한국소성가공학회 '97추계학술대회 논문집 pp.28~31

접촉을 고려한 보의 탄소성 좌굴진행 해석

김종봉*, 양동열*

* 한국과학기술원 기계공학과

An analysis of progressing buckles of thin compressed beam with contact treatment

Jong Bong KIM* and Dong Yol YANG*

* Department of Mechanical Engineering, KAIST

Abstract

Buckling analysis of thin compressed beam has been carried out. Pre-buckling and post-buckling are simulated by finite element method incorporating with the incremental nonlinear theory and the Newton-Raphson solution technique. In order to find the bifurcation point, the determinent of the stiffness matrix is calculated at every iteration procedure. For post-buckling analysis, a small perturbed initial guess is given along the eigenvector direction at the bifurcation point. Nonlinear elastic buckling and elastic-plastic buckling of cantilever beam are analyzed. The buckling load and buckled shape of the two models are compared.

1. 서론

구조물의 좌굴해석은 구조물의 설계시 매우 중요하다. 좌굴해석에서 많이 연구되는 것이 구조물이 견딜 수 있는 최대 하중과 그때의 좌굴 모드이다. 좌굴에 관한 연구는 여러가지로 분류될 수 있다. 재료에 따라서는 탄성 좌굴과 비탄성 좌굴, 그리고 연구 방법에 따라서는 이론적인 좌굴해석과 유한요소 좌굴해석등으로 분류할 수 있다. 지금까지의 좌굴에 관한 연구는 대부분 탄성의 영역에서 수행되어 왔다. 왜냐하면 대부분의 과굴은 탄성의 영역에서 발생하기 때문이다. 대표적인 것이 Euler 의 보 좌굴 해석이다[1]. 최근에는 Wang[2]이 임의의 단면을 가지는 보에 대해 회전(torsion), 워핑(warping), 그리고 전단(shear)을 고려하여 좌굴을 해석하였다. 보의 좌굴 외에도 Allen 과 Bulson[3]은 직사각형 판과 원형판 등의 좌굴에 대해서도 이론적으로 해석한 바 있다. 탄성의 범위를 지나서 소성의 영역에서도 좌굴의 연구가 많이 수행되었다. 이론적으로 수행된 소성 좌굴의 연구는 보완된 접선계수(Reduced tangent modulus)를 도입하여 탄성의 경우와 유사하게 진행되었다. [4,5]

유한요소법을 이용한 좌굴의 해석은 크게 다음의 두 가지로 분류될 수 있다. 하나는 결함이 없는 완전한 선형 탄성재료로 가정하고 고유치 해석을 수행하여 좌굴 하중과 좌굴 모드를 계산하는 고유치 해석(eigenvalue analysis, or bifurcation analysis)[6-9] 이고, 둘째는 구조물에 약간의 결함을 주고 해석을 수행하는 초기결함방법(initial imperfection method, or nonbifurcation method)[10-11]이다. 특성치해석에 의한 연구는 결함이 없는 완전한 재료를 가정하기 때문에 보다 이론적이고 논리적인 접근이지만, 재료와 구조물의 비선형성을 고려할 수 없다는 단점이 있다. 또한 좌굴 후의 변형 모드는 알 수 있지만 실제의 거동을 해석으로 계산할 수는 없다.

초기결함방법은 구조물에 임의의 결함을 주고 좌굴을 해석하는 방법으로 실제의 모든 구조물에 어느 정도의 결함이 있다는 현상에 맞춰 해가 더 잘 맞는 경향이 있다. 초기에 구조물에 결함을 주고 해석을 진행 시키기 때문에 재료와 구조물의 비선형성을 모두 고려할 수 있다. 그리고 해석이 계속해서 진행되기 때문에 좌굴의 후의 재료의 거동도 해석할 수가 있다. 하지만 처음에 준 인위적인 결함에 따라 해가 달라질 수 있기 때문에 결함에 따른 해의 거동에 관해서도 많이 연구되었다[10].

좌굴 후의 구조물의 거동에 관한 연구는 구조물의 특이점(singular point)을 지나서 계속해서 거동을 살펴보는 것이다. 특이점은 일반적으로 극점(limit point)과 분기점(bifurcation point)으로 나눌 수 있는데, 특이점이 어떤 것인가에 따라 그것을 통과하는 방법도 다를 수 있다. 예를 들면, 그림.1 에서 점 A 는 극점으로 하중을 증가시키면서 해석을 수행할 경우에는 강성 행렬의 행렬식 값을 0 으로 하지만, 변위를 증가 시키면서 해석을 수행하면 행렬식 값을 0 으로 하지 않는다. 하지만, 점 B 는 분기점으로 변위를 증가 시키면서 해석을 수행해도 행렬식 값을 0 으로 하기 때문에 해석이 불가능하다. 그래서 이를 통과하는 방법이 필요하다. 윤정환[12]이 해석한 그림.2 의 예제는 극점을 가지는 경우이고 그림.3 과 같은 보는 분기점을 가지는 예제이다. 특이점을 통과해서 해석을 진행하는 방법으로 normal plane method, arc length method[13,14]등이 잘 알려져 있다. 이 방법들은 초기에 구조물에 인위적인 결함을 주어 분기점을 극점으로 바꾼 후 해가 primary path 가 아닌 secondary path 를 따라 가도록 한다. 하지만 이 경우에는, 앞에서도 언급했지만, 초기의 결함에 따라 해가 크게 달라질 수 있고 정확하게 특이점을 찾는 데에도 어려움이 있다.

본 연구에서는 초기에 구조물에 결함을 주기 않고 강성 행렬이 특이점을 가질 때까지 해석을 진행하였다. 그렇게 함으로써 재료의 비선형성과 대변형에 따른 비선형성도 고려할 수 있었다. 그리고, 강성 행렬이 특이점을 가지게 되면 고유 벡터 방향으로 약간의 초기치(Initial guess)를 주어 해가 secondary path 를 따라 가도록 유도하였다. 그리고 증분은 변위에 기초하였기 때문에 arc length method 와 같은 특별한 알고리즘을 도입할 필요도 없었다. 제안된 알고리즘을 이용하여 보의 좌굴과 후 좌굴을 해석하였다.

2. 탄소성 유한요소 수식화

개량 라그란지 수식화(Updated Lagrangian Formulation)

탄소성 문제는 재료의 비선형성을 포함하고 있고, 또한 대부분 대변형이 이루어 지기 때문에 기하학적 비선형성도 포함하고 있다. 그래서 기준 좌표를 어디에 두느냐에 따라 수식화가 달라진다. 본 연구에서는 (n)-스텝에서의 해를 구하기 위해 (n-1)-스텝에서 얻어진 해를 기준 좌표계로 이용하는 개량 라그란지 방법을 따라 유한요소 수식화를 하였다. 개량 라그란지 방법을 이용하여 수식화를 하고, Newton-Raphson 방법으로 해를 풀기 위해 선형화 하면 다음과 같은 유한요소식이 얻어진다.[15]

$$\int_v \Delta\tilde{\varepsilon}\tilde{C}\delta\tilde{\varepsilon}dv + \int_v \tilde{\nabla}(\Delta\tilde{u})\tilde{\sigma}\tilde{\nabla}(\delta\tilde{u})dv = \tilde{F}^{ext} - \int_v \tilde{\sigma}\delta\tilde{\varepsilon}dv \tag{1}$$

이 식을 유한요소 이산화하여 행렬 형태의 식으로 쓰면 다음과 같다.

$$(\tilde{K}_{matl} + \tilde{K}_{geom})\Delta\tilde{u} = \tilde{F}^{ext} - \tilde{F}^{int} \tag{2}$$

여기에서 $\tilde{K}_{geom}$ 은 응력과 관련된 강성 행렬로써 좌굴을 해석할 때에는 매우 중요하다.

응력의 적분

구성방정식의 적분은 Willkins[16]가 제안한 순수 반경 복귀법(purely radial return mapping)을 이용하였다. 이 방법은 탄성으로 응력 추정자(elastic predictor)를 구한 후, 반경 방향의 소성 수정자(plastic corrector)로 응력을 항복면에 복귀시키는 방법이다. Von-Mises 항복식에 대해 이 방법으로 유도한 탄성 응력 추정자와 적분된 응력, 소성 변형율, 그리고 소성 유효 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij}^{T} = \sigma_{ij}^{t} + C_{ijkl}^{e}\Delta\varepsilon_{kl}, && \Delta\varepsilon_{ij}^{p} = \Lambda N_{ij} \\
&\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{T} - 2\mu\Lambda N_{ij}, && \bar{\varepsilon}^{<p>(t+\Delta t)} = \bar{\varepsilon}^{<p>(t)} + \sqrt{2/3}\Lambda \\
&\text{where,}\quad \tilde{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{\sigma}}\right)\Big/\left|\frac{\partial f}{\partial\tilde{\sigma}}\right|, && \Lambda = N_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}\Big/\left(1+\frac{H}{3\mu}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

일관화된 접선 계수

탄성 문제의 경우 응력-변형율 관계를 나타내 주는 접선계수 C^e가 일정하다. 그러나 탄소성 문제의 경우에는 일반적으로 탄성에서와 같은 관계가 성립하지 않고, 전체 변형율 중에서 탄성 변형율의 크기도 변수이기 때문에 접선계수도 다르게 주어져야 한다. 일반적으로 탄소성 문제에서 접선계수는 응력을 적분하는 방법과 일관된 방법으로 구해진다. 본 연구에서는 참고문헌[17]에 기술되어 있는 방법을 따라 탄소성 접선계수를 구하였다.

$$\tilde{C}^{ep} = \tilde{C}^{e} - \frac{\tilde{a}^T\tilde{C}^e\tilde{C}^e\tilde{a}}{\tilde{a}^T\tilde{C}^e\tilde{a} + H}, \qquad \text{where}\quad \tilde{a} = \frac{\partial f}{\partial\tilde{\sigma}} \tag{4}$$

3. 분기점 통과 방법

서론에서 기술한 바와 같이 변형 증분이 외력이 아닌 변위에 의해서 이루어 질 때에는 극점의 해석에는 어려움이 없다. 다시 말해서 극점을 통과할 때 강성 행렬의 행렬식 값이 0이 되지 않는다. 왜냐하면 극점에서 작은 변위의 증분이 주어진다 해도 그에 따른 하중(Load)은 하나로 결정되기 때문이다. 그러나 분기점에서는 변위 증분에 기초하여 해석을 수행하여도 강성 행렬이 특이성을 가지게 된다.

$$\mathrm{Det}(\tilde{K}) = \mathrm{Det}(\tilde{K}_{matl} + \tilde{K}_{geom}) = 0 \tag{5}$$

본 연구에서는 이 분기점을 찾기 위해 매 축차마다 강성 행렬의 대각선 값들을 관찰하였다. 강성 행렬이 특이성을 가지면 좌굴이 발생한 것으로 보고, 고유값(Eigenvalue) 해석을 수행하여 고유벡터를 계산하여 그 방향으로 초기 예측치(Initial guess)를 줌으로써, 해가 2차 경로(Secondary path)를 따라 가도록 하였다. 이렇게 함으로써 재료의 비선형성과 기하학적인 비선형성을 모두 고려하면서 좌굴 하중과 좌굴 후의 거동을 모두 구할 수 있었다.

4. 보의 좌굴 해석

제안된 좌굴 해석 알고리즘을 보의 좌굴 해석에 적용하였다. 단순한 보의 좌굴은 간단하고, 한 개의 좌굴 모드만이 나타난다. 본 연구에서는 좌굴의 모드가 이동되는 것을 살펴보기 위하여 그림.3 과 같이 임의로 경계조건을 주어 좌굴 모드의 변환을 유도하였다. 좌굴후에 보와 벽면의 접촉점에서의 마찰계수는 0 으로 하였다. 요소의 수가 좌굴의 모드와 하중에 미치는 영향을 살펴보기 위해 그림.3 에서와 같이 두 가지의 경우에 대해 해석을 수행하였다. 그림.3(a)는 20X2=40 요소로 격자를 구성하였고, 그림.3(b)는 40X5=200 요소로 격자를 구성하였다. 편의상 그림 3.(a)의 격자를 모델(a), 그림 3.(b)의 격자를 모델(b) 라고 하겠다. 재료의 물성은 다음과 같다.

Young's Modulus (E)	:	200Gpa
Plastic Hardening Coefficient (H)	:	20Gpa
Yield Stress (Y)	:	300Mpa
Poisson Ratio	:	0.33

그림.4 는 모델(a)를 탄소성으로 해석한 결과를 보여준다. 그림 4.(b)와 그림 4.(e)는 좌굴이 발생할 때 고유 벡터 방향으로 초기 예측값을 준 상태를 보여준다. 그림.5 는 모델(a)를 탄성으로 해석한 결과이다. 그리고 그림.6 은 모델(b)를 탄소성으로 해석한 결과이다. 1 차 좌굴 모드인 반 파장 sine 곡선으로의 좌굴 발생은 분기점 좌굴이기 때문에 고유치 해석에 의해 좌굴을 발생시켰다. 그리고, 1 차 좌굴모드에서 2 차 좌굴모드인 한 파장 sine 곡선으로의 전환도 분기점 좌굴이기 때문에 같은 방법으로 좌굴을 유도하였다. 그러나, 2 차 좌굴모드에서 3 차모드인 1.5 파장의 sine 곡선으로의 전환은 분기점 좌굴에 의하지 않고 스스로 진행되었다. 좌굴이 발생하는 시점과 형상은 거의 비슷하지만 약간의 차이가 존재함을 알 수 있다. 그림.7 에 나타낸 변위-하중 곡선을 살펴보면 좌굴이 발생하는 시점과 좌굴 모드의 진행 등이 잘 나타나 있다. 그리고 좌굴이 진행되면서 접촉의 변화에 따라 변하는 하중의 변화를 잘 묘사해 주고 있다. 그러나 격자의 수를 다르게 하여 해석한 두 결과가 크게 다른 좌굴 하중을 보여주고 있다. 이것은 유한요소법으로 좌굴 하중을 구할 때에는 필히 격자의 수에 따른 연구가 병행되어야 함을 보여준다.

5.결론

변형이 진행되는 도중에 강성 행렬을 관찰함으로써 좌굴발생의 여부를 알아보고, 또 고유치 해석을 통한 초기치 생성으로 좌굴 후의 재료의 거동을 해석할 수 있는 방법을 제안하였다. 예제로 접촉을 동반하는 보의 좌굴을 해석하였다. 예제의 해석으로부터 제안된 알고리즘이 보의 좌굴과 좌굴의 진행을 잘 나타내 주고 있음을 알 수 있었다. 그러나 격자의 수에 따라 좌굴이 발생하는 좌굴 하중은 큰 차이를 보여주고 있기 때문에 격자의 수에 관한 연구가 요구된다.

참고문헌

[1] F.P.Beer and E.R.Johnston, Jr., Mechanics of materials, McGraw-Hill , 1988

[2] Quanfeng Wang, "Lateral buckling of thin-walled open members with shear lag using optimization techniques", Int. J. Solids Structures, Vol. 34, No.11, pp1343-1352, 1997

[3] H.G.Allen and P.S.Bulson, Background to Buckling, McGraw-Hill , 1980

[4] M.Esslinger and B.Geier, Postbuckling behavior of structures, pp. 183-194, Springer-Verlag, 1975

[5] A. Cimetiere, A. Leger, "Some problems about elastic-plastic post-buckling", Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No.10, pp1519-1533, 1996

[6] J.-W.Zhang and W.B.Kratzig, "Buckling analysis of rectangular plates using a four-noded finite element", Computers and Structures, Vol. 50, No. 1, pp. 79-86, 1994

[7] S.L.Chan, " A nonlinear numerical method for accurate determination of limit and bifurcation points", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, pp. 2779-2790, 1993

[8] S.Reese and P.Wriggers, "A finite element method for stability problems in finite elasticity", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 38, pp. 1171-1200, 1995

[9] C.Carstensen and W.Wagner, "Detecting of symmetry breaking bifurcation point of symmetric structures", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, pp. 3019-3039, 1993

[10] F.G.Flores and L.A.Godoy, "Elastic postbuckling analysis via finite element and perturbation techniques. Part 1: Formulation", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 33, pp. 1775-1794, 1992

[11] H.Matthies and H.G.Payer, "Elastic-plastic post-buckling behavior of ship plating", Computers and Structures, Vol. 13, pp. 745-750, 1981

[12] J.W.Yoon, Finite element formulation based on incremental deformation theory for sheet metal forming of planar anisotropic materials, PhD thesis, KAIST, 1997

[13] E.Riks, "The applications of Newton's method to the problem of elastic stability", J. Appl. Mech., Vol. 39, pp.1060-1066, 1972

[14] Z.Zhou and D.W.Murray, "An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures", Computers and Structures, Vol. 55, No. 5, pp. 749-759,1994.

[15] K.J. Bathe, Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1987

[16] M.L Willkins, "Calculation of Elastic-Plastic Flow", Method of Computational Physics, Vol. 3, Academic press, 1964

[17] D.R.J. Owen and E. Hinton, Finite elements in plasticity : theory and practice, Pineridge press, 1980

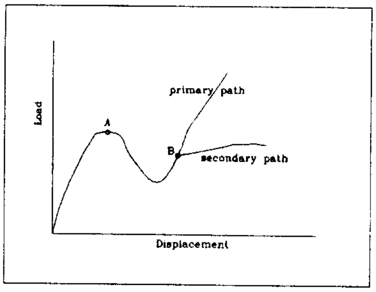

그림.1 극점과 분기점

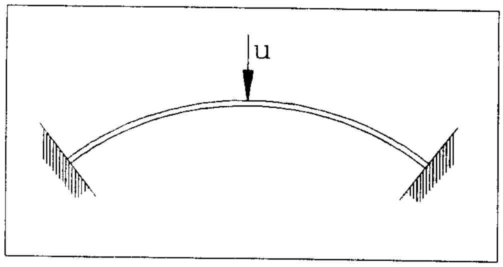

그림.2 극점을 나타내는 예제

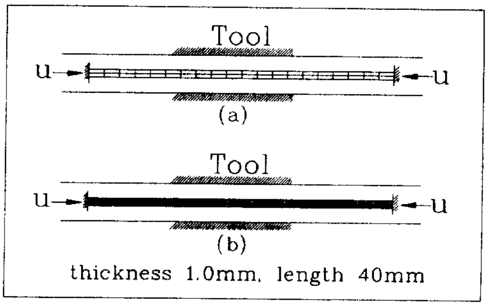

그림.3 좌굴 해석에 사용된 격자 모델

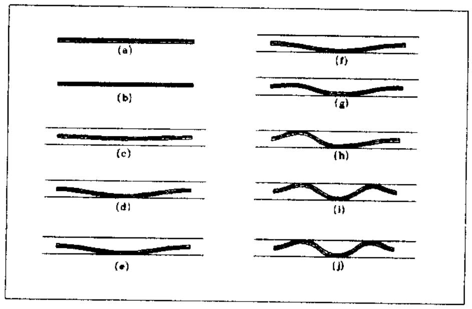
그림.4 모델(a)의 탄소성 좌굴 진행과정

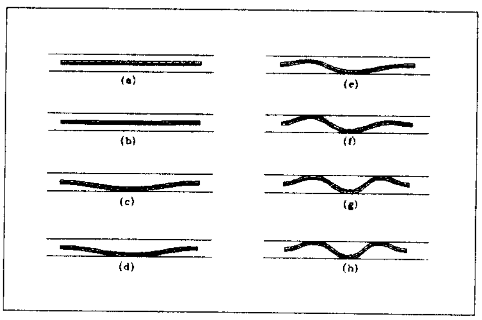
그림.5 모델(a)의 탄성 좌굴 진행과정

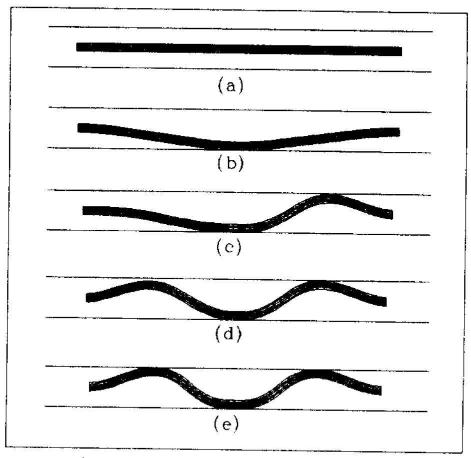

그림.6 모델(b)의 탄소성 좌굴 진행과정

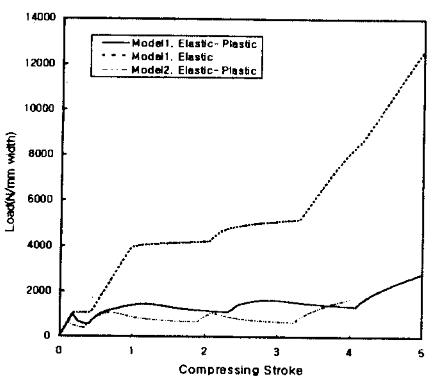

그림.7 변위-하중 곡선