

다중 입력 규명을 위한 센서의 위치 선정에 관한 연구 ; 주파수 응답 행렬의 직교성 응용

박 남규*, 박 용화*, 박 윤식**

A STUDY ON THE SENSOR PLACEMENT TO IDENTIFY MULTIPLE INPUT FORCES USING ORTHOGONALITY OF FREQUENCY RESPONSE MATRIX

Nam-Gyu Park, Yong-Hwa Park and Youn-sik Park

Abstract

A strategy to determine a proper sensor placement was developed to improve force identification. Improper selection of response position cause erroneous result in force identification problem. This paper presents two methods to improve the conditioning of the system's FRM(Frequency Response Matrix) which affects the accuracy of result. The basic strategy of the two methods in selecting the response position is to let the smallest singular value be as large as possible by maximizing the orthogonality of FRM. The suggested methods are tested numerically with a fixed-fixed beam model. The test results show that the proposed methods are very effective in dealing with the force identification problem.

1. 서 론

기계 구조물에 작용하는 입력을 알 수 없으면 그 시스템의 설계나 결함의 진단 등에 매우 큰 도움이 된다. 일반적으로 기계 구조물들의 입력을 직접적으로 측정할 수 없는 경우가 있으며, 만약 직접 입력을 측정하게 되면 그 계의 동적 특성을 왜곡시킬 수 있으므로 그로부터 얻은 작용 입력은 실제의 입력과는 다르게 되며, 시간과 비용의 측면에서도 간접 입력 예측에 비하여 큰 잇점이 없다[1]. 이때에는 그 계의 응답과 주파수 응답 행렬로부터 작용하는 입력을 역 추적하여야 한다.

공작기계의 경우, 공작물과 공구 사이에 작용하는 힘이나 엔진 블록에서 연소 폭발력에 의한 피스톤의 전달력은 사실상 직접 측정이 어려우므로 응답을 받아서 작용력을 추적함이 필수적이다.

이러한 역문제의 특성은 그 계의 전달 행렬과

밀접한 관련이 있으며 고유 진동수 부근과 영점(transmission zero)부근에서는 약간의 응답 측정 오차나 전달 행렬의 오차라 할지라도 입력 예측에 매우 큰 오차를 초래한다[2]. 고유 진동수 부근은 그 계의 특성을 결정짓는 모드와 관계되는 곳으로 특별히 그에 해당하는 모드가 지배적으로 나타나게 되므로 하나의 특이치가 나머지 특이치들에 비해서 월등히 크게 된다. 따라서 특이치들의 상대적인 차이가 크게 되므로 시스템 전달 행렬이 악조건(ill-condition)이 되어 입력 예측에 큰 오차를 유발한다. Hillary와 Erwins[3]는 고유진동수 부근에서 예측된 입력이 매우 많은 오차를 수반함을 관측하였고, 저주파수 영역에서 더욱 정확한 결과를 얻기 위해 변형률을 응답으로 쓸 것을 제안하였다.

영점은 센서와 가진기의 위치에 따라 결정되는 특성이라고 볼 수 있으며[4,5,6], Miu와 Yang[7]은 영점에 대한 물리적·수학적 설명을 하였다. 여기서 영점은 전달 행렬의 행렬식이 0이 되는 주파수를 의미하며 이는 센서와 가진기의 위치에 의해 결정된다[6]. 따라서 전달 행렬은 차수 부족(rank deficiency)의 문제를 발생시키며 주파수 응답 행렬은 악조건이 된다. 이 논문은 이러한

* 한국과학기술원 기계공학과

** 한국과학기술원 기계공학과(정회원)

영점의 발생이 센서의 위치에 따라 달라짐을 근거로 하여 어느 위치에 센서를 위치시키면 시스템 전달 행렬의 조건수를 낮추어 입력 규명의 신뢰도를 향상시킬 수 있는가에 관한 연구를 다룬다.

센서의 위치 선정에 관한 연구는 주로 피드백 제어(feed back control)를 위한 연구 논문[8,9]에서 많이 다루어졌고, 간접 입력 예측을 위한 센서 위치의 선정에 관해서는 모드 형상을 응용한 방법으로 J-K Lee 와 Y-S Park[10], M.C. Han[11]의 연구가 있으며, 전달 행렬의 직교 투사 행렬(orthogonal projector)을 이용한 H. Lee[2]의 연구가 있다. 전자의 경우는 어느 한 주파수에서 각 모드들의 영향을 반영하는 지수(mode contribution factor)를 이용하여 센서의 위치를 선정하였다. 그러나 실제로 주파수 응답 행렬로부터 모드 행렬을 정확하게 구하기가 매우 까다로우므로 실제의 적용상에는 문제가 된다. 후자의 경우는 주어진 주파수 응답 행렬을 직접 이용하는 방법이지만 그 계산 과정상의 비선형성과 특이치를 고려하지 않음으로서 입.출력의 갯수가 많아지면 많은 오차를 초래한다.

본 연구는 이러한 단점들을 극복하고자 주파수 응답 행렬을 구성하는 각 벡터들간의 직교성을 비교하여 직교성이 최대한 보장되는 곳을 센서의 위치로 선정하였다.

2. 조건수와 입력오차

e 개의 입력과 m 개의 출력이 있는 주어진 시스템의 응답을 $\{X(\omega)\}_{m \times 1}$, 주파수 응답 행렬을 $[H(\omega)]_{m \times e}$ 라고 하면, 선형 시불변계의 기본적인 입.출력 관계는 다음과 같이 나타내진다.

$$\{X(\omega)\}_{m \times 1} = [H(\omega)]_{m \times e} \{F(\omega)\}_{e \times 1} \quad (1)$$

여기서 다음과 같이 $[H]_{m \times e}$ 의 가역행렬(pseudo inverse) $[H]_{e \times m}^+$ 를 얻어 e 개의 입력 $\{F(\omega)\}_{e \times 1}$ 을 구한다.

$$\{F(\omega)\}_{e \times 1} = [H(\omega)]_{e \times m}^+ \{X(\omega)\}_{m \times 1} \quad (2)$$

e 개의 유일한 해를 구하기 위한 필요 조건으로서 다음을 만족시켜야 한다.

$$e \leq \text{Rank}([H(\omega)]) \leq m \quad (3)$$

즉 e 개의 가진력을 간접 측정하기 위한 필요 조건으로 최소한 e 개의 독립적인 모드와 센서가

각각 필요하게 된다.

여기서 $\text{Rank}([H(\omega)])$ 가 식(4)와 같이 되는 경우에,

$$\text{Rank}([H(\omega)]) = r < e \quad (4)$$

주파수 응답 행렬을 특이치 분리하면 다음과 같다.

$$[H(\omega)]_{m \times e} = U_{m \times m} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & s_r & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} V_{e \times e}^* \quad (5)$$

$:(s_{r+1} = \cdots = s_e = 0)$

이며 조건수는 다음과 같다.

$$\text{cond}([H(\omega)]_{m \times e}) = \frac{s_1}{0} = \infty \quad (6)$$

또한 $\text{Rank}([H])$ 가 e 보다 크고 주파수 응답 행렬을 구성하는 각 행벡터들이 서로 직교하는 경우에는 모든 특이치는 유한한 값을 갖게 되므로 조건수는 다음과 같다.

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_e \neq 0$$

$$\therefore \text{cond}([H(\omega)]_{m \times e}) = \frac{s_1}{s_e} \quad (7)$$

이때에 유한한 조건수를 갖게 되므로 주파수 응답 행렬은 좋은 조건이 된다(well-conditioning).

조건수가 입력 예측에 미치는 영향을 보기 위해 응답 측정 오차와 시스템 오차를 각각 $\{\delta H(\omega)\}$, $\{\delta X(\omega)\}$ 라 하고 센서와 가진력의 갯수가 같을때 입출력 관계는 (1)식에 따라 다음과 같이 표현되며

$$([H] + [\delta H])_{e \times e} (\{F\} + \{\delta F\})_{e \times 1} = (\{X\} + \{\delta X\})_{e \times 1} \quad (8)$$

$\alpha = \|[\delta H] [H]^{-1}\| < 1$ 이면 상대 입력 오차의 크기는[12] 다음과 같다.

$$\frac{\|[\delta F]\|}{\|[F]\|} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \text{cond}([H]) \left(\frac{\|[\delta X]\|}{\|[X]\|} + \frac{\|[\delta H]\|}{\|[H]\|} \right) \quad (9)$$

이때, $\|[\delta H]\| \ll 1$ 이면

$$1 - \|[[H]^{-1} [\delta H]\| \approx 1 \quad (10)$$

이므로 식 (9),(10)으로부터

$$\frac{\|{\delta F}\|}{\|F\|} \leq \text{cond}([H]) \left(\frac{\|{\delta X}\|}{\|X\|} + \frac{\|{\delta H}\|}{\|H\|} \right) \quad (11)$$

로 된다. 즉 상대 입력 예측 오차의 크기는 시스템 오차와 응답 오차 및 주파수 응답 행렬의 조건수와 관계됨을 알 수 있다. 조건수는 센서의 위치의 함수이므로 서로 직교성을 만족시키는 주파수 응답 행렬의 벡터들을 찾는다면 측정 오차 및 시스템 오차에 의한 입력 예측 오차의 크기가 감소하게 된다.

3. 센서의 위치 선정

주파수 응답 행렬 내의 직교성을 만족시키는 벡터들을 찾기위해 두가지의 방법을 도입하였다. 첫번째 방법은 차수가 부족(rank deficiency)한 제차(homogeneous) 선형 방정식에서 비자명해(non trivial solution)를 구하는 방법으로 특이치 분리를 이용하였고 둘째는 Gram-Schmidt[12]처리를 이용하여 센서의 위치를 결정하는데 응용하였다.

e 개의 입력이 들어오는 시스템에서 n 개의 위치에서의 주파수 응답 함수는, 직교 기본 벡터(orthogonal basis)가 주어지면 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$H_k = \sum_{m=1}^e c_m^k v_m \quad , k = 1, \dots, n \quad (12)$$

여기서 $H_k = (H_{k1} H_{k2} \dots H_{ke})$ 이며, v_m 은 직교 기본 벡터이고, c_m^k 는 k 의 응답 위치에서 m 번째의 기본 벡터가 가지는 성분이다.

각 기본 벡터(basis)들의 방향으로 그 계수의 크기가 가장 큰 위치를 선정하도록 하면 정확한 직교성을 보장하지는 않겠지만 가능한 최대한의 직교성을 만족시키게 된다. 즉

$$\langle H_k, v_j \rangle = c_j^k \quad , j = 1, \dots, e \quad (13)$$

이므로 어느 특정 방향으로의 크기가 가장 큰 벡터들을 순차적으로 찾으면 그에 해당하는 위치가 구하고자 하는 센서의 위치가 된다.

3.1 특이치 분리를 이용한 센서 위치 결정

본 연구에서는 조건수를 줄일 수 있는 센서의 위치를 찾기 위한 방법으로 비자명해를 구할 수 있는 특이치 분리(singular value decomposition)를

이용하였다. 비자명해가 존재하기 위해서는 방정식의 차수(rank)가 부족해야 한다.

한 주파수에서 $\text{Rank}([H(\omega)]_{n \times n}) = r < n$ 이면 $n-r$ 개의 비자명해가 존재하며 서로 직교하는 $n-r$ 개의 해를 찾을 수 있다. e 개의 위치에서 입력이 들어오고, 센서의 후보위치 개수가 n 인 시스템 ($[H]_{n \times e}$)에서, 주파수 응답 행렬의 차수가 1이 되도록 한개의 행벡터만을 선정하면 주파수 응답 행렬은 $[H_r]_{1 \times e}$ 이 된다. 따라서 $e-1$ 만큼의 차수가 부족하여 그 부족한 차수만큼의 비자명해가 존재하며 $[H_r]_{1 \times e}$ 을 구성하는 벡터와 더불어 직교하는 기본 벡터(orthogonal basis)의 성질을 만족시킨다. $[H_r]_{1 \times e}$ 을 구성하는 행 벡터를 편의상 기준 벡터라 하고 그 위치에 해당하는 센서를 기준 센서라 하자. 그러면 기준 행 벡터는 e 차원 공간상의 복소 벡터

$$[H_r]_{1 \times e} = H_r = (H_{r1} H_{r2} \dots H_{re}) \quad (14)$$

이며, 그에 해당하는 비자명해를 $v_i (i = 1, \dots, e-1)$ 라 하고 $v_e = H_r$ 로 놓으면 주파수 응답 행렬을 구성하는 모든 행 벡터들은 식(12)처럼 쓸 수 있으며 벡터의 내적은 다음의 성질을 만족시킨다.

$$\langle H_r, v_i \rangle = 0 \\ \langle v_j, v_k \rangle = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases} \quad (15)$$

하나의 기준 위치는 이미 결정되었으므로 나머지의 위치들은 식(15)에서 각 기본 벡터의 방향으로 큰 계수를 갖는 곳으로 정한다.

기준 벡터의 선정은 백색 잡음(white noise)인 경우 잡음대신호비(noise to signal ratio)가 최소가 되도록 $\|H\|_{\infty}$ 를 구하여 그 값을 나타내는 위치의 행을 기준으로 하였다.

$[H_r]_{1 \times e}$ 를 특이치 분리(singular value decomposition)하면 식(16)과 같다.

$$[H_r]_{1 \times e} = U_{1 \times 1} [s_1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times e} V_{e \times e}^* \quad (16)$$

여기서 *는 켈레 복소 전치 행렬을 의미하며, $\text{Rank}([H_r]_{1 \times e}) = 1$ 이므로 $U_{1 \times 1} = 1$ 이며, V 를 구성하는 e 개의 열벡터에서 v_2, \dots, v_e 는 $[H_r]_{1 \times e}$ 의 직교 공간을 구성하므로 $e-1$ 개의 벡터 v_2, \dots, v_e 와 기준 벡터 H_r 은 e 차원의 복소 공간상의 직교 기본 벡터(orthogonal basis)의

성질을 만족 시키며 식(12)와 같은 식을 쓸 수 있고 식(13)에 의해 어느 특정 방향으로의 크기가 가장 큰 벡터들을 순차적으로 찾을 수 있다.

3.2 Gram-Schmidt 방법을 이용한 센서 위치

결정

Gram-Schmidt 방법은 직교 기본 벡터(orthogonal basis)들을 찾기 위한 방법이다[12]. 또한 직교 기본 벡터들을 구하기 위해서 찾고자 하는 기본 벡터의 갯수만큼 서로 독립인 벡터가 미리 정해 져야 한다.

e 개의 가진력이 들어오고 있을 때 입력 규명을 위해 필요한 최소한의 센서의 갯수는 e 개이며 식(15)와 같은 방법으로 위치를 결정하기 위해서 e 개의 직교 기본 벡터가 필요하다. 또한 본 방법은 Gram-Schmidt 과정을 응용하는 것이므로 전의 방법과 달리 e 개의 벡터들이 주어져야 한다. 이를 찾기 위한 방법으로 전과 동일하게 백색 잡음인 경우 잡음대 신호비의 지수를 작게하는 위치들을 차례로 e 개만큼 선정한다. $H_k^0 = H_k$ ($k = 1, \dots, e$)라고 하면 각 기본 벡터들은 다음과 같은 과정으로 구한다.

$$\begin{aligned} v_k &= H_k^{k-1} \\ H_i^j &= H_i^{j-1} - \frac{v_j \langle v_j, H_i^{j-1} \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}, i = j+1, \dots, e \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)의 과정을 거쳐 필요한 기본 벡터들을 얻을 수 있다. 또 식(12)와 같이 구하여진 기본 벡터들로 표현할 수 있으며 식(13)과 같은 원리로 각 기본 벡터의 방향을 대표하는 위치들을 선정할 수 있다.

전자의 방법은 기준 벡터의 갯수가 한개 이었으나 여기서는 e 개의 벡터를 선정하여 기본 벡터들을 구하였다. 주파수 응답 행렬을 구성하는 벡터에서 전자의 경우보다 $e-1$ 개의 벡터가 부가 됨으로써 다음절에서 기술하겠지만 더 정확하게 입력을 예측할 수 있다.

4. 수치 실험

두 방법의 적용으로서 다음의 Fig. 1의 양단이 고정된 보를 대상으로 하였다. (a)의 경우 두개의 입력이 4,12의 위치에서, (b)의 경우 세개의 입력이 4,10,12의 위치에서 가해지는 것으로 하였다.

이때 각 모드의 영향을 알아보기 위한 인자로서 모드 기여 인자(mode contribution factor) $\varepsilon(\omega)$ 를 도입하면[10,11] 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\min_{i=1}^k \left(\frac{\|\langle \Phi_i \rangle\|}{|P_i|} \right)}{\max_{i=1}^k \left(\frac{\|\langle \Phi_i \rangle\|}{|P_i|} \right)} \quad (18)$$

여기서 $\{\Phi_i\}$ 는 i 번째의 모드이며, $P_i = \Omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i \omega \Omega_i$ 이고 Ω_i, ζ_i 는 각각 그 모드의 고유 진동수와 감쇠비이다. 분자는 기여도가 가장 작은 모드에 해당하는 항이며, 분모는 기여도가 최대인 모드에 해당하는 항을 의미한다.

또 응답 위치에서의 모드 벡터를 $\{\Phi_i\}_x$, 입력 위치에서의 모드 벡터를 $\{\Phi_i\}_f$ 로 구분하면, 모드 기여도 $C(\omega)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$C(\omega) = \min(\varepsilon_x(\omega), \varepsilon_f(\omega)) \quad (19)$$

또한 식(19)의 범위는 항상 다음과 같다.

$$0 \leq C(\omega) \leq 1 \quad (20)$$

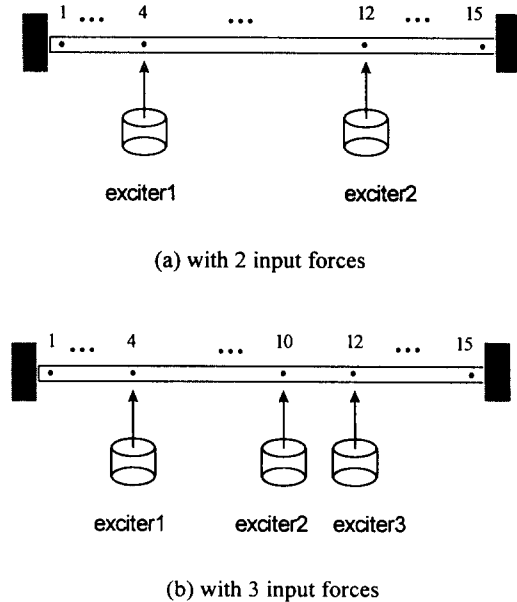


Fig. 1 beam model with multiple forces

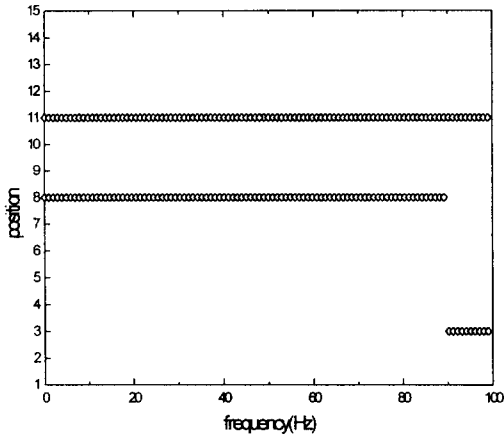


Fig. 2 determination of sensor position via MCF[10,11]

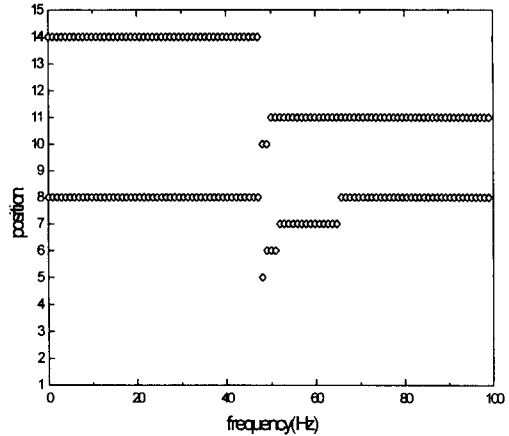


Fig. 4 determination of sensor position via method 1

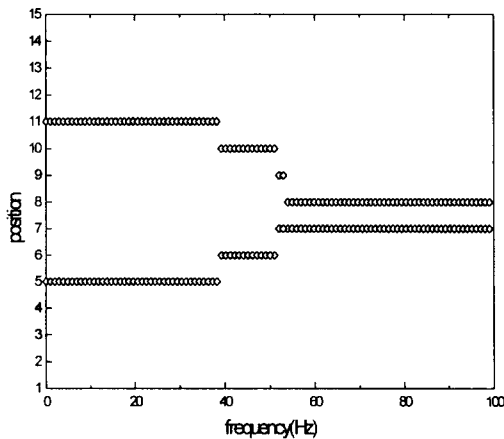


Fig. 3 determination of sensor position via orthogonal projector[2]

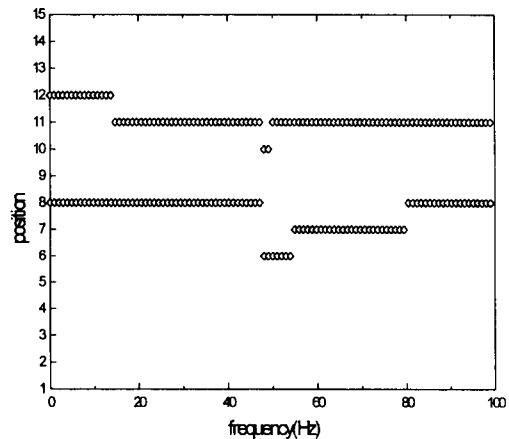


Fig. 5 determination of sensor position via method 2

즉 가장 지배적인 모드와 그렇지 않은 모드의 크기의 비로서, 그 기여도 값이 1에 가까울 수록 서로 비슷한 크기로 응답에 영향을 끼치므로 조건수가 작아지게 되며 입력 오차를 줄일 수 있게 된다.

Fig. 2와 3은 서론에서 언급하였던 모드 기여도와 직교 투사 행렬을 이용하여 두개의 입력이 작용하고 있을때 100Hz까지의 범위에서 센서의 위치를 결정한 것이다. Fig. 4와 5는 본문에서 제시한 직교성의 비교로 얻어진 센서의 위치이다.

이때 20Hz까지의 범위에서 얻어진 각 위치들의 모드 기여도와 조건수는 Fig. 6, 7과 같다. Fig. 6에서 볼 수 있듯이 각 방법에 의한 모드 기여도는 입력이 3개인 경우(Fig. 13)에 비해 그다지 작지 않고, 각 모드가 고르게 응답에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 또한 Fig. 7에서는 각 방법에

의한 조건수를 보이고 있으며 모드 기여도에 서로 같이 서로 비슷한 조건수를 보여 준다.

규명된 입력은 Fig. 8(a)에 입력 1의, (b)에 입력 2의 결과가 있다. 임의로 선택한 위치는 6, 10의 위치이며 다른 것에 비해 그 오차가 크게 나오고 있다.

입력이 3개인 경우에 대하여 각 방법에 의해 선정된 위치는 Fig. 9, 10, 11, 12에 보이고 있으며 Fig. 13, 14는 그때 선정된 위치에서의 모드 기여도와 조건수이다. 입력이 2개인 경우와 다르게 Fig. 13에서는 모드 기여도 값이 매우 작음을 알 수 있다. 이는 입력이 두개인 경우에 비해 가장 작은 기여도를 갖는 모드가 영향을 미칠 수 있는 주파수 범위의 제약이 심하기 때문이다. 따라서 센서의 위치 선정 방법에 따라서 그 조건수의 크기가 많이 다르다(Fig. 14).

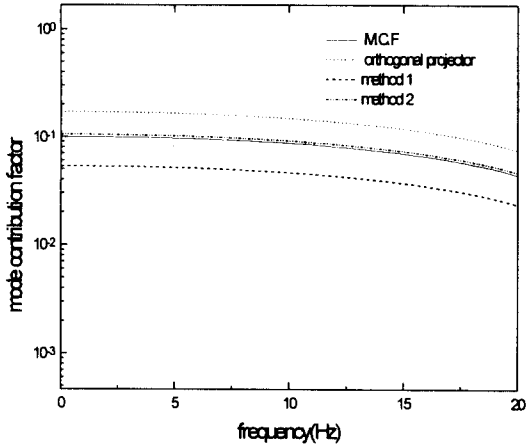


Fig. 6 mode contribution factor

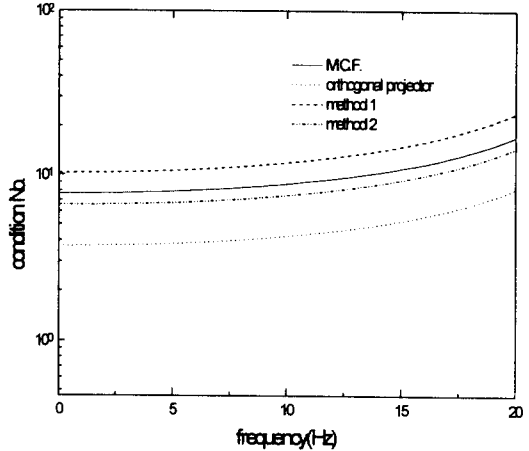
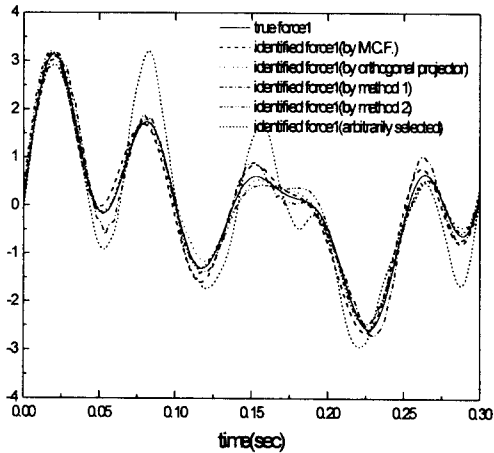
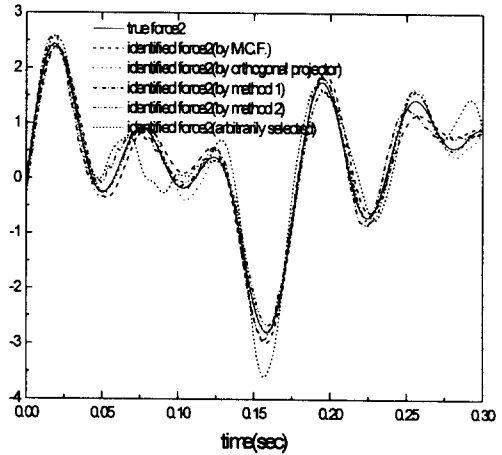


Fig. 7 condition number



a) identified force 1



b) identified force 2

Fig. 8 comparison of identified forces in case of two input forces

모드 기여도를 이용한 센서의 위치 선정은 기여도가 0에 근접할수록 신뢰도가 낮으며, 결과적으로 조건수가 커지고 입력 예측의 오차가 커지게 된다(Fig. 15). 직교 투사 행렬을 이용하는 선정 방법의 경우에도, 그 과정의 비선형성과 특이치를 고려하지 않음으로 인하여, 2 입력의 경우에 비해 낮은 모드 기여도와 큰 조건수를 갖는다.

입력이 3개인 경우에 규명된 입력들은 Fig. 15의 (a),(b),(c)에 차례로 도시하였다. 이 경우는 각 방법에 따른 조건수의 차이가 크기 때문에 규명된 입력들도 그 크기에 비례하여 오차가 발생한다. 임의로 선정된 위치는 3,5,10의 위치에서 응답을 받은 경우로서 2개 입력의 경우와 마찬가지로 그 오차가 매우 크며, 본문에서 제시한 두 방법의 경우는 실입력과 비교했을 때 다른 방법으로 선정된 경우에 비하여 그 오차가 크지 않음을

알 수 있다. 즉 직교성의 비교로 얻어진 위치에서 응답을 받으면 조건수를 낮추어 신뢰도있는 결과를 얻을 수 있다.

5. 결론

입력을 직접적으로 측정하지 않고 계의 응답을 이용하여 규명할 경우 그 응답의 위치 선정은 주파수 응답 행렬의 특성은 물론 입력 규명의 오차의 크기에 영향을 미치므로 매우 중요하다.

본 연구에서는 센서의 위치를 주파수 응답 행렬의 직교성을 비교하여 결정하였다. 입력 규명의 오차는 응답의 오차나 시스템의 오차에도 영향을 받지만 대개 주파수 응답 행렬의 조건수와 밀접한 연관이 있다. 조건수를 직접 찾았다면 가장 최적의 결과를 줄 수 있지만 반복 계산 때문에 많은 시간이 소요되는 단점이 있다.

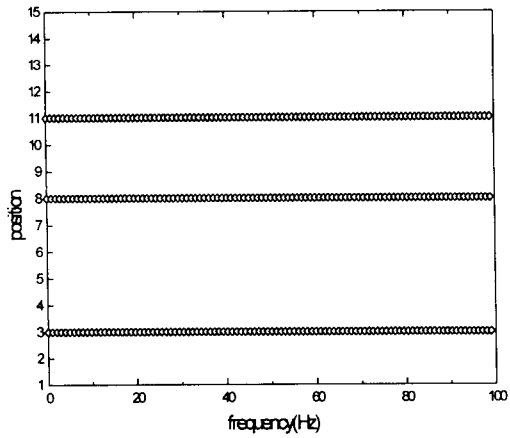


Fig. 9 determination of sensor position via MCF

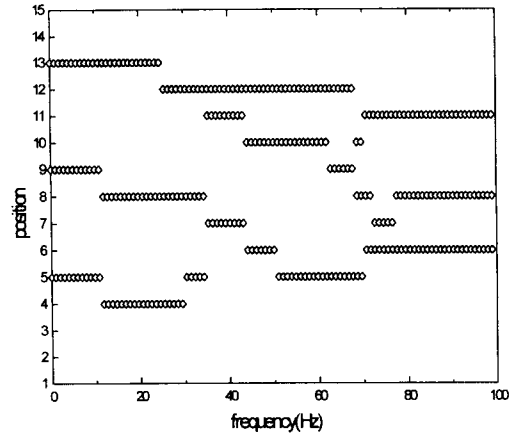


Fig. 12 determination of sensor position via method 2

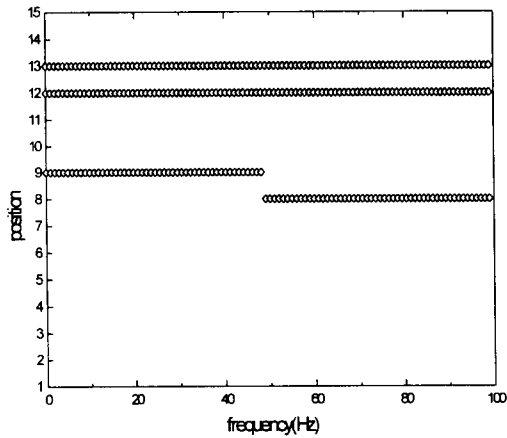


Fig. 10 determination of sensor position via orthogonal projector

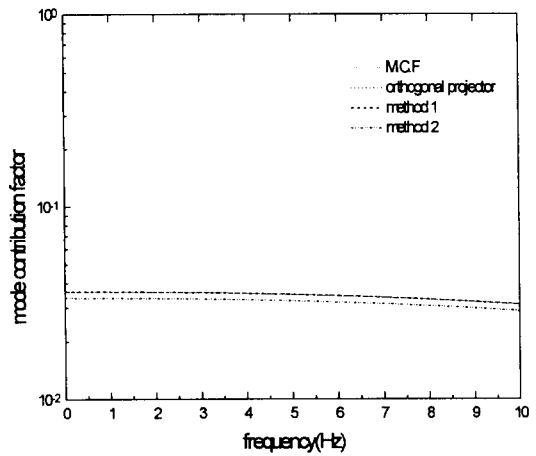


Fig.13 mode contribution factor

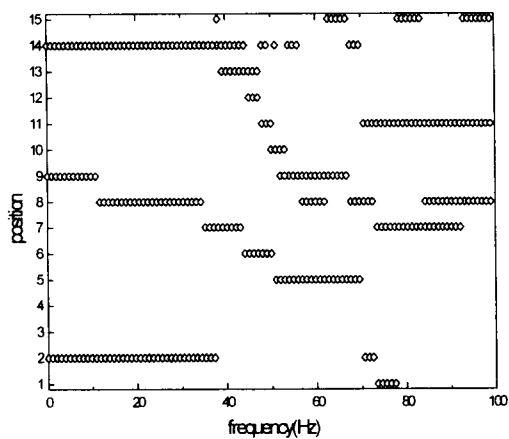


Fig. 11 determination of sensor position via method 1

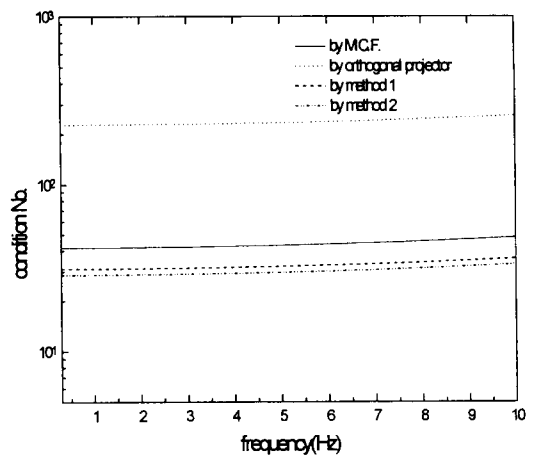
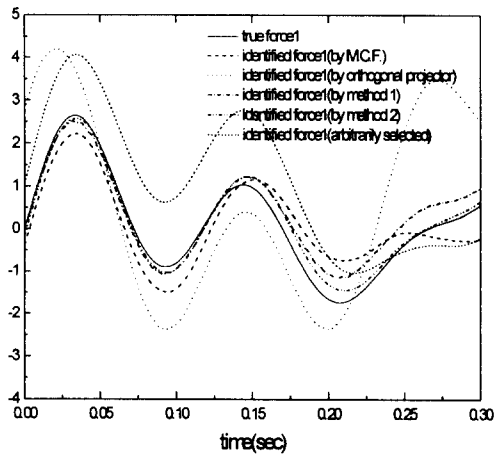
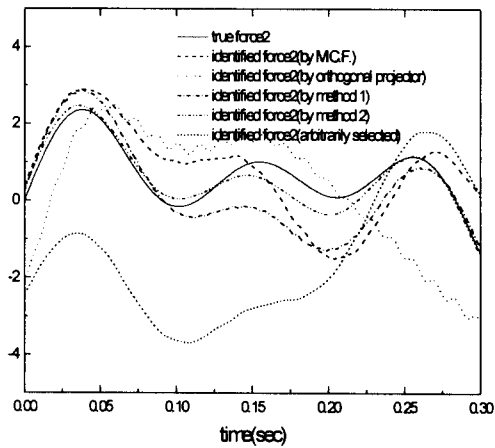


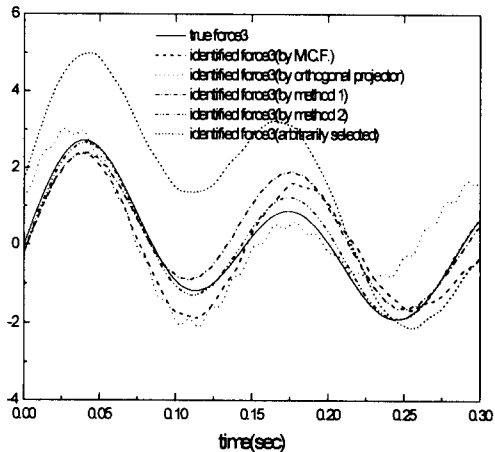
Fig. 14 condition number



a) identified force 1



b) identified force 2



c) identified force 3

Fig.15 comparison of identified forces
in case of three input forces

조건수는 주파수 응답 행렬을 구성하는 벡터들의 독립성과 관련이 있으므로 독립성의 판단 기준으로 직교성을 비교하여 센서의 위치를 선정하였다. 기존의 위치 선정 이론들은 모드의 영향이 고르지 않거나 입출력의 갯수가 많아지면 신뢰성이 떨어짐을 보였다.

제시한 방법들의 타당성을 입증하고자 양쪽이 고정된 보를 대상으로 하여 입력이 2 개와 3 개인 경우에 대하여 기존의 방법들과 비교하여 제시한 방법의 적합성을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] K. Okubo, S. Tanabe, T. Tatsuno, "Identification Of Forces Generated By A Machine Under Operating Conditions", Proceedings of the 3rd I.M.A.C., pp920-927, Feb. 1985
- [2] H. Lee, "The Characteristics Of Indirect Force Determination In Structural Dynamics", Ph. D. Dissertation, KAIST, Korea, 1996
- [3] D.J. Erwins, B. Hillary, "The Use of Strain Gauges In Force Determination And Frequency Response Measurement", Proceedings of the 2nd I.M.A.C., pp627-634, Feb. 1984
- [4] A.G.J. Macfarlane, N. Karcnias, "Poles And Zeros Of Multivariable Systems : A Survey Of The Algebraic, Geometric And Complex Variable Theory", International Journal of Control, Vol.24, No.1 pp34-74, 1976
- [5] G. Dudley Shepard, "On Antiresonances, With Application To Control Of Structures", Proceedings of 3rd I.M.A.C., pp523-526, 1985
- [6] T. Williams, "Costrained Modes In Control Theory: Transmission Zeros Of Uniform Beams", Journal of Sound and Vibration Vol.156, No.1, pp170-177, 1992
- [7] D.K. Miu, B. Yang, "On Transfer Function Zeros Of General Colocated Control Systems With Mechanical Flexibilities", Journal of Dynamic systems, Measurement, And Control, Vol.116, pp151-154, 1994
- [8] M.L. Delorenzo, "Sensor And Actuator Selection For Large Space Control", Journal of guidance, Vol.13, No.2, pp249-257, Mar.-Apr. 1990
- [9] S. Omatu, S. Koide, T. Soeda, "Optimal Sensor Location Problem For A Linear Distributed Parameter System", I.E.E.E., pp665-673, 1978
- [10] J.K. Lee, Y.S. Park, "Response Selection And Dynamic Damper Application To Improve The Identification Of Multiple Input Forces Of Narrow Frequency Band", M.S.S.P., pp649-664, 1994
- [11] M.C. Han, "Improved Approaches To The Indirect Force Determination Problems Via Experimental Modal Analysis", Ph.D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute, Blacksberg, Virginia, 1991
- [12] B. Noble, J.W. Daniel, "Applied Linear Algebra", Prentice Hall, 3rd Edition