가능', Σ 가 '검출가능', S 가 '반안정'이다. 또 $\Sigma(T)$가 'n 차 근사 샘플치 출력 조절가능'이면 정의 3.1에 따라, 식 (3.5)를 만족하는 $T=0$ 에서 해석적인 해 $\Pi(T)$ 와 $V(T)$ 가 각각 존재한다.

$\Pi(T)$ 와 $V(T)$ 는 $T=0$에 대해 해석적이므로 각각 T 에 대해 Taylor 급수 전개를 하여 다음과 같이 표기하자.

$$\Pi(T) = \Pi_0 + T\Pi_1 + \frac{1}{2!}T^2\Pi_2 + \cdots \quad (3.6a)$$
$$V(T) = V_0 + TV_1 + \frac{1}{2!}T^2V_2 + \cdots \quad (3.6b)$$

또, $A(T), B(T)$, $S(T)$, $P(T)$를 각각 T 에 대해 Taylor급수 전개를 하여 다음과 같이 표기하자.

$$A(T) = I + TA + \frac{1}{2}T^2A^2 + \frac{1}{6}T^3A^3 + \cdots \quad (3.7a)$$
$$B(T) = TB + \frac{1}{2}T^2AB + \frac{1}{6}T^3A^2B + \cdots \quad (3.7b)$$
$$S(T) = I + TS + \frac{1}{2}T^2S^2 + \frac{1}{6}T^3S^3 + \cdots \quad (3.7c)$$
$$P(T) = TP + \frac{1}{2}T^2(AP + PS) + \frac{1}{6}T^3(A^2P + APS + PS^2) + \cdots \quad (3.7d)$$
$$F(T) = I + TF + \frac{1}{2}T^2F^2 + \frac{1}{6}T^3F^3 + \cdots \quad (3.7e)$$
$$G(T) = TG + \frac{1}{2}T^2FG + \frac{1}{6}T^3F^2G + \cdots \quad (3.7f)$$

이제, (3.6)과 (3.7)을 각각, (3.5a)에 대입하고 T 에 대한 1차 계수를 비교하고, (3.5b)에 대입하여 T 에 대한 상수계수를 비교하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} A\Pi_0 + BV_0 + P &= \Pi_0 S \\ C\Pi_0 + Q &= 0 \end{aligned}$$

따라서, 정리 2.1에 의해 시스템 Σ 는 출력 조절가능하다.

4. 개선된 선형 시스템 출력 조절기

제3절에서는, 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위하여서는 원래의 연속시간 선형 시스템에 정확한 선형 출력 조절기 설계가 가능해야 함이 보여졌다. 이 절에서는 샘플링

시간에 대해 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하게 하기 위하여, 원래의 연속시간 선형 시스템이 더 가져야 할 구조를 조사하고, 이 구조를 특성화하는 조건을 구한다.

만약, 시스템 Σ 가 'n 차 근사 출력 조절가능'이라고 하자. 그러면 식 (3.5)을 만족하는 $\Pi(T)$, $V(T)$가 각각 존재한다. $A(T)$, $B(T)$, $S(T)$, $P(T)$, $\Pi(T)$, $V(T)$를 각각 T에 대해 Taylor급수 전개를 한 결과 (3.6) 과 (3.7)를 각각 식 (3.5)에 대입하고 T에 대한 계수들을 비교하면 다음의 관계식들을 얻는다.

T^1의 계수비교로,

$$\begin{aligned} A\Pi_0+BV_0+P &= \Pi_0 S \\ C\Pi_0+Q &= 0 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

$$T^2: \quad \begin{aligned} A\Pi_1+B(V_1-\frac{1}{2}V_0S) &= \Pi_1 S \\ C\Pi_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1b}$$

$$T^3: \quad \begin{aligned} &A\Pi_2+B(V_2-V_1S+\frac{1}{6}V_0S^2) \\ &+\frac{1}{6}ABV_0S=\Pi_2 S \\ &C\Pi_2=0 \end{aligned} \tag{4.1c}$$

$$T^4: \quad \begin{aligned} &A\Pi_3+B(V_3-\frac{3}{2}V_2S+\frac{1}{2}V_1S^2) \\ &+\frac{1}{2}AB(V_1S+\frac{1}{2}V_0S^2)=\Pi_3 S \\ &C\Pi_3=0 \end{aligned} \tag{4.1d}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

T^{n+1}:

$$\begin{aligned} &A\Pi_n+B(V_n+\alpha_1(S)+AB\alpha_2(S) \\ &+A^2B\alpha_3(S)+\cdots+A^{n-1}B\alpha_n(S) = \Pi_n S \\ &C\Pi_n = 0 \end{aligned} \tag{4.1e}$$

(α_k $(k=1,\cdots,n)$ 은 V_i $(i=1,\cdots,n)$ 와 S 의 함수)

(4.1b)는 항상 해가 존재한다. 즉, $\Pi_1=0$, $V_1=\frac{1}{2}V_0S$ 은 식 (4.1b)를 만족한다. 따라서, 샘플링 시간 T 에 대해 2차 근사화된 샘플치 출력 조절기는 항상 설계가능하다.

3차 이상 근사 출력조절기 설계가 가능하기 위해서는 식 (4.1c)을 만족하는 해 Π_2 와 V_2가 존재하면 된다. 그런데, 식 (4.1c)의 해 존재는 다음의 조건이 만족되는 경우, 쉽게 해를 구할 수 있다.

(4.1c)는 다음 식 (4.1 c')과 같다.

$$\begin{aligned} &A(\Pi_2+\frac{1}{6}BV_0S)+B(V_2-V_1S+\frac{1}{3}V_0S^2) \\ &\qquad =(\Pi_2+\frac{1}{6}BV_0S)S \\ &C(\Pi_2+\frac{1}{6}BV_0S)-\frac{1}{6}CBV_0S=0 \end{aligned} \tag{4.1c'}$$

식 (4.1c') 은 다음의 식과 같고

$$\begin{aligned} A\Pi-\Pi S &= BV \\ C\Pi &= \frac{1}{6}CBV_0S \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \Pi &:= \Pi_2+\frac{1}{6}BV_0S \\ V &:= -V_2+V_1S-\frac{1}{3}V_0S^2 \end{aligned} \right)$$

따라서, $CB=0$이면, 위 (4.1c')은 해가 존재한다. 즉,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= -\frac{1}{6}BV_0S \\ V_2 &= V_1S-\frac{1}{6}V_0S^2-\frac{1}{6}V_0S^2 \end{aligned}$$

마찬가지로, $CB=0$이면, 식 (4.1d)도 해가 존재한다. 따라서, $CB=0$이면,

샘플링 시간 T 에 대해 4차 근사화된 출력조절기가 항상 설계가능함을 알 수 있다.

5. 결론

연속 시간 선형 시스템 모델에 기반하여 설계된 아날로그 조절기를 이산화하여 얻어진 샘플치 조절기는 샘플링 시간에 대해 1차 근사 조절기에 불과하다. 따라서, 샘플링 시간에 대해 개선된 샘플치 조절기를 설계할 필요가 존재한다. 본 논문에서는 근사 샘플치 출력 조절기 문제를 명확히 하고, 먼저 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해서는 먼저 아날로그 출력 조절기 설계가 가능해야 함을 보였다. 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해 만족되어야 할 필요 충분조건의 행렬 방정식 해의 분석을 통해, 2차 근사 출력 조절기 설계는 항상 가능하며, 3차 이상의 근사 샘플치 출력 조절기의 설계의 경우에, 만족해야할 시스템의 구조를 밝혔다.

6. 참고문헌

[1] C.I. Byrnes and A. Isidori, "Steady State Response, Separation Principle, and The Output Regulation of Nonlinear Systems," 28th Proc. conf. on Decision and Control, vol. 3, pp. 2247-2251, 1989.

[2] C.I. Byrnes and Wei Lin,"On Discrete-Time Nonlinear Control," 32nd Proc. conf. on Decision and Control, vol.3, pp. 2990-2996, 1993.

[3] B.A. Francis, "The Linear Multivariable Regular Problem," SIAM J.Contr.Optimiz., vol. 15, pp. 486-505, 1987.

[4] M. Hautus, "Linear Matrix Equations with Applications to the Regulator Problem," in Outils and Modèles Math. pour l'Auto., I.D. Landau, Ed. Paris: C.N.R.S., pp. 399-412, 1983.

[5] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 2nd ed., 1989.

[6] A. Isidori, and C.I. Byrnes, "Output Regulation of Nonlinear Systems," IEEE trans.. Aut. Contr., AC-35, pp. 131-140, 1990.

[7] 정선태, "선형 샘플치 시스템의 출력 조절", 대한 전자공학회 논문지 제34권 S편 제 8호, pp. 853-861, 1997.