

강소성 유한요소법에서 비압축성조건에 관한 비교 연구 A Comparative Study for Incompressibility of Rigid Plastic Finite Element Method

이상재* (부산대 대학원), 조종래 (해양대), 배원병 (부산대), 김영호 (부산대)
S.J. Lee (Graduate School Pusan Nat'l Univ.),
J.R. Cho (Korea Maritime Univ.),
W.B. Bae (Pusan Nat'l Univ.), Y.H. Kim (Pusan Nat'l Univ.)

Abstract

The governing functional in plastic deformation has to satisfy the incompressible condition. This incompressible condition imposed on the velocity fields can be removed by introducing either the Lagrange multiplier or the penalty function into the functional. In this study two-dimensional rigid plastic FEM programs using by Lagrange multiplier and penalty function are developed. A compression of cylinder and a spike forging are simulated to compare the data of loads, local mean stresses and reductions of volume.

1. 서론

소성가공은 소재의 손실과 생산에 소요되는 시간을 최소로 줄이면서 기계적 성질이 우수한 제품을 생산하는데 그 장점이 있다. 그러나 금속의 소성유동을 이해하는데 사용되는 수학적 모델은 복잡하며 그 완전해를 구하기란 매우 어렵다. 따라서 실제 해에 근접한 이상화된 수학적 모델의 사용이 불가피하며 그중에서도 유한요소방정식은 설계자에게 상세한 정보를 제공할 수 있고 생산과정에서 시행착오를 줄일 수 있어 유용하게 사용되고 있는 방법이다.[1,2] 그리고 오늘날에 와서 최종제품에 기계가공없는 정밀 소성가공의 요구가 증대됨에 따라 유한요소법의 중요성은 한층 더 증대되었다.

본 연구에서는 강소성 유한요소법의 기본방정식인 범함수에 비압축성 구속조건을 고려할 때 현재 대부분의 유한요소 프로그램에 채택하고 있는 벌칙함수를 이용하는 방법[3]과 활용도가 낮은 라그랑지 승수를 이용한 방법[4,5]으로 이를 실린더 압제형과 스파이크 단조공정에 응용하여 수치해석된 결과를 비교하였다.

2. 유한요소해석

2.1 수식화 과정

강소성 유한요소법은 다음과 같은 극값 원리(extremum principle)에 근거를 둔다. 외부 접촉력(traction force) f_i 가 정의된 표면 S_f 와 속도 v_i 가 정의된 나머지 표면 S_v 로 둘러싸인 체적 V 인 소성변형물체에 대해서, 실제 해는 식(1)과 같은 범함수(functional)의 최소치(minimum value)로 주어진다.

$$\phi = \int_V \bar{\sigma} \bar{\epsilon} dV - \int_{S_f} f_i v_i dS \quad (1)$$

이 때 범함수 ϕ 는 식(2)의 비압축성 구속조건을 만족해야 한다.

$$\bar{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (2)$$

식 (1)에서 v_i 는 비압축성 조건과 속도경계조건을 만족하는 임의의 가용속도장(admissible velocity field)이고, $\bar{\sigma}$ 와 $\bar{\epsilon}$ 은 각각 가용속도장 v_i 에서 구해진 유효응력 및 유효변형도율이다. 재료는 강소성체(rigid-plastic material)로써 Von Mises 항복조건과 유동법칙을 따르며 체적력

(body force)은 무시한다.

2.2 비압축성 조건의 고려

비압축성 구속 조건은 범함수에 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)나 벌칙함수(penalty function)를 도입함으로써 해결된다. 이렇게 하면 구속조건을 만족하는 속도장에서의 최소치문제가 구속 조건을 따로 만족하지 않아도 되는 정류치 문제(stationary value problem)로 바뀌게 되어 문제를 다루기 쉽게 된다. 본 연구에서는 라그랑지 승수와 벌칙함수를 사용하여 구속조건이 없도록 범함수를 수정하였다.

$$\phi = \int_V \bar{\sigma} \bar{\epsilon} dV + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_v dV - \int_{S_i} f_i v_i dS \quad (3)$$

$$\phi = \int_V \bar{\sigma} \bar{\epsilon} dV + \frac{K}{2} \int_V \dot{\epsilon}_v^2 dV - \int_{S_i} f_i v_i dS \quad (4)$$

여기서, v_i 는 속도 경계조건은 만족하나 비압축성조건은 만족할 필요가 없는 임의의 속도장이고 λ 는 라그랑지 승수이고 K 는 벌칙상수이다. 위식에서 각 항의 물리적인 의미는 첫 번째항은 내부 변형 에너지율, 두 번째항은 체적변화 에너지율이고 세 번째항은 외부 입력 에너지율을 나타낸다. 물리적 의미로부터 라그랑지 승수와 벌칙상수에 대한 평균 유동응력 σ_m 의 관계가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \lambda = \left(\frac{K}{2}\right) \dot{\epsilon}_v \quad (5)$$

2.3 유한요소분할화

비압축성 조건으로 라그랑지 승수와 벌칙함수를 각각 적용한 범함수를 요소분할화하면,

$$\phi \cong \sum_{m=1}^M [\phi_1^{(m)} + \phi_2^{(m)} - \phi_F^{(m)} + \phi_I^{(m)}] \quad (6)$$

$$\phi_1^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \bar{\sigma} \bar{\epsilon} dV$$

$$\phi_2^{(m)} = \lambda^{(m)} \int_{V^{(m)}} \dot{\epsilon}_v dV, \text{ 혹은 } \phi_2^{(m)} = \frac{K}{2} \int_{V^{(m)}} (\dot{\epsilon}_v)^2 dV$$

$$\phi_F^{(m)} = \int_{S_i^{(m)}} F_i v_i dS$$

$$\phi_I^{(m)} = - \int_{S_i^{(m)}} \left(\int_0^{|v_i|} f_i dv_i \right) dS \text{ 이다.}$$

여기서 M 은 요소수이고 $\lambda^{(m)}$ 은 각각의 요소에서 일정하다고 가정하고 K 는 벌칙상수이다. 두 개의 ϕ_2 중의 좌측항은 비압축성조건으로 라그랑지안 승수를 적용한 예이고 우측항은 벌칙함수를 적용한 예이다. 그리고 위식을 절점에 대한 속도로 표시하여 선형화시켜 고차항을 무시하면 다음과 같은 각각의 행렬 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} & \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \lambda^{(\beta)} \partial v_\alpha} \\ \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial v_\beta \partial \lambda^{(\gamma)}} & \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \lambda^{(\beta)} \partial \lambda^{(\gamma)}} \end{bmatrix}_{(n-1)} \begin{pmatrix} \Delta v_\beta \\ \lambda^{(\beta)} \end{pmatrix}_{(n)} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v_\alpha} \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \lambda^{(\gamma)}} \end{pmatrix}_{(n-1)} \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} \right]_{(n-1)} (\Delta v_\beta)_{(n)} = - \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v_\beta} \right)_{(n-1)} \quad (8)$$

식(7)은 라그랑지승수를 써서 나타낸 것이고 식(8)은 벌칙함수를 이용한 것이다. 현재 단계의 절점속도 $\mathbf{V}_{(n)}$ 은 다음식에 의해서 얻어진다.

$$\mathbf{V}_{(n)} = \mathbf{V}_{(n-1)} + \beta \Delta \mathbf{V}_{(n)} \quad (9)$$

여기서, β 는 해의 발산을 막기위한 감속계수($0 \leq \beta \leq 1$)이다.
 (9)식의 계산은 다음조건이 만족할때까지 반복수행된다.

$$\| \Delta \mathbf{V}_{(n)} \| / \| \mathbf{V}_{(n)} \| \leq \epsilon \quad (10)$$

여기서, $\| \cdot \|$ 는 유클리디언 벡터 놈(Euclidean vector norm)이고 ϵ 는 매우 작은 상수이며 본 연구에서는 1×10^{-5} 으로 두었다.

3. 유한요소해석 결과 및 고찰

벌칙함수와 라그랑지안 승수를 이용하여 개발된 프로그램을 가지고 실린더 단순 업세팅과 스파이크 단조에 적용하여 비교하였다. 피성형체의 재료는 업세팅인 경우 AI2024와 ANSII015를 선정·비교하였고 스파이크 단조에 있어서는 AI1100를 선정하였다. 업세팅의 해석의 경우 수행 조건은 Table 1에 나타내었고, 높이*지름이 20*20(mm)인 모재를 사용하였다. 스파이크 단조해석의 경우 높이*지름이 40*30(mm)를 사용하였다.

3.1 유한요소 해석결과

실린더 업세팅해석의 초기 격자모양은 Fig.1 (a)에서 나타나고 있다. 좌우가 축대칭이고 상하 대칭이기 때문에 오른쪽 상단부분만 해석하였다. 높이 감소율 80%까지 해석하였고(Fig.2) 해석된 결과중 높이 감소율에 따른 하중의 변화, 국부적인 평균응력, 체적감소율을 데이터로 정리하여 그래프로 나타내 보았다. DEFORM, 벌칙함수와 라그랑지 승수를 이용한 프로그램을 사용하여 결과를 비교하였다. 또한 마찰계수 $m=0.15$, $m=0.7$ 에 대하여 높이 감소율에 따른 하중의 변화, 국부적인 평균응력, 체적감소율을 서로 비교하여 보았다.

Fig.3는 ANSI 1015에 대하여 위의 세가지 방법으로 모의해석하여 나타난 하중의 변화그래프이다. 세가지 방법 모두 각각 마찰계수 $m=0.15$ 와 $m=0.7$ 에 대해서는 거의 같은 하중이 나옴을 알 수 있다. 역시 AI2024에 대해서도 같이 나왔다.

Fig.4은 ANSII015에 대하여 높이 감소율에 따른 국부 평균응력 그래프이다. 평균응력은 실린더 상단 중앙부분 요소①에서 구한값이다.(Fig.1(a)) 여기서는 DEFORM과 라그랑지승수를 이용한 방법과 평균응력값이 비슷하게 나옴을 알 수 있고 벌칙함수를 이용한 방법으로 나온 평균값과는 차이가 남을 알 수 있다. 80% 감소시에는 약 1000MPa 값의 차이가 나고 있다. AI2024에서도 마찰과 재료의 유동응력과 압하율이 클수록 차이가 많이 남을 알 수 있었다.

Fig.5도 역시 ANSII015에 대하여 해석하여 높이 감소율에 따른 체적감소율을 나타내었다. 여기또한 DEFORM 및 벌칙함수를 이용한 체적감소율과 라그랑지승수를 이용하였을때와 80%높이 감소시 상당한 차이를 보였다. 라그랑지승수를 이용한 방법은 체적감소율이 1%내에 있고 나머지 두방법으로 나온 값은 5~7%로 나타나고 있다. AI2024에 대해서도 수행한 결과로 유동응력이 크고 압하율이 클수록 체적손실이 많이 일어남을 알 수 있다. 그리고 매 단계별 압하깊이를 1/5로 줄였을 때, 라그랑지승수를 이용한 방법이 체적 감소가 거의 일어나지 않고 있음을 알 수 있다.(Fig.6) 또한 벌칙상수를 100배로 늘인 결과로 체적감소율이 줄어듦을 알 수 있다. 스파이크 단조에 있어서도 같은 양상이 나옴을 확인할 수 있었다.

3.2 고찰

해석 결과로 하중은 세가지 방법 모두 일치하고 있으며, 평균응력은 라그랑지승수를 이용한 것과 DEFORM의 경우는 비슷한 경향을 나타내고 있지만 벌칙함수를 이용했을때는 높게 나타나고 있다. 체적 손실은 벌칙함수를 이용했을때 훨씬 크게 발생하였다.

벌칙상수 K값에 따라서 내부요소의 변형형상, 체적감소, 응력분포가 다르게 나타났다. 그러나 수행시간은 벌칙함수를 이용한 방법이 라그랑지를 이용한 방법보다 1.5배정도 빠르고 요소분할 수가 많을수록 차이가 많이 남을 알 수 있다. 그러나 현재 컴퓨터의 수행속도가 빨라지고 있고 정밀단조의 전산모의해석에서 요구되는 정확한 체적계산과 평균응력계산에는 라그랑지승수를

이용하는 것이 공정에 따라서는 유리할 것으로 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 비압축성 구속조건을 고려하는데 있어서 벌칙함수와 라그랑지 승수를 이용한 프로그램을 개발하여, 업세팅과 스파이크 공정에 적용하여 수치해석된 데이터를 비교하였다.

(1)라그랑지승수를 이용한 것과 벌칙함수를 이용한 것에서 단조하중을 비교한 결과 거의 차이가 없었다. 그러나 국부적으로 정수압응력은 마찰과 유동응력이 클수록, 높이 감소율이 클수록 차이가 많이 났다. 그리고 체적감소율도 유동응력과 높이 감소율이 클수록 현저한 차이가 남을 알 수 있다.

(2)벌칙함수를 이용할 때는 벌칙함수를 적절히 선택할 필요가 있으며, 매 단계별 증분량도 체적 변화에 큰 영향이 있다.

(3)앞으로 더욱더 많은 여러 가지 공정에 대한 비교와 현재 2차원 비교에서 3차원 비교로 확장하여, 고도의 정밀성이 요구되는 단조와 정밀 밀폐형 단조의 공정해석에 라그랑지승수를 적용하고자 한다.

5.참고 문헌

- [1] J.J.Park, N.Rebello and S.Kobayashi, "A New Approach to Preform Design in Metal Forming with the Finite Element Method," Int. J. Mach. Tool Des.Res., vol.23, No.1, pp 71-79, 1982
- [2] J.H.Yoon and D.Y.Yang, "A three-dimensional rigid-plastic finite element analysis of bevel gear forging by using a remeshing technique, Int. J. Mech. Sci., Vol.32, pp227
- [3] O.C.Zienkiewicz and P.H.Godbole, "A Penalty fuction approach to problems of plastic flow of metals with large deformation," J. Strain Analysis 10, 1975, 180-181
- [4] C.H.Lee and S.Kobayashi, "New solutions to rigid-plastic deformation problems using matrix method," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind. 95, 1973, 865-873
- [5] S.Kobayashi, C.H.Lee, S.I.Oh, "Workability theory of materials in plastic deformation processes," USAF Technical Report AFML-TR 73-192, 1973

Workpiece material	A12024/ANSI1015	
Flow stress	$\bar{\sigma} = 20.453 \bar{\epsilon}^{0.16} (\text{MPa}) \quad \bar{\sigma} = 29.1861 \bar{\epsilon}^{0.16} (\text{ksi})$	
Process definition	Incremental	
	Isothermal	
	Axisymmetric	
Iteration controls	Newton-Raphson	
Velocity convergence error limit	1E-10	
Force convergence error limit	1E-10	
Penalty constant	5*10 ⁻⁵ , 5*10 ⁻⁷	
Die control	Punch speed	0.1(min/sec)
Inter object data friction condition	m=0.15, m=0.7	
Simulation condition	step size	0.05, 0.01
	total mesh number	99

Table.1 Process condition for upsetting FEM analysis

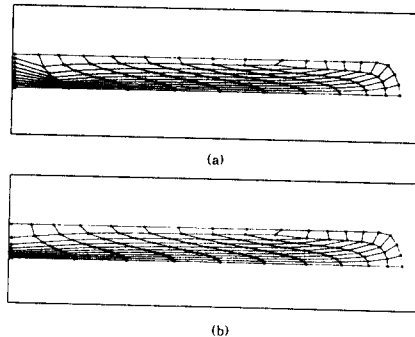
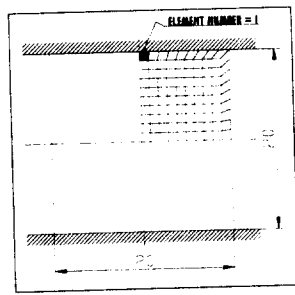
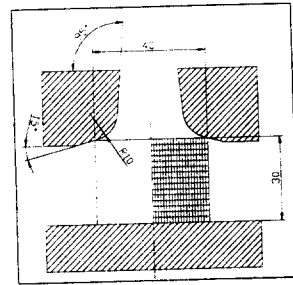


Fig. 2 Deformed mesh at the 80% height reduction with (a)penalty function (b)Lagrange multiplier



(a)



(b)

Fig. 1 Initial mesh at (a) cylinder upsetting (b) spike forging

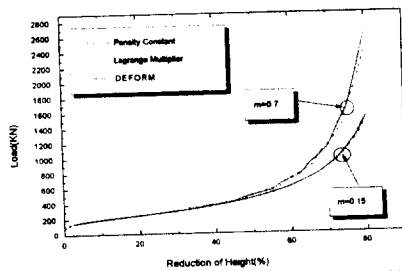


Fig. 3 Comparison of computed upsetting load with height reduction (ANSI1015, $m=0.15, 0.7$)

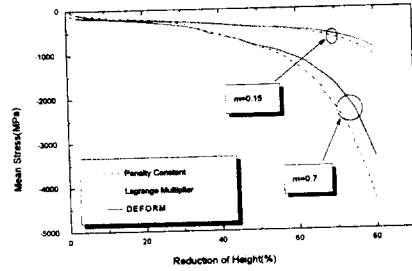


Fig. 4 Comparison of computed local mean stress with height reduction (ANSI1015, $m=0.15, 0.7$)

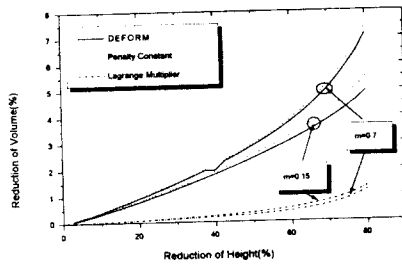


Fig. 5 Comparison of computed volume loss for upsetting with height reduction (ANSI1015, $m=0.15, 0.7$)

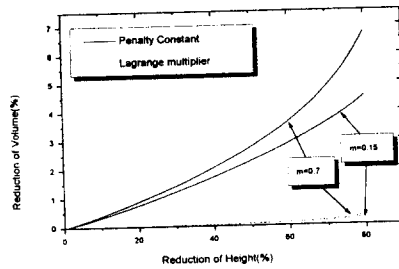


Fig. 6 Comparison of computed volume loss for upsetting with height reduction when time step is 0.01 (ANSI1015, $m=0.15, 0.7$)

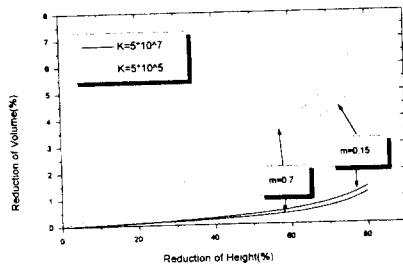


Fig. 7 Comparison of computed volume loss for upsetting with height reduction between the different Penalty Constants(K) (ANSI1015, $m=0.15, m=0.7$)