

반복적 열하중을 받는 열탄점소성 구조물의 진동 특성 연구

0김덕관*, 김승조*

On Vibration Characteristic Study of Thermo-Visco-Plastic Material Under Periodic Thermal Loading

Deog Kwan Kim, Seung Jo Kim

ABSTRACT

In this paper, vibration characteristics are considered about thermo-visco-plastic material under periodic thermal loading. When in high temperature region, thermo-visco-plastic structure has a periodic thermal loading, it is very important in an accumulated structure like a spacestation. to investigate vibration characteristic , Stress-strain characteristic is considered in various 2-D model by finite element method.

1. 서론

열유도 진동 특성은 구조물의 수가 증가할수록 심각한 문제를 야기시킨다. 특히 이러한 현상은 우주 구조물에서 종종 일어나는 것으로 알려져 있다. 구조적인 의미에서 이러한 진동은 미미한 것에서부터 물질항복과 뒤따르는 구조 파괴를 모두 포함한다. 특히 고온 영역에서는 구조집적체에 열 유도 진동 효과는 아주 위험할 수 있다. 극초음속 비행체에서 엔진 스트럿과 카울에서 생기는 서로 다른 충격과 충돌로 인하여 극심한 천이 온도 구배가 생기고, 상승된 온도 영역에서는 열 진동을 포함하고 있고서 이 온도 영역에서 재료는 점소성 현상을 나타내는 경우가 많다. 본 논문은 열탄점소성 구성 방정식에 대한 이론이 소개되고 점소성 변형도를 구하는데 필요한 Bodner - Partom 구성 모델을 소개한다. 다음으로 열탄점소성 유한 요소 모델이 기술되고 점소성 해법이 기술된다

2. 이론

2.1 열탄점소성 구성 방정식

열탄점소성 구성 방정식은 변형도 구성 방정식과 비탄성 변형도에 대한 구성 방정식으로 구성된다. 미시역학적인 기본 가정하에 이러한 방정식들이 이루어졌는데 먼저 변형도 구성 방정식을 살펴보자. 변형률은 탄성·열팽창·소성 또는 점소성 성분으로 직접 가산 분해할 수 있으므로 아래와 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^t + \dot{\epsilon}^p \\ &= \mathbf{A} \dot{\sigma} + \alpha \dot{\theta}_+ + \dot{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{A} 는 평면 응력 상태에서의 탄성 유연도 (compliance) 텐서이고, α 는 열팽창 텐서이다. $\dot{\theta}_+$ 는 온도 증분률이고 $\dot{\sigma}$, $\dot{\epsilon}^p$ 는 각각 응력과 점소성 변형도율을 나타낸다. 다음으로 비탄성 변형도에 대한 구성 방정식(bodner-Partom Constitutive Equation)을 살펴보자.

재료의 소성 거동이 하중의 시간의 변화율에 의존하지 않거나, 하중속도가 일정한 경우의 점소성

* Department of Aerospace Engineering Seoul

거동을 묘사하기 위해서는 기존의 Prandtl-Reuss 소성 유동 법칙(flow law)을 그대로 사용할 수 있다. 반면에 소성 거동이 하중의 시간 변화율에 의존하는 현상을 완전히 기술하려면, 그 동안 많이 사용되어진 내부 상태변수(internal state variable) 형태의 단일화(unified) 점소성 모델중 하나인 Bonder와 Partom [1]에 의한 모델을 사용할 수 있다. 이 단일화 모델은 항복 조건이나 하중 또는 제하 상태를 별도로 필요로 하지 않는 장점을 가지고 있으며, 이방성 경화와 온도 효과를 고려할 수 있도록 확장되기도 하였다. 구체적으로는 유동 법칙, 소성 이동 방정식(kinetic equation), 내부 상태변수에 대한 진전 방정식(evolution equation)으로 이루어져 있다. 등방성 경화(isotropic hardening)를 고려한 각 방정식에 대한 형태는 아래와 같다.

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma S = \gamma \left[\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1} \right] \quad (2)$$

$$D^p_2 \equiv \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \\ = \gamma^2 J_2 = D_0^2 \exp \left[- \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right] \quad (3)$$

$$\dot{Z} = m_1 (Z_1 - Z) \sigma : \dot{\epsilon}^p - A_1 Z_1 \left(\frac{Z - Z_2}{Z_1} \right)^n \quad (4)$$

$$Z|_{t=0} = Z_0 \quad (5)$$

위 식에서 S 는 편차응력, J_2 는 S 의 2차 불변량(invariant), Z 는 등방성 경화를 나타내는 내부 상태변수이다. 그리고 D_0 , Z_0 , Z_1 , Z_2 , m_1 , A_1 , r_1 , n 은 등방성 재료에 대한 점소성 상수이다. 이 중에서 Z_0 , Z_2 , A_1 , r_1 , n 의 값은 재료 온도에 따라 변하게 된다.

3. 지배방정식

여기서는 여러 장방정식과 에너지 보존 방정식의 형태를 제시하게 된다. 이 때 부가적으로 요구되는 경계 조건과 초기 조건을 함께 정리함으로써, 재료에 대한 완전한 초기·경계치 문제를 설정하였다.

(연속체 역학 법칙 1) 질량 보존의 법칙

(연속체 역학 법칙 2) 선운동량 보존 법칙

$$\nabla \cdot \sigma + f = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (6)$$

(연속체 역학 법칙 3) 각운동량 보존 법칙

$$\sigma = \sigma^T \quad (7)$$

(연속체 역학 법칙 4) 열역학 제2법칙

$$\rho \dot{\epsilon} = \sigma : \dot{\epsilon} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (8)$$

(연속체 역학 법칙 5) 열역학 제2법칙

$$\rho \dot{\zeta} = \rho \dot{\eta} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho \frac{\dot{r}}{\theta} \geq 0 \quad (9)$$

이제 열탄점소성 거동을 보이는 판 형태의 구조물이 R^3 공간상에서 $\partial\Omega$ 로 둘러싸인 Ω 라는 영역을 차지하고 있다고 생각하자. 이러한 계에 대한 초기·경계치 문제(initial-boundary value problem)를 설정하는데 필요한 지배 방정식(G; governing equation)들을 체계적으로 정리하여 보았다.

G1. 운동 방정식

$$\nabla \cdot \sigma + \bar{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (10)$$

G2. 에너지 보존 방정식

$$\rho c_v \dot{\theta}_+ = -\theta \mathbf{a} : \mathbf{A}^{-1} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) + \xi \sigma : \dot{\epsilon}^p \\ + \nabla \cdot (\mathbf{x} \cdot \nabla \theta_+) + \rho \bar{r} \quad (11)$$

G3. 변위-변형도 관계식

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\nabla \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^T] \quad (12)$$

G4. 변형률 구성 방정식

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{A} \dot{\sigma} + \mathbf{a} \dot{\theta}_+ + \dot{\epsilon}^p \quad (13)$$

G5. 열점소성 구성 방정식; Bodner - Partom이론

완전한 초기·경계치 문제의 설정을 위해서는, 다음과 같은 역학적 또는 열적 변수들에 대한 초기 조건(I; initial condition)과 경계 조건(B; boundary condition)이 필요하다.

I. 초기 조건

$$\sigma|_{t=0} = 0, \quad \epsilon|_{t=0} = 0, \quad \epsilon^p|_{t=0} = 0$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = 0$$

$$\theta_+|_{t=0} = 0$$

$$Z|_{t=0} = Z_0; \quad \text{other variables} = 0 \quad (14)$$

B. 경계 조건

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_U$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_F$$

$$\theta_+ = \bar{\theta}_+ \quad \text{on } \Gamma_\theta$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_A \quad (15)$$

4. 유한요소 정식화

4.1 운동 방정식의 이산화

본 절에서는 운동 방정식을 다루는데 있어서 가상 일의 원리(principle of virtual work)를 적용하였다. Ω 에서의 지배 방정식 G_I 과 Γ_F 에서의 경계 조건이 역학적 힘의 평형을 나타내는 조건이다. 그리고 가상 변위(virtual displacement)는 B에서와 같이 변위가 직접적으로 주어진 기하학적 경계면 Γ_U 를 제외한 전 영역에 가해진다.

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + \bar{f} - \rho \bar{u}) \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_F} (\mathbf{n} \cdot \sigma - \bar{t}) \cdot \delta u d\Gamma_F = 0 \quad (16)$$

위 식에서 첫째 항은 미소 체적에 작용하는 내력, 체적력, 관성력에 의한 가상 일을 적분한 것이다. 둘째 항은 적층판 경계에서의 면적력(surface force)에 의한 가상 일을 의미한다.

다음 단계로서 발산 정리(divergence theorem)와 G3에서의 변위-변형도 관계식을 이용하여 정리한 다음 보간 행렬을 이용하여 전체 좌표계인 xy 좌표에 대한 절점 변위 $\{U\}$ 로 나타낼 수 있다. 보간 행렬들로 운동 방정식인 (16)을 공간 좌표에 대해 이산화시키면, 다음과 같은 형태의 비선형 방정식을 얻게 된다.

$$[M_U]\{\dot{U}\} + \{F_U\} - \{R_U\} = \{0\} \quad (17)$$

시간에 대한 2계 미분 방정식인 식(17)을 풀기 위해서는, 먼저 전체적인 시간 구간을 유한한 간격 Δt 로 분할하여 이산화시키고 증분시켜 나가면서, 원하는 단계까지 시간에 대한 적분을 수행한다. 여기서는 시각 t 에서 Δt 만큼 떨어진 $t + \Delta t$ 에서의 속도와 변위를 구하기 위하여, Newmark의 일정 평균 가속도 방법의 시간 적분 기법을 사용하였다.

$$[M_U]\{\overset{t+\Delta t}{U}\} + \{\overset{t+\Delta t}{F_U}\} - \{\overset{t+\Delta t}{R_U}\} = \{0\} \quad (18)$$

3장의 G4에서와 같이, 응력의 증분량인 $\{\Delta\sigma\}$ 를 탄성, 열팽창, 점소성 변형도에서 기인하는 성분들로 나눌 수 있다.

$$\{\Delta\sigma\} = [A]^{-1}(\{\Delta\varepsilon\} - \{\alpha\}\Delta\theta_+ - \{\Delta\varepsilon^p\}) \quad (19)$$

이 식의 우변에는 기준 온도로부터의 온도 변화량인 θ_+ 가 나와 있다. 따라서 이 시점에서 온도장을 전체 좌표계에 대한 절점 온도인 $\{\theta\}$ 로 보간하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\{\overset{t+\Delta t}{F_U}\} = [K_U]\{\Delta U\} - [A_\theta]\{\Delta\theta\} - \{\Delta P_U\} + \{\overset{t}{F_U}\} \quad (20)$$

한편 식(18)에서 외력에 관련된 행렬은 다음과 같다.

$$\{\overset{t+\Delta t}{R_U}\} = \int_{\Omega} [H_U]^T \{\overset{t+\Delta t}{r}\} d\Omega + \int_{\Gamma_F} [H_U]^T \{\overset{t+\Delta t}{t}\} d\Gamma_F \quad (21)$$

위 식들을 대입하면 다음과 같은 최종적인 식이 유도된다.

$$[\overset{t+\Delta t}{K}_U]\{\Delta U\} = \{\overset{t+\Delta t}{F}_U\} \quad (22)$$

좌변과 우변에서 ($\overset{\wedge}{}$) 기호가 쓰여진 두 행렬은 유효 강성(effective stiffness)과 유효 하중(effective load)을 의미하는 행렬이다.

$$[\overset{t+\Delta t}{K}_U] = [K_U] + \frac{4}{\Delta t^2}[M_U] \quad (23)$$

$$\{\overset{t+\Delta t}{F}_U\} = \{\overset{t+\Delta t}{R}_U\} - \{\overset{t}{F}_U\} + [A_\theta]\{\Delta\theta\} + \{\Delta P_U\} + [M_U]\left(\frac{4}{\Delta t}\{\overset{t}{U}\} + \{\overset{t}{U}\}\right) \quad (24)$$

4.2 에너지 보존 방정식의 이산화

에너지 보존 방정식을 다루는 경우에는, Galerkin의 방법을 가지고 정식화를 시작하였다. 여기서는 열원 r 에 의한 에너지의 발생이나 손실은 포함하지 않기로 한다.

$$\int_{\Omega} \rho c_v \dot{\theta}_+ \delta\theta d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{x} \cdot \nabla \theta_+) \delta\theta d\Omega = - \int_{\Omega} \theta \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{A}^{-1} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \delta\theta d\Omega + \int_{\Omega} \xi \sigma : \dot{\varepsilon}^p \delta\theta d\Omega \quad (25)$$

여기서 각 적분 항에 나타난 $\delta\theta$ 는 전체 영역 Ω 에 걸쳐 정의되어 있는 시험 함수(test function)이다. 이 함수는 주어진 영역에서 연속성(continuity)이 보장되어야 하며, 또한 온도 경계 조건인 B3을 만족하기 위하여 경계 Γ_θ 에서 영(zero)의 값을 갖게 된다. 이차원 재료의 온도장과 온도 구배들을 xy 좌표계에 대하여 유한요소 보간을 하게 된다. 그러면 1계 시간 변화율 형태(rate form)의 연립 방정식이 유도된다.

$$[M_\theta]\{\dot{\theta}\} + [K_\theta]\{\theta\} = \{\dot{E}_\theta\} + \{\dot{P}_\theta\} \quad (26)$$

여기서는 절점에서의 온도 행렬 $\{\theta\}$ 가 주 변수 역할을 하고 있다. 좌변에 사용된 두 종류의 행렬은 열용량(heat capacitance) 행렬과 열전도(thermal conductivity) 행렬을 의미한다. 또한 우변에 나타난 각각의 항들은 탄성·열팽창 변형도와 점소성 변형도에서 기인하는 열기계학적 완전 연계 효과를 나타내는 에너지 성분이다.

시간에 대한 1계 미분 방정식인 식 (26)의 수치 시간 적분을 위하여, 운동 방정식의 경우와 마찬가지로 전체적인 시간 구간을 먼저 유한한 간격 Δt 로 분할한다. 그리고 각각의 시간 증분 구간을 기준으로 가중 잉여 접근법 (weighted residual approach)을 적용하여, 가중 함수 (weighted function)인 w 가 도입되었다.

이외에도 시각 t 에서 $t+\Delta t$ 까지 온도가 선형적으로 변화한다고 가정한다. 이러한 가정하에 에너지 보존 법칙을 기술하는 최종적 연립 방정식을 이끌어 낼 수 있다.

$$[{}^{t+\Delta t}K_{\theta}]\{\Delta\theta\} = \{{}^{t+\Delta t}F_{\theta}\} \quad (27)$$

여기서

$$[{}^{t+\Delta t}K_{\theta}] = [M_{\theta}] + \mu \Delta t [K_{\theta}] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \{{}^{t+\Delta t}F_{\theta}\} &= \Delta t \int_t^{t+\Delta t} (\{E_{\theta}\} + \{P_{\theta}\}) w(\tau-t) d\tau \\ &\quad - \Delta t [K_{\theta}]\{\theta\} \end{aligned} \quad (29)$$

에너지 보존 방정식에 관련된 여러 행렬들을 실제로 계산하는데 있어서는, 운동 방정식의 경우처럼 등계수 삼각형 유한요소를 사용하였다.

4.3 해석 알고리즘과 코우드 구성

C1. 초기 조건에 알맞도록 계산에 사용되는 모든 변수들을 초기화한다. 현재의 시각은 $t = 0$ 이고, 시간 증분 간격 Δt 를 결정한다.

$$\left. \begin{aligned} \{U\} &= \{0\}, \{\dot{U}\} = \{0\}, \{\ddot{U}\} = \{0\} \\ \{\theta\} &= \{0\}, \{\dot{\theta}\} = \{0\} \end{aligned} \right\}$$

$$\{\sigma\} = \{0\}, \{\epsilon\} = \{0\}, \{\epsilon^p\} = \{0\}$$

C2. 시간에 대한 물성치와 변수들을 읽는다.

C3. 주어진 외부 하중을 증가시킨다. 반복 지수 i 를 0으로 놓고, 반복 해법에 들어간다.

C4. 이산화된 증분형 운동 방정식을 구성하고, $\{{}^{(i+1)}\Delta U\}$ 를 구한다.

$$[{}^{(i)}K_U]\{\Delta U\} = \{{}^{(i)}F_U\}$$

C5. 에너지 방정식을 구성하는데 필요한 변형도·일 성분의 증분량을 구한다. 모든 Gauss 적분 점에 대하여 부증분 기법을 이용한다.

$$\{{}^{(i)}\Delta \tilde{\epsilon}\} = \int_t^{t+\Delta t} {}^{(i)}\theta (\{{}^{(i)}\dot{\epsilon}\} - \{{}^{(i)}\dot{\epsilon}^p\}) d\tau$$

$$\{{}^{(i)}\Delta w^p\} = \int_t^{t+\Delta t} \{{}^{(i)}\sigma\}^T \{{}^{(i)}\dot{\epsilon}^p\} d\tau$$

C6. 이산화된 증분형 에너지 방정식을 구성하고, $\{{}^{(i+1)}\Delta \theta\}$ 를 구한다.

$$[{}^{(i)}K_{\theta}]\{\Delta \theta\} = \{{}^{(i)}F_{\theta}\}$$

C7. 운동 방정식을 구성하는데 필요한 점소성 성분의 증분량을 미리 구한다.

모든 Gauss 적분 점에 대하여 부증분 기법을 이용한다.

$$\{{}^{(i)}\Delta \epsilon^p\} = \int_t^{t+\Delta t} \{{}^{(i)}\dot{\epsilon}^p\} d\tau$$

C8. 반복 해에 대한 수렴성을 조사한다.

C9. 해가 수렴하면, 사용된 모든 변수들을 현재의 값들로 개선시킨다 (update). 그리고 C2 단계로 돌아간다.

C10. 해가 수렴하지 않으면, 반복 지수 i 를 하나 증가시킨다. 그리고 C3 단계로 돌아간다.

5. 수치해석 결과

해석 재료는 니켈 합금 계열인 B1900+Hf을 선택하였고, 구성 방정식에 필요한 여러 가지 재료 계수들은 참고문헌[2]에 나와있다. 먼저 간단한 1차원 문제를 다루면서 재료의 온도특성에 대하여 알아보았다. 이어서 탄성해석과 점소성 해석문제를 다루었는데 2차원 모델에 대하여 해석하였다. 마지막으로 다룬 수치 예제는 열하중의 주파수와 구조물의 자유 진동수와 인접되어 있는 경우, 구조물의 자유 진동수와 관계를 규명하면서 재료의 동적 특성을 살펴보았다.

5.1 1차원 구조물의 열점소성 특성

국소적인 가열이 있는 구조물의 1차원 점소성 해석은 단순히 응력 특성을 고찰함으로써 구조물의 열점소성 특성을 이해하는데 유용하다.

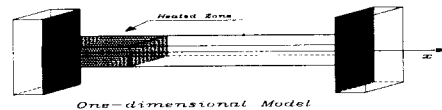


Fig.1 1차원 열점소성 모델

모델의 빗금 친 영역은 Fig.2에서 처럼 온도조건으로서 열하중이 주어지는데, 먼저 Fig.3에서는 가

열 부분에서 응력의 시간에 대한 변화를 봄으로써 온도가 빠르게 증가할 경우, 초기항복응력은 크게 나타나지만 시간이 어느정도 흐르면 항복응력의 값이 오히려 작아지는 것을 볼 수 있다.

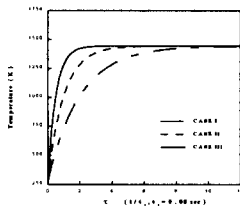


Fig. 2 열하중의 온도조건

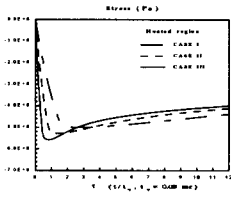


Fig. 3 가열 부분에 대한 응력 변화 곡선

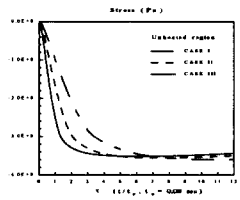


Fig. 4 비가열 부분에 대한 응력 곡선

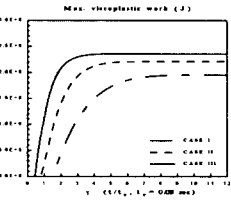


Fig. 5 가열 부분에 대한 점소성 일 곡선

5.2. 2차원 구조물의 열점소성 특성

Fig. 6. 처럼 온도에 의한 가열을 시간에 따라 진동시키면서 응력 변화와 변위의 변화를 살펴보았다. 특히 응력의 변화는 탄성 해석으로 구한 경우와 열점소성 해석으로 구한 경우를 비교하여 제시하였다. 또한 점소성 변형도와 점소성 일을 나타내 줌으로써 점소성 변형도의 역할에 대하여 고찰하여 보았다.

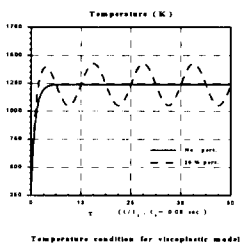


Fig. 6. 2차원 모델에 대한 온도 조건

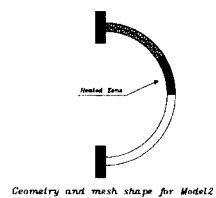


Fig. 7 2차원 모델의 기하학적 형상

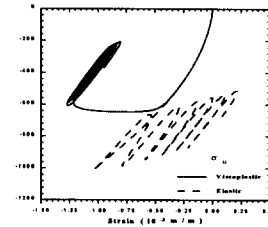


Fig.8 안쪽면에서 y-의 응력-변형도 곡선

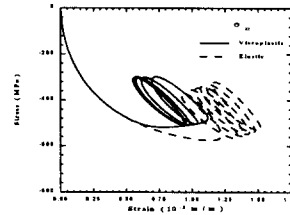


Fig. 9 바깥면에서 y-의 응력-변형도 곡선

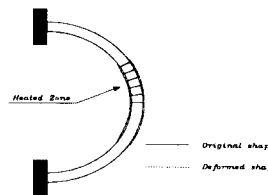


Fig. 10 $\tau=2$ 변형된 형상

Model2 의 경우는 Fig. 7처럼 곡률이 있는 2차원 모델의 경우를 해석하였다. 이러한 형상은 항공

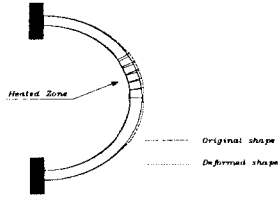


Fig. 11 $\tau = 45$ 변형된 형상

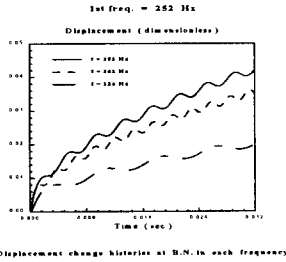


Fig. 12 여러 진동수에 따른 변위 변화 곡선

5.3 결론

1. 본 논문에서는 극초음속 비행체에서 자주 발생할 수 있는 온도에 의한 열하중을 여러 가지 경우로 가함으로써 재료의 점소성 성질과 이에 따른 응력의 변화를 살펴보았다.
2. 1차원 해석에서는 가열 부분과 비가열 부분의 응력 변화를 관찰함으로써 열하중이 빠르게 가해질 경우에 초기항복응력이 크게 나타나지만 시간이 지남에 따라 응력이 작아지는 것을 확인하였다.
3. 2차원 해석에서는 열탄성 해석과 열탄점소성 해석을 각각 수행하였다. 또한 다양한 형상의 구조물에 각각 적용하여 시간이 지남에 따라 응력과 변형도의 차이가 많이 나는 것을 살펴보았다.
4. 그러므로 고온 환경에 놓여 있는 구조물의 거동을 묘사할 경우에 좀 더 정확한 해석을 하기 위해서는 열탄점소성 해석을 수행할 필요가 있다.

참고문헌

1. Bodner, S.R., and Partom, Y., "Constitutive Equations for Elastic - Viscoplastic Strain -

Hardening Materials," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, No. 2, 1975, pp. 385-389.

2. Miller, A.K. (editor), *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, Elsevier Applied Science Pub., New York, 1987.

3. Kim, S.J. and Shin, E.S., "Finite Element Analysis of Laminated Composites Using an Unmixing-Mixing Viscoplastic Model," *AIAA Journal* (accepted).

4. Kim, S.J. and Shin, E.S., "A Thermoviscoplastic Theory for Composite Materials by Using a Matrix-Partitioned Unmixing-Mixing Scheme," *J. of Composite Materials* (accepted).

5. 신의섭, 김승조, "주기적 하중을 받는 금속기지 복합재료의 열기계학적 연계에 의한 온도 상승 효과," *한국복합재료학회지*, 제8권, 제2호, 1995, pp. 73-83.

6. Earl A. Thornton (editor), " *Thermal Structures and Materials for High-Speed Flight* " Vol.140 progress in AIAA, pp 323-336, 1992

7. Truesdell, C. and Noll, W., " The Non-Linear Field Theories of Mechanics ", Encyclopedia of physics (Edited by S.Flugge), Vol. 3/3, Springer-Verlag, 1965