

소성 가공의 유한 요소 해석을 위한 자동 요소망 생성

이 상훈*, 오 수익
서울대학교 공과대학 기계설계학과

Automated Mesh Generation For Finite Element Analysis In Metal Forming

Sang-Hoon Lee*, Soo-Ik Oh

Department of Mechanical Design & Production Engineering
Seoul National University

ABSTRACT

In the two-dimensional Finite Element Method for forming simulation, mesh generation and remeshing process are very significant. In this paper, using the modified splitting mesh generation algorithm, we can overcome the limitation of existing techniques and acquire mesh, which has optimal mesh density. A modified splitting algorithm for automatically generating quadrilateral mesh within a complex domain is described. Unnecessary meshing process for density representation is removed. Especially, during the mesh generation with high gradient density like as shear band representation, the modified mesh density scheme, which will generate quadrilateral mesh with the minimized error, which takes effect on FEM solver, is introduced.

Key Words: mesh generation(요소망 생성), node(결점), critical point(중요 점), recursive splitting(회귀적 분할), splitting criteria(분할 기준), pattern matching(패턴 매칭), mesh density(요소망 밀도).

1. 서론

오늘날 복잡한 경계를 가지는 일반적인 공학 문제를 풀기 위한 유용한 도구로 가장 널리 쓰이는 유한 요소 해석법은 매우 강력하고 편리한 해석 방법이라는 사실은 이미 주지된 바이다.

이러한 유한 요소 해석 방법은 크게 (1) Preprocessing, (2) FEM Solving, (3) Postprocessing 같은 3단계의 과정을 거친다. 위의 3단계 과정 중에서 해석하고자 하는 형상을 유한 요소 해석 모델로 바꾸는 요소망의 생성은 Preprocessing의 주된 부분으로서 과거에는 경험과 시행착오에 의존하여 매우 지루한 과정이었으나, 최근에는 다양한 알고리즘을 이용하여 해석자, 혹은 사용자가 보다 쉽고 빠르게 요소망을 자동적으로 생성 할 수 있도록 많은 연구가 이루어지고 있다. 그러나, 아직도 우리는 여러 가지 난관에 접하고 있다. 소성 가공 해석의 경우에 있어서는 해석 도중, 혹은 최종 제품 해석 형상이 초기 모양과는 매우 상이하여 해석 도중에 심하게 왜곡된 요소가 생겨나게 된다. 또, 소성 가공의 특성상, 응력 집중이나 국부적인 변형을 해석하기 위해서는 밀도 차가 큰 요소망이 요구되어진다. 그러므로, 견실하고 밀도 조절이 용이한 요소망의 생성 알고리즘의 중요성은 무엇보다도 중요하다고 할

수 있다. 특히, 전단가공 시뮬레이션의 경우, 전단 밴드(Shear Band)에서의 요소의 크기가 수 μm 에서, 수십 μm 인 전단 밴드(Shear Band)의 거동을 해석하기 위해서는 기존의 알고리즘에 의한 요소망 생성기로는 형상 전체를 엄청난 양의 요소로 표현해야 한다. 본 연구에서는 양질의 요소망을 생성하고 큰 밀도 차에서도 해에 미치는 요소망의 영향력을 최소화하여 가장 최적화된 요소망을 구현하고자 한다.

2. 요소망의 생성

2.1 초기 형상 모델링과 필요조건

2차원 평면에서 임의의 도형들은 선, 원호, 스플라인의 조합의 합으로 이루어진다. 또한, 어떠한 원호, 혹은 스플라인이라도 선분들의 합으로 근사화 시킬 수 있다. 따라서, 본 연구 논문에서는 어떤 임의의 도형이든 여러 개의 선분들로 이루어진 다각형으로 근사화 하여 사용하였다. 그러나, 사용자가 CAD/CAM SYSTEM에 의존하지 않고 쉽게 초기 형상을 입력할 수 있도록 다음과 같은 두 가지 형태의 입력 양식을 갖추었다.

(1) XYR 입력.

(2) XY 입력.

XYR 입력의 경우 결국은 정렬된 XY값으로 근사화 되어서 계산 될 것이다. 사각형의 요소망을 구현 할 때에는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

이론: 사각형 요소에 있어서, 경계선상의 절점의 개수가 짝수가 된다

본 논문에서 다루고 있는 요소망 자동 생성방법은 요소망을 생성해야 할 영역을 회귀적으로 분할(Splitting)하는 방법인데, 분할하는 각각의 단계에서의 부분영역들 역시 초기영역과 마찬가지로 필요조건을 만족해야 한다.

2.2 다각형의 근사화와 경계선상의 절점 생성

앞서 언급한 바와 같이 어떠한 형상이든 X와 Y의 좌표 값으로 근사화된 기하학적인 점들 중에서 불규칙적인 원상(Original Shape)에 가장 근사하면서도 최소한의 점의 개수로 중요한 점들(Critical Point)을 잡아서 형상의 기준점으로 삼는다. 이와 같은 알고리즘은 다각형의 근사화에 널리 이용되는 알고리즘이다. 궁극적으로 이러한 중요점은 요소의 크기와도 밀접한 관계가 있다고 할 수 있다. 또한, 정렬된 이 점들을 이용하여 절점 생성시 한 중요 점과 다음 중요점 사이에 절점들을 생성한다.

다각형의 근사화로 생성된 중요점 사이에 절점을 생성하는 방법은 다음과 같은 식을 사용하여 주어진 밀도 값들의 적분 치로 절점의 개수를 정하여 절점들을 생성한다.

$$\int_r \rho(s) ds = R \cong N-1 \quad (1)$$

$$\therefore N \cong \int_r \rho(s) ds + 1 = R + 1 \quad (2)$$

$$\rho(s) ds = C dx = Constant \quad (3)$$

R : 선 적분 결과값.

N : 절점이 생성될 두 절점간의 절점 개수.

$\rho(s)$: 경계선상의 밀도 함수.

ds : 경계선상의 미소 원호 길이.

τ : 절점이 생성될 두 점들에 의해서 연결된 구간.

dx : 경계선상(계산상의 수치 공간)에서의 미소 원호 길이.

C : 비례 상수.

한편, 요소의 크기가 균일(uniform)하지 않은 밀도 차를 갖는 비균일 요소 생성시, 각 절점의 생성위치는 (3)과 같은 절점 재분배(Node Redistribution)에 관한 지배방정식을 따른다. 또한, 식 (3)은 다음과 같이 2차의 상미분 방정식으로 표현 될 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \left(\rho(s) \frac{ds}{dx} \right) = 0 \quad (4)$$

그러나, 위의 적분 결과 값만으로는 경계선상에서의 모든 절점의 개수가 짝수가 되도록 하는 필요조건을 만족시킬 수 없으므로 연구의 초기 단계에서는 생성 구간, 즉 한 점과 다른 한 점 사이마다 필요조건을 구속 조건으로 사용하였으나, 여기서는 밀도의 반영 오차를 최소화하기 위하여, 전체 경계선상에서의 필요 조건을 만족시킬 수 있도록 하였다. 그리하여 식 (2)는

$$\int_T \rho(s) ds = R_T \cong N_A - 1$$

$$N_A \cong R_T + 1 \quad (5)$$

if ($N = \text{even No.}$) $\Rightarrow N = N_A$

else ($N = \text{odd No.}$) $\Rightarrow N = N_A + 1$

R_T : 절점이 생성 될 경계선상 전체에서의 선 적분 결과값

N_A : 절점이 생성 될 경계선상 전체에서의 실제(밀도에 의한) 절점 개수

N : 절점이 생성 될 경계선상 전체에서의 필요 조건에 의한 절점 개수

$\rho(s)$: 경계선상의 밀도 함수

ds : 경계선상의 미소 원호 길이

T : 절점이 생성될 경계선상 전체.

좀 더 보충하여 말하면, 식(2)에 의한 전체 경계선상의 총 절점 개수가 홀수 일 경우, 중요점의 각 구간들 중에서 밀도의 영향력이 가장 최소화되는 구간에 한 점을 추가시킴으로서 전체 해석 영역 내에서는 상대적으로 적은 오차를 반영케 하였다.

2.3 경계면 요소 생성

경계요소에 있어서는 민감도(Sensitivity)가 내부의 그것 보다 크기 때문에 요소의 크기가 원래의 형상과 비교하여 어느 한도 이내 일 경우, 분할을 하기 이전에 경계선상의 요소를 먼저 생성함으로써 경계선상의 요소에 대한 민감도를 고려하였다.

2.4 회귀적 분할 기준(Recursive Split Criteria)

경계선상에서의 절점과 경계면 안쪽에 절점들이 생성된 상태에서 각각의 블록 영역마다 회귀적으로 분할이 이루어지면서 내부에 절점들을 생성한다. 이 단계에서 무엇보다도 중요한 것은 절점들 중에서 분할하는데 사용 할 한 쌍의 절점들을 어떻게 선택하느냐 하는 것이다. Fig 1에서 보듯이 는 한 절점에서의 내각이 되며, γ_{ik} , γ_{jk} 는 각각 절점 i와 j에서의 분할각(Resulting Split Angle)이다. 여기서 다음과 같이 정의된 최적값 을 갖는 절점을 갖는 것이다.

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^2 \left\{ \left(\frac{\alpha_i}{2} - \gamma_{ik} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_j}{2} - \gamma_{jk} \right)^2 + w [(90 - \gamma_{ik})^2 + (90 - \gamma_{jk})^2] \right\} \quad (6)$$

여기서, w 는 요소의 내각이 이상적으로 생성되기 위한 가중치이다.

이 단계에서 다음과 같은 기준을 따른다.

- (1) 만약, α 가 45도 보다 작으면 식(6)에 사용될 수 없다. 즉, 절점 쌍에서 제외된다.
- (2) 만약, γ_{ik} , γ_{jk} 와 γ_{ik} , γ_{jk} 가 45도 보다 작으면 식(6)에 사용될 수 없다. 즉, 절점 쌍에서 제외된다.

- (3) 항목(1)과 (2)를 만족시키는 절점 쌍들 중에서 δ_{ij} 가 최소값을 가지는 절점 쌍을 찾는다.
- (4) 항목 (3)에서 구한 절점 쌍의 개수가 1개이상인 경우 분할선의 길이가 가장 최소가 되는 절점 쌍을 구한다.
- (5) 마찬가지로, 항목(4)에서 구한 절점 쌍의 개수가 1개이상인 경우 분할로 인하여 생성되는 양쪽 두 영역의 면적의 차이가 최소가 되는 절점 쌍을 구한다.

여기서 조심할 것은 분할 선이 기본 경계선과 교차하는 지를 검토하는 것이다. 만약, 교차가 이루어진다면 그 쌍은 후보에서 제외되고 다른 쌍을 찾게 된다. 한편, 분할 해야 할 한 영역에 있어서 영역의 경계선상의 절점의 개수가 많으면 많을수록 위의 기준 항목 (1)과 (2)를 통과한 후보 절점 쌍의 개수는 많아진다. 반면에, 영역의 경계선상의 절점의 개수가 적으면 적을수록 가장 합리적인 절점 쌍들을 찾는 데는 어려움이 따른다. 그래서 위의 5가지 기준을 만족시키는 절점 쌍을 찾지 못한 경우에는 회귀적인 패턴 매칭(Recursive Pattern Matching)과정으로 요소와 절점을 생성한다. 특히, 이러한 경우는 요소의 밀도차이가 큰 경우에 쉽게 발생함을 알 수 있었다.

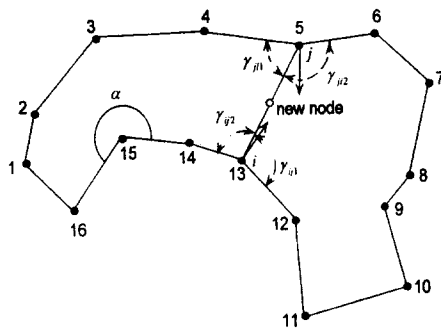


Fig 1. Splitting Criteria Scheme.

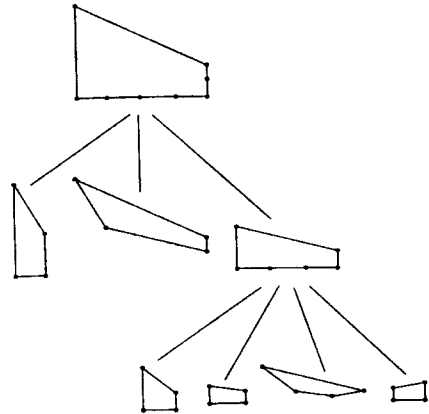


Fig 2. Recursive Pattern Matching.

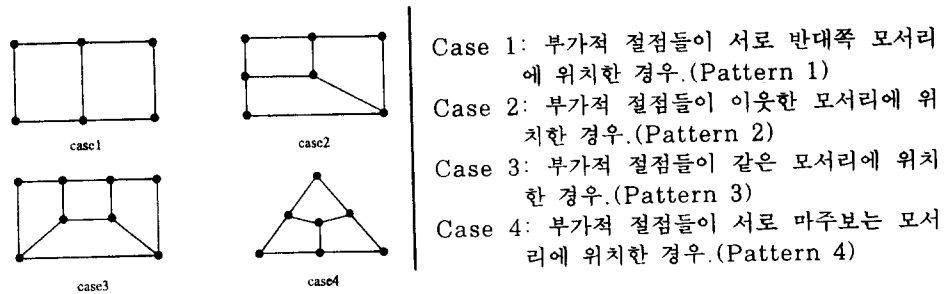


Fig 3. 6-Node Pattern Matching.

2.5 분할선상에서의 절점 생성

단계 2.3에서 일단 분할 선을 생성한 경우에, 2.2에서의 유사한 방법으로 내부의 분할 선 상위에 절점들을 밀도, 혹은 요소 크기에 맞도록 절점들을 생성한다. 다시 말해서, 식(5)에 의거하여 절점의 개수를 결정하고, 식(6)에 의해서 절점의 위치를 잡는다.

2.6 패턴 매칭

요소를 생성 할 영역에서 주어진 밀도, 또는 요소의 크기가 구현 되도록 분할과 절점의 생성이 이루어진 뒤에 6개의 절점을 갖는 영역이 생성되면, Fig 3과같은 패턴 매칭을 통해 위상학적(Topological)으로 적합한 요소망을 만든다. 패턴 매칭의 주된 기능은 복잡한 패턴을 주 패턴인 4절점 요소로 분해(Decomposition)하는 것이다.

2.7 형상 개선

이 단계에서는 Laplacian Smoothing 알고리즘을 이용하여 각 절점의 위치를 재조정하여 요소의 질을 높여서 최적의 요소를 생성한다. 이 과정은 수렴이 될 때까지 반복적으로 이루어진다.

3. 밀도 요소망 생성

요소망을 생성시키고자 하는 영역에서 밀도를 구현하는 방법은 기본 형상 위에 격자(grid)를 띄우고 형상 외 범위에서의 격자를 제거하여 만든 요소를 이용하여 밀도를 구현하는 방법과 유연 함수(smoothing function)를 사용하는 방법등, 여러 방법을 도입 할 수 있으나, 불필요한 격자(Grid)를 생성함으로써 나타나는 계산과정의 비효율성을 제거하기 위하여 형성-시뮬레이션(Forming-Simulation)의 초기단계의 요소망을 이용하는 기법을 사용하였다.

또한, 해석자가 기본 형상 위에 혹은 내부에 밀도 값을 정의하면 보간법을 이용하여 경계선 상에 있는 절점의 밀도 값을 계산 할 수 있다. 이렇게 경계선상의 밀도 값을 구한 후에, 이 값들을 경계 조건으로 다음과 같은 Laplace 방정식을 사용하여 모든 절점에서의 밀도 값을 구할 수 있다.

$$\nabla^2 U = 0, \text{ in } \Omega \quad (7)$$

여기서, U 는 밀도 값을 나타내고 Ω 는 전체 절점들의 영역을 나타낸다.
한편, 외곽선에서는

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma \quad (8)$$

(여기서, n : 경계선상 Γ 에서 수직인 방향 벡터, Γ : 전체 영역의 경계)

또한, 식(8)은 가중치 함수를 이 식 자체로 사용하여 부분 적분 한 후에 식(9)와 같은 적분치로 나타낼 수 있다.

$$\int \nabla^T U \nabla U d\Omega = 0. \quad (9)$$

$$KU = 0 \quad (10)$$

이 식(9)를 정렬하면 식(10)과같은 연립 방정식을 얻을 수 있다.

여기서, K 는 강성 행렬이며, 식 (8)을 만족하는 강제적 경계 조건(Forced Boundary Condition)을 식 (10)에 부여하여 각 절점에서의 밀도 값을 구한다. XY 좌표 계에서의 모든 절점에서 밀도 값이 부여되었으면 다음과 같이 표준화되는 (r,s)좌표계를 이용하여 전체영역에서의 밀도 값을 계산할 수 있다.

$$N_1 = (1+r)(1+s)/4$$

$$N_2 = (1-r)(1+s)/4$$

$$N_3 = (1-r)(1-s)/4$$

$$N_4 = (1+r)(1-s)/4$$
(11)

$$U^* = \sum_{i=1}^4 N_i U_i$$
(12)

여기서,

r, s : 표준화된 좌표계.

N_i : 주어진 (r, s) 좌표 계에서의 형상 함수(Shape Function)

U_i : 4개의 절점 중 i 번째 절점에서의 밀도값.

U^* : 4각형 요소 내에서 구하고자 하는 좌표에서의 밀도값.

4. 알고리즘 적용 예

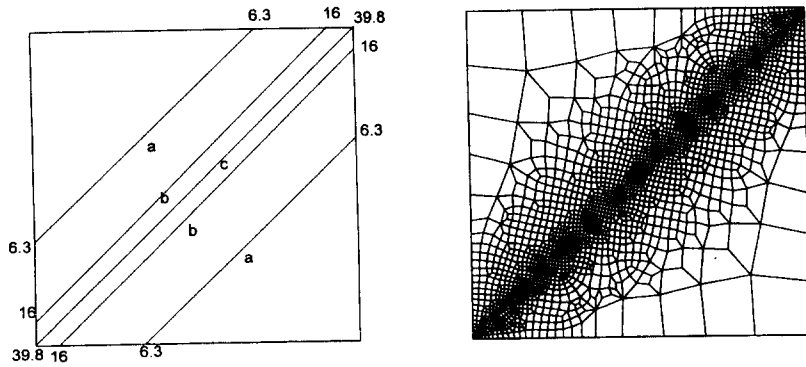


Fig 4. Density distribution of the specified mesh density and Resulting Mesh.

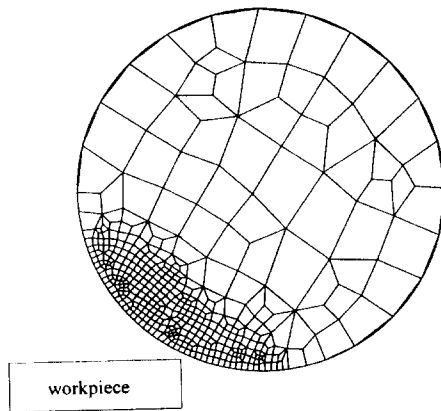


Fig 5. AMG for heat analysis(plate Rolling).

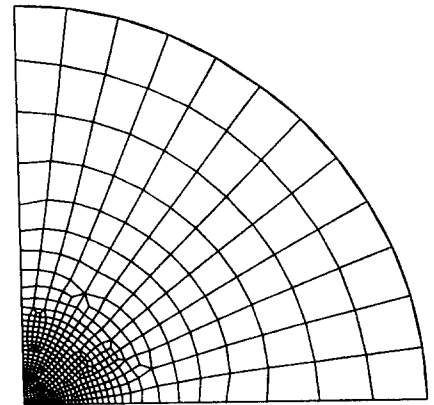


Fig 6. AMG for sheet metal forming.

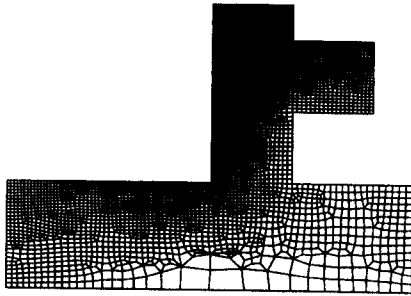


Fig 7. AMG with Density in Polygon.

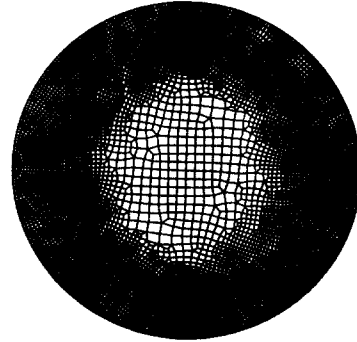


Fig 8. AMG with Density in Circle.

5. 결론

소성 가공 해석시 요소망을 생성/재생성하는 과정에는 많은 어려움이 따른다. 특히, 요소망의 생성에 있어서 국부적으로 큰 밀도 차를 나타내야 되는 형상에 있어서는 요소망 생성이 해에 미치는 영향은 크다고 할 수 있다. 본 연구에서는 4각형 요소망 생성 알고리즘으로 최적의 요소망을 생성하였다. 즉, 경계 면에서의 밀도에 따른 요소 생성시 가장 근사한 해법으로 요소망을 생성하였으며, 불필요한 밀도 격자들을 생성하지 않고, 직접 밀도 요소망을 구현하여 궁극적으로 시뮬레이션 단계 중 한 단계를 줄이는 효과를 보았다. 또한, 회귀적 분할 시 몇 가지 가중 함수를 추가시켜 분할선상의 위치를 이상화 시켰다. 여기에 패턴 메칭기법을 수정하고, 마지막으로 Laplacian Smoothing을 이용하여 요소의 형상을 개선하여 만족 할만한 요소망을 구현하였다.

참고 문헌

- (1) W. T. Wu, S. I. Oh, T. Altan, and R. A. Miller, "Automated Mesh Generation for Forming Simulation -I", manuscript presented in the 1990 ASME International Computers in Engineering Conference, Boston, Massachusetts, Aug. (1990).
- (2) K Ho-Le, "Finite element mesh generation methods: a review and classification" 1988.
- (3) J. C. Cavendish, "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for Finite Element Method," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol. 8, (1974).
- (4) A. Bykat, "Automatic Generation of Triangular Grids: I. Subdivision of General Polygon into Convex Subregions: II. Triangulation of Convex Polygon," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, (1976).
- (5) A. Bykat, "Design of a Recursive, Shape Controlling Mesh Generator," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1375-1390, (1983).
- (6) T. Pavlidis, *Algorithms for Graphics and Image Processing*, Computer Science Press, Inc., 1982.
- (7) G. Ghione, C. Rosati, "A New General-Purpose Two-Dimensional Mesh Generator Finite Elements, Generalized Finite Differences, And Moment Method Application," *IEEE Transaction On Magnetics* Vol 24, No 1, January 1988.
- (8) Ted D. Blacker, Michael B. Stephenson, Scott Canann, "Analysis Automation With Paving: A new quadrilateral Meshing Technique" Sandia National Laboratories (1990).
- (9) Roger J. Cass, Ray J. Meyers, Steven E. Benzey and Ted D. Blacker, "Generalized 3-D Paving: An automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm," *Int. J. For Numerical Method in Engineering*, Vol 39, 1475-1489 (1996).